Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo

André Koch Torres Assis

Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo

André Koch Torres Assis

Apeiron
Montreal

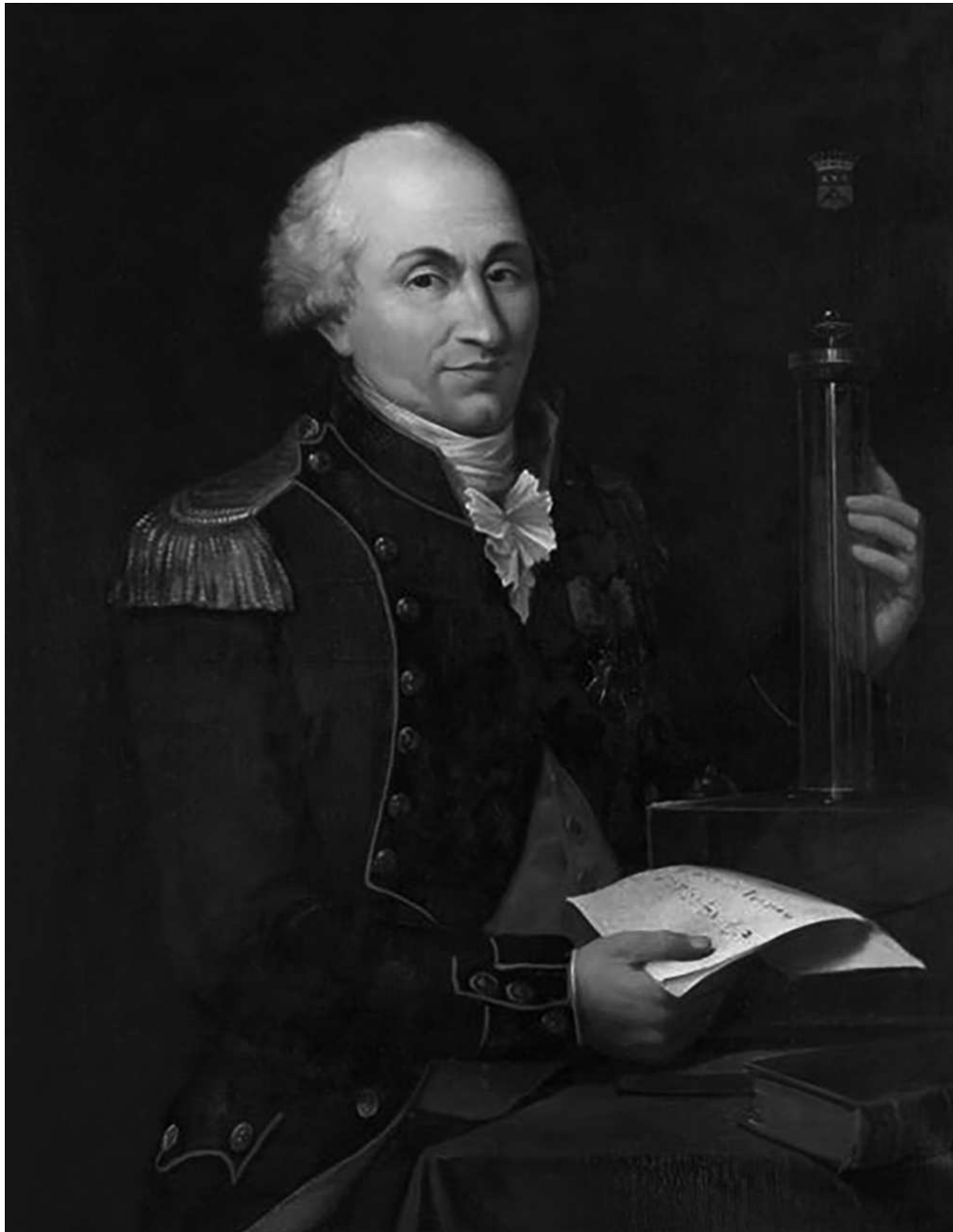
Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada
http://redshift.vif.com

First Published 2022

Library and Archives Canada Cataloguing in Publication

Title: Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo / André Koch Torres Assis.
Names: Assis, André Koch Torres, 1962- author.
Description: Includes bibliographical references.
Identifiers: Canadiana (print) 20220181365 | Canadiana (ebook) 20220181462 | ISBN 9781987980318 (softcover) | ISBN 9781987980325 (PDF) | ISBN 9781987980318
Subjects: LCSH: Coulomb, C. A. (Charles Augustin), 1736-1806. | LCSH: Electricity. | LCSH: Magnetism.
Classification: LCC Q143.C65 A87 2022 | DDC 530.092—dc23

A figura da capa é uma pintura a óleo de Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) feita em 1894 pelo pintor francês Louis Hierle (1856-1906), sendo que esse quadro encontra-se no Palácio de Versailles. Ela é baseada em uma pintura de Coulomb feita entre 1803 e 1806 por um artista desconhecido (alguns atribuem a pintura original a Hippolyte Lecomte (1781-1857)). Ela mostra Coulomb em seu uniforme militar, segurando sua famosa balança de torção e um trabalho científico. Essa é a imagem mais famosa de Coulomb.

Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo

André Koch Torres Assis

Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Sumário

Agradecimentos

Agradeço a diversas pessoas pelo apoio, informações, figuras, sugestões, discussões e referências relacionadas a essa obra:

Thiago Pedro Mayer Alegre, José André Angotti, Alexandre Alberto Visentin Ramos de Araújo, Alan Aversa, Cezar Cavanha Babichak, Dayane de Souza Bancoff, Arthur Baraov, Fabio Bevilacqua, Christine Blondel, Sérgio Luiz Bragatto Boss, Paolo Brenni, Louis Bucciarelli, Thiago Augusto de Lima Burgo, Iberê Caldas, João José Caluzi, Juliano Camillo, Haroldo Fraga Campos Velho, Hugo Bonette de Carvalho, Danylo do Amaral Cavalcanti, Elizabeth Cavicchi, Andrea Cerreta, Pietro Cerreta, Raffaele Cerreta, Eloi Teixeira Cesar, João Paulo Martins de Castro Chaib, Chien-Heng Chou, Asit Choudhuri, Michael Clarage, João F. N. Cortese, Manuel Filipe P. C. M. Costa, Lúcio Costa, Silvio Dahmen, Alan Corrêa Diniz, José Benito Vázquez Dorrío, Stephan Drescher, John B. Eichler, Charbel El-Hani, Henrique Ennes, Vincenzo Favale, Norberto Cardoso Ferreira (Tex), Junichiro Fukai, Claudio H. Furukawa, Hans Gaab, Fernando Galembeck, Daniel Gardelli, Maria José Fontana Gebara, Robert Harry van Gent, Charles Stewart Gillmor, Marcio Peron Franco de Godoy, Jürgen Gottschalk, Robert W. Gray, Jenaro Guisasola, Hermann Härtel, Peter Heering, John Lewis Heilbron, Júlio Akashi Hernandes, David de Hilster, Tim Hooker, Steve J. Hutcheon, Elizabeth Ihrig, Antonio Iovane, Wagner Tadeu Jardim, John Jenkins, Basilio José Augusto José, Kostas Kampourakis, Ricardo Karam, Siegfried Kett, Maurício Kleinke, Martin Kostal, Ellen Kuhfeld, Wolfgang Lange, Fabio Menezes de Souza Lima, Lin Liu, Harald Goldbeck-Löwe, José Joaquín Lunazzi, Antonio Maffucci, Ceno Pietro Magnaghi, Louis Marmet, Francisco das Chagas Marques, Nelson Luiz Reyes Marques, Thiago Marques, Michael Matthews, Melinda McTeigue, Alexandre Medeiros, Eduardo Meirelles, Manoel Guilherme da Silva Mello, Paulo Henrique Dias Menezes, Rickson Mesquita, Valter Cesar Montanher, Breno Arsioli Moura, Lucas Marcelo Cavalari Nardi, Dennis Nawrath, Marcos Cesar Danhoni Neves, Giovana Trevisan Nogueira, Horst Nowacki, Frederico Ayres de Oliveira Neto, Ronaldo Furtado de Oliveira, Gilberto Orengo, Cesar Pagan, Paolo Palmieri, Martin Panusch, Luiz O. Q. Peduzzi, Sônia Peduzzi, Aldo Aoyagui Gomes Pereira, José Rafael Boesso Perez, Daniel Robson Pinto, Gerald H. Pollack, Anabel Cardoso Raicik, Eugênio Maria de França Ramos, Jan Rak, Fabio Miguel de Matos Ravanelli, Karin Reich, Edson Eduardo Reinehr, Mário Bernal Rodriguez, Torsten Rüting, Danilo Ricardo Rosa de Sá, Dirceu Tadeu do Espírito Santo, Emely Giron dos Santos, Emerson Izidoro dos Santos, Wayne M. Saslow, Leonardo Sioufi Fagundes Santos, Rita Serafini, Cibelle Celestino Silva, Daniel dos Anjos Silva, Valter Aparecido Silva Junior, Carlos Augusto Silva, Ana Paula Bispo da Silva, Leandro Herculano da Silva, João Ricardo Neves da Silva, Douglas Soares da Silva, Dimas Guido Silva, Elay Shech, Bruce Sherwood, Fernando Lang da Silveira, Thales Costa Soares, Moacir Pereira de Souza Filho, Nelson Studart, Hannes Täger, José Roberto Tagliati, Kauê Tamarozzi, Mario Noboru, Tamashiro, Julian David Medina Tamayo, Milton G. Tarazona, Martin Tajmar, Wallace Thornhill, Danny Tonidandel, Christian Ucke, Riccardo Urigu, Alvaro Vannucci,

Geraldo Magela Severino Vasconcelos, Jorge Luis Contreras Vidal, Rui Manoel de Bastos Vieira, Greg Volk, Bertrand Wolff, Bernd Wolfram, Gudrun Wolfschmidt, Lucy Wyatt e Tomasz Zaborowski.

Ao Instituto de Física, ao Instituto de Matemática, ao Grupo Gestor de Projetos Educacionais e ao Fundo de Apoio ao Ensino, à Pesquisa e à Extensão da UNICAMP que forneceram as condições necessárias para a realização desse trabalho. Agradeço também ao Instituto de História das Ciências Naturais da Universidade de Hamburgo, à Universidade Técnica de Dresden, e à Fundação Alexander von Humboldt por me concederem três Bolsas de Pesquisa que me permitiram trabalhar na Alemanha nos anos de 2001-2002, 2009 e 2014 durante os quais coletei uma grande quantidade de material bibliográfico relacionado com essa tradução comentada.

Roy Keys, o Editor da Apeiron, tem me apoiado por muitos anos. Ele fez um trabalho editorial excelente para esse livro.

André Koch Torres Assis
Instituto de Física
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP
13083-859 Campinas, SP, Brasil
Email: assis@ifi.unicamp.br
Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Capítulo 1

Introdução à Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb

A figura da capa é uma pintura a óleo de Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) feita em 1894 pelo pintor francês Louis Hierle (1856-1906), sendo que esse quadro encontra-se no Palácio de Versailles. Ela é baseada em uma pintura de Coulomb feita entre 1803 e 1806 por um artista desconhecido (alguns atribuem a pintura original a Hippolyte Lecomte (1781-1857)). Ela mostra Coulomb em seu uniforme militar, segurando sua famosa balança de torção e um trabalho científico. Essa é a imagem mais famosa de Coulomb.

Apresento nesse livro a tradução para o português das principais obras de Coulomb. Boa parte desses trabalhos, embora não todos, foram republicados em 1884 pela Sociedade Francesa de Física.[1] Nessa reedição francesa alguns artigos foram reimpressos apenas parcialmente. Nessa tradução em português apresentei a tradução comentada e completa de todas essas obras, juntamente com alguns outros artigos que não foram incluídos na reedição de 1884.

As palavras entre colchetes no meio do texto, [ ], foram introduzidas por mim para facilitar a compreensão de algumas passagens. As Notas de rodapé de Coulomb são representadas por [Nota de Coulomb:]. Já as Notas de Alfred Potier (1840-1905), editor das obras de Coulomb publicada em 1884, são representadas por [Nota de Potier:]. Todas as outras Notas de rodapé foram acrescentadas por mim.

As principais biografias de Coulomb, discutindo detalhadamente suas obras, foram escritas por Charles Stewart Gillmor.[2] Christine Blondel, Bertrand Wolff e John Heilbron também fizeram estudos importantes sobre a vida de Coulomb e sobre vários de seus trabalhos.[3]

---

[1] [Potier, 1884].

[2] [Gillmor, 1971b] e [Gillmor, 1971a].

[3] [Blondel and Dörries, 1994], [Heilbron, 1999, págs. 468-477 e 494-500], [Blondel and Wolff, 2007], [Blondel and Wolff, 2008a], [Blondel and Wolff, 2008b], [Blondel and Wolff, 2009], [Blondel and Wolff, 2011c], [Blondel and Wolff, 2011e], [Blondel and Wolff, 2011d], [Blondel and Wolff, 2011b], [Blondel and Wolff, 2011a], [Blondel and Wolff, 2011f], [Blondel and Wolff, 2013d], [Blondel and Wolff, 2013a], [Blondel and Wolff, 2013b], [Blondel and Wolff, 2013e], [Blondel and Wolff, 2013c], [Blondel and Wolff, 2014] e [Blondel and Wolff, 2015].

1.1 Minhas Motivações ao Fazer Essa Tradução Comentada

Minha primeira motivação vem da importância da obra de Coulomb. Sua força entre corpos eletrizados é citada em praticamente todos os livros de eletricidade. Uma força análoga que obteve atuando entre polos magnéticas também é citada em alguns trabalhos. Apesar disso, poucos de seus artigos foram integralmente traduzidos para outros idiomas. Entre 1788 e 1793 publicou um conjunto de 7 Memórias contendo suas pesquisas mais célebres sobre eletricidade e magnetismo. Sua primeira Memória foi totalmente traduzida apenas para o alemão e o inglês.[4] Só tenho conhecimento de traduções completas de três de suas outras 7 Memórias para o alemão.[5] Fora isso conheço apenas algumas traduções parciais para o inglês que serão citadas nos Capítulos apropriados. Não tenho conhecimento de nenhuma tradução completa para o português de qualquer de suas obras. Essa tradução comentada que apresento aqui vem suprir essa carência.

Uma outra motivação está relacionada às minhas concepções filosóficas e às minhas principais linhas de pesquisa. Trabalho com a interação direta entre corpos afastados espacialmente, sem a utilização de conceitos tais como campo gravitacional, campo elétrico e campo magnético. Essa visão da física foi iniciada por Isaac Newton (1642-1727) com sua lei da gravitação universal na qual a força gravitacional entre as partículas é central, diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, seguindo o princípio de ação e reação. Em seguida foi ampliada por Coulomb ao lidar com a interação entre corpos eletrizados (força central proporcional ao produto das cargas elétricas dessas partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas) e com a interação entre polos magnéticos (força central proporcional ao produto das intensidades de polos magnéticos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles). Essa linha de pesquisa teve continuidade com a força entre elementos de corrente devida a André-Marie Ampère (1775-1836). Novamente há aqui uma força central apontando ao longo da reta que une os elementos de corrente e satisfazendo ao princípio de ação e reação. Ela é proporcional às intensidades de corrente elétrica nos dois elementos, aos seus tamanhos, sendo ainda inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Ela depende ainda do ângulo entre esses dois elementos, assim como dos ângulos entre cada um deles e a reta que os une. O coroamento dessa linha de pesquisa ocorreu com a eletrodinâmica de Wilhelm Weber (1804-1891). Nesse caso a força entre partículas eletrizadas depende não apenas da distância entre elas, mas também da velocidade relativa entre elas e da aceleração relativa entre elas. Novamente temos uma força central que segue o princípio de ação e reação. As forças de Newton, Coulomb, Ampère e Weber são ainda compatíveis com o princípio de conservação da energia.

Essa linha de pesquisa foi praticamente abandonada no ensino de física por mais de 100 anos, principalmente no que diz respeito às eletrodinâmicas de Ampère e de Weber, sendo adotada apenas a concepção devida a Faraday (1791-1867) e Maxwell (1831-1879) de campos elétricos e magnéticos. Com isso o próprio desenvolvimento de todo essa linha de pesquisa foi abandonado pela comunidade científica. Com o objetivo de tornar mais

[4][Coulomb, 1788b]. Traduções completas para o alemão em [Coulomb, 1890b] e para o inglês em [Coulomb, 2012a].

[5]Segunda Memória, [Coulomb, 1788d], com tradução em [Coulomb, 1890e]; terceira Memória, [Coulomb, 1788e], com tradução em [Coulomb, 1890a]; e a quarta Memória, [Coulomb, 1788c], com tradução em [Coulomb, 1890d].

conhecidas e difundidas as ideias fundamentais de Newton, Coulomb, Ampère e Weber, tenho feito um enorme esforço para traduzir e comentar suas obras. Já traduzi para o português os principais trabalhos de Newton como o livro *Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*[6] e o livro *Óptica*.[7] Publiquei juntamente com João Paulo M. d. C. Chaib traduções comentadas para o português e o inglês não apenas do primeiro artigo de Ampère sobre eletrodinâmica de 1820, mas também de sua obra-prima de 1826, *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos Deduzida Unicamente da Experiência*. Essas traduções foram publicadas em nosso livro *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*.[8] Editei com o auxílio de diversos colegas a tradução comentada do alemão para o inglês das principais obras de Weber. Essas traduções comentadas foram publicadas no livro *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*. Volume 1: Gauss and Weber's Absolute System of Units.[9] Volume 2: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday.[10] Volume 3: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity.[11] Volume 4: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation.[12] Nessa tradução comentada das obras de Weber incluímos ainda 5 artigos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), traduções de uma parte da correspondência entre Gauss e Weber, 1 artigo de Weber e Friedrich Wohler (1800-1882), 2 artigos de Weber e Rudolf Kohlrausch (1809-1858), 1 artigo de Gustav Theodor Fechner (1801-1887), 1 artigo de Johann Christian Poggendorff (1796-1877), 1 artigo de François Felix Tisserand (1845-1896), 2 artigos de Carl Neumann (1832-1925), assim como 3 artigos de Gustav Kirchhoff (1824-1887).

Com essa tradução comentada das principais obras de Coulomb espero tornar seu trabalho original conhecido para uma comunidade ampla de cientistas e estudantes. Com isso suas pesquisas e concepções filosóficas podem ser exploradas e aprofundadas por mais pesquisadores tanto do ponto de vista experimental quanto teórico.

[6][Newton, 1990], [Newton, 2008] e [Newton, 2010].

[7][Newton, 1996].

[8][Assis and Chaib, 2011] e [Assis and Chaib, 2015]. Ver também [Chaib, 2009].

[9][Assis (editor), 2021a].

[10][Assis (editor), 2021b].

[11][Assis (editor), 2021c].

[12][Assis (editor), 2021d]. Ver ainda [Weber and Kohlrausch, 2008].

Capítulo 2

Aviso da Sociedade Francesa de Física na Publicação das Memórias de Coulomb em 1884

Aviso[13]

O Conselho da Sociedade Francesa de Física, pela proposição do Sr. Joubert,[14] seu secretário geral, emitiu o parecer que seria oportuno publicar e estaria de acordo com as intenções dos fundadores da Sociedade, na medida em que houver disponibilidade de recursos, uma série de Memórias relativas à física, concentrando-se em reproduzir particularmente as Memórias publicadas ao redor de um século atrás e que tornaram-se difíceis de obter.

Na sessão de janeiro de 1883, a Sociedade aprovou essa proposição; ela decidiu, além disso, que a escolha das Memórias a publicar e a ordem de sua publicação seriam fixadas pelo Conselho; esse Conselho, considerando que as Memórias de Coulomb formam a base de nossos conhecimentos atuais sobre a eletricidade e o magnetismo, que a Coleção de Memórias da antiga Academia [Real de Ciências da França], onde foram inseridas as [Memórias] mais importantes, é pouco difundida, considerou que a publicação das Memórias de Coulomb deveria abrir essa série de reproduções. Embora os assuntos tratados nessas Memórias sejam variados, já que tratam da eletricidade, do magnetismo e da resistência dos fluidos, elas formam no entanto um conjunto no qual o método e o instrumento de medida são os mesmos; logo decidiu-se reuni-las, enquanto propõe, nos Volumes seguintes,[15] de reunir mais Memórias relativas a um assunto único escritas por autores diferentes.

A publicação do Volume atual foi confiada aos cuidados do Sr. Potier.

[13][Potier, 1884, págs. v-vi].

[14]Jules François Joubert (1834-1910).

[15]Os Volumes II e III foram publicados em 1885, editados por Joubert, tratando de Memórias sobre Eletrodinâmica, [Joubert, 1885a] e [Joubert, 1885b].

Capítulo 3

Introdução de Alfred Potier à Publicação em 1884 das Memórias de Coulomb

Por A. Potier[16]

Coulomb (Charles-Augustin de) nasceu em 14 de junho de 1736, em Angoulême, de uma família de magistrados. Demonstrou em sua juventude um interesse muito decidido pelas ciências matemáticas, entra no corpo de engenharia militar e foi enviado para a Martinica, onde permanece por nove anos. A respeito dos diversos trabalhos que teve de executar, a ocasião apresentou-se para ele de estudar várias questões de mecânica aplicada às construções. Seus trabalhos lhe valeram o título de Correspondente da Academia de Ciências.

Ele retorna à França e, em 1779, divide com Van Swinden[17] o prêmio proposto pela Academia para a melhor construção de bússolas; em 1781, ganhou o prêmio proposto por sua teoria das máquinas simples; é neste trabalho que se encontram suas experiências clássicas sobre o atrito.[18]

Chamado a Paris em 1781, foi nomeado Membro da Academia e se ocupa ativamente das leis do magnetismo e da eletricidade; foi durante o período de 1784-1789 que escreveu as Memórias fundamentais sobre as leis da torção, as leis das ações elétricas e magnéticas, assim como a distribuição da eletricidade e do magnetismo.

Quando ocorreu a Revolução, era tenente-coronel do corpo de engenharia do exército, administrador geral dos mananciais franceses e superintendente na Administração de Planos e Relevos. Pediu demissão de todos esses empregos. A Academia havia sido suprimida; ele havia sido excluído da Comissão de Pesos e Medidas, da qual era membro; forçado finalmente a deixar Paris pela lei que expulsou todos os nobres, ele se retira, seguido de seu amigo Borda,[19] para as redondezas de Blois. Ele retornou a Paris quando da criação do Instituto,[20] sendo nomeado Inspetor Geral dos Estudos. Sua saúde já estava abalada por um longo tempo quando faleceu em 23 de agosto de 1806.[21]

---

[16] [Potier, 1884, págs. vii-xiii]. Coloquei nas Notas de rodapé algumas informações adicionais em relação ao texto de Potier.

[17] Jan Hendrik van Swinden (1746-1823).

[18] Ver, por exemplo, [Coulomb, 1821].

[19] Jean-Charles de Borda (1733-1799).

[20] A *Académie des Sciences* foi abolida em 1793, sendo sucedida pelo *Institute de France* em 1795.

[21] A melhor biografia de Coulomb contendo um estudo detalhado de suas obras foi escrita por Gillmor,

Delambre,[22] ao pronunciar seu discurso fúnebre em 1807, anunciou que as obras de Coulomb seriam publicadas, que havia sido encontrado entre seus papéis uma Nota indicando a ordem na qual suas diferentes Memórias deveriam ser reunidas. Esse projeto, que cabia a Biot[23] concluir, não foi executado; mas sua realização não deixou de ser oportuna.

Sem dúvida o progresso da ciência, e particularmente da física matemática, fará com que pareçam pouco rigorosos e mesmo singulares certos raciocínios de Coulomb; mas as leis que deduziu dessas experiências são precisamente a razão de ser desse progresso. No que diz respeito ao magnetismo, Coulomb estabeleceu a lei das ações e repulsões; para a eletricidade, ele não apenas estabeleceu essas leis, mas demonstrou que a superfície interna de um condutor eletrizado não fica carregada de eletricidade, e que a densidade elétrica [na superfície externa] é em cada ponto proporcional à força;[24] a variação súbita da força elétrica, quando se passa de um ponto da própria superfície para um ponto exterior que esteja infinitamente próximo [da superfície], também não escapou de sua atenção. Finalmente, ele demonstrou a proporcionalidade com a velocidade da resistência dos fluidos provindo de sua viscosidade ou do atrito interno e descobriu as leis da elasticidade de torção. Portanto, não podemos recusar de dar a essas Memórias o título de fundamentais.

No que diz respeito especialmente à eletricidade, muito frequentemente reduz-se a obra de Coulomb à descoberta da lei das atrações e ao uso do plano de prova.[25] Atribui-se, por exemplo, a Biot a experiência que consiste em descarregar completamente uma esfera metálica, aprisionando-a no interior de um condutor formado de dois hemisférios móveis.[26] Contudo, essa experiência é descrita na sua Sexta Memória (1788), página 352 desse Volume,[27] [descrita] em tais termos que não se pode duvidar que Coulomb havia até mesmo variado as condições; ele indica que não é necessário que o invólucro tenha a forma do condutor interior. Ele retorna várias vezes (páginas 289 e 319)[28] a essa questão e se dedica a demonstrar que a ausência de eletricidade no interior do condutor é uma consequência da lei de repulsão. Sem dúvida sua demonstração não é rigorosa, mas Poisson,[29] em 1812, ainda não conhecia a demonstração clássica dos dias de hoje.

Também se encontrará, nas Memórias de Coulomb, todos os elementos da demonstração da proporcionalidade da força em um ponto [na superfície] do condutor em relação à densidade [superficial de eletricidade] nesse ponto; ele fornece inicialmente na [Sexta] Memória de 1788 (página 353 desse Volume)[30] o valor da atração de uma esfera uniformemente carregada sobre um ponto de sua superfície, e o valor da atração sobre um ponto externo, e multiplica

[Gillmor, 1971a], ver também [Gillmor, 1971b].

[22]Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749-1822).

[23]Jean-Baptiste Biot (1774-1862).

[24]Isto é, a força elétrica sobre um elemento de carga localizado na superfície de um condutor eletrizado em equilíbrio é proporcional à densidade superficial de carga nesse ponto.

[25]Uma descrição detalhada do plano de prova de Coulomb encontra-se na Seção 7.2 (coletores de carga) do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, [Assis, 2010b], [Assis, 2010a], [Assis, 2015b] e [Assis, 2017]; assim como na Seção 2.6 do Volume 2 do mesmo livro, [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

[26]A esfera metálica interior é descarregada ao entrar em contato com um dos hemisférios exteriores, ou ao ser ligada a esse hemisfério por meio de um fio condutor.

[27]No original, [Potier, 1884, pág. ix]: *dans son cinquième Mémoire (1788), page 233 de ce Volume.* Por um lapso Potier escreveu Quinta Memória, sendo que essa experiência específica está descrita na Sexta Memória de Coulomb. A página 233 do livro de Potier corresponde à página 352 dessa tradução. Ver, em particular, a Seção 20.4 da Sexta Memória.

[28]Páginas 178 e 205 do livro editado por Potier, [Potier, 1884].

[29]Siméon Denis Poisson (1781-1840).

[30]Correspondente à página 233 do livro editado por Potier, [Potier, 1884].

a densidade pelo valor 2π no primeiro caso e [pelo valor] 4π no segundo [caso];[31] além disso, na sua teoria do plano de prova (§XLIV e §XLV da mesma Memória), indica claramente que a ação de um corpo eletrizado sobre um ponto externo infinitamente próximo é o dobro da ação do elemento de superfície infinitamente próximo, ação que é dada por $2\pi y$, quando y é a densidade [superficial de carga].[32] Nos cálculos da Quinta e da Sexta Memória, Coulomb usa constantemente essas fórmulas; além disso, embora em nenhum lugar seja enunciado explicitamente o teorema a que estamos nos referindo, Sir W. Thomson[33] não hesita em dar o nome de *Teorema de Coulomb* a essa proposição de que a força elétrica, [atuando] em um ponto externo e infinitamente próximo de uma superfície condutora, é o produto por 4π da densidade superficial [de carga] nas vizinhanças desse ponto.[34]

Além das Memórias que reproduzimos, Coulomb deixou manuscritos que estiveram nas mãos de Biot, que os resumiu em seu *Traité de Physique* [*Tratado de Física*].[35] Julgamos inútil reproduzir a Memória na qual Coulomb examinou se os ímãs agem sobre outras substâncias além do ferro, aço, níquel e cobalto; sua conclusão é que traços de ferro, insensíveis à análise química, são suficientes para fornecer aos metais que estudou (ouro, prata, chumbo, cobre e estanho) o magnetismo que observou. Deixamos de lado, como sendo estranha ao fim a que se propôs a Sociedade de Física, uma *"Memória sobre a estática das abóbadas"*, as *"Pesquisas sobre as maneiras de executar sob a água todos os tipos de trabalhos hidráulicos, sem utilizar qualquer exaustão"*, sua *"Teoria das máquinas simples"*, e suas *"Pesquisas sobre os moinhos de vento"*.

Coulomb sempre se preocupou com o valor absoluto das forças que media; suas estimativas, nas Memórias anteriores a 1789, são fornecidas no sistema de medidas antigo; adicionamos, entre parênteses, após cada valor fornecido por Coulomb, o valor da quantidade medida em unidades do sistema (C.G.S.), ou seja, o número entre parênteses exprime os comprimentos em centímetros, as massas em gramas e as forças em dinas; aqui vão os elementos que foram utilizados para esses cálculos:

1 toesa = 6 pés = 72 polegadas = 864 linhas = 194,9 cm.[36]
1 libra = 16 onças = 9216 grãos (massa) = 489,5 g.[37]
1 libra = 16 onças = 9216 grãos (força) = 480200 dinas.[38]

---

[31] Ver as Notas de rodapé 664, 714 e 715 nas páginas 321, 353 e 353, respectivamente.

[32] Isto é, carga por unidade de área.

[33] William Thomson (1824-1907).

[34] Sobre o teorema de Coulomb ver ainda [Gillmor, 1971a, pág. 209], [Heilbron, 1999, págs. 495-496] e [Blondel and Wolff, 2011c].

[35] [Biot, 1816a], [Biot, 1816b], [Biot, 1816c] e [Biot, 1816d].

[36] Um pé inglês corresponde a 30,48 cm, já um pé de Paris usado nesse livro corresponde a 32,48 cm = 0,3248 m. A polegada inglesa moderna corresponde a 2,540 cm. Já a polegada de Paris usada nesse livro é equivalente a 2,707 cm = 0,02707 m. Uma linha inglesa corresponde a 0,212 cm. Já a linha de Paris usada nesse livro corresponde a 0,226 cm = 0,00226 m.

[37] Isto é, em termos de massa temos 1 libra $= 489,5\ g = 0,4895\ kg$; 1 onça $= 30,59\ g = 0,03059\ kg$ e 1 grão $= 0,05311\ g = 5,311 \times 10^{-5}\ kg$.

[38] Isto é, em termos de força temos 1 libra $= 480200 \times 10^{-5}$ newtons $= 4,80200$ N; 1 onça $= 0,300125$ N; e 1 grão $= 5,2105 \times 10^{-4}$ N.

Coulomb representa a razão da circunferência para o diâmetro, às vezes por $c/2$, às vezes por $\varphi/2$, às vezes por $180°$;[39] para ficar de acordo com o uso moderno, sempre representamos essa razão por π, e essa letra não foi utilizada para nenhum outro fim; reservamos a utilização do símbolo $\int$ para as expressões onde entram as diferenciais.[40] Também utilizamos a^2, R^2, ..., em vez de aa, RR. Quando, para evitar repetições, consideramos que devíamos suprimir uma parte do texto de Coulomb, sempre indicamos isso por notas com caracteres pequenos;[41] o mesmo caractere foi utilizado para as observações que o texto sugere; por outro lado, foi conservada a numeração dos parágrafos ou Seções.

Quanto às figuras, que formam gravuras separadas nas Memórias da Academia, reproduzimos um certo número delas sobre a madeira, e as inserimos no texto, particularmente as figuras puramente geométricas. As Gravuras I a VII são reproduções fotográficas feitas sobre o zinco das gravuras das *Memórias da Academia*; as figuras da Memória de 1789, para satisfazer às exigências de formato, tiveram de ser agrupadas de forma diferente; elas foram gravadas no cobre pelo Sr. Pérot, que reproduziu o caractere com tanta fidelidade quanto a fotografia; elas formam a Gravura VIII.

Nos pareceu útil relacionar as experiências de Coulomb com os resultados dos cálculos de Poisson, relativos à distribuição da eletricidade sobre duas esferas condutoras e à repartição da eletricidade entre essas duas esferas, quando são colocadas em contato. Portanto, ao lado dos números obtidos por Coulomb, colocamos os valores que Poisson deduziu de seus cálculos e que são, em uma certa medida, como muitas verificações da lei fundamental.

O trabalho de Poisson está inserido nas Memórias do Instituto para o ano de 1811, embora só tenham sido lidas nos dias 19 de maio e 3 de agosto de 1812 para a primeira parte, e em 6 de setembro de 1813 para a segunda parte.[42]

Ao adotar a análise de Laplace[43] para a atração de esferoides, Poisson exprime que a distribuição sobre a superfície de um elipsoide deve ser tal que a força e, como resultado, as três derivadas parciais da função $V = \sum \frac{m}{r}$ devem ser nulas no interior desse elipsoide ou, de acordo com a linguagem atual, que o potencial seja constante no interior; mas ele resolve esse problema apenas para um elipsoide um pouco diferente que uma esfera e recai na solução conhecida, que a camada elétrica deve estar contida entre dois elipsoides semelhantes; calcula então, desprezando o quadrado da excentricidade, a força exercida sobre uma massa elétrica infinitamente próxima da superfície externa, encontrando-a proporcional à espessura.

> "É natural pensar", diz ele,[44] "que este resultado é geral, e que ele também ocorre sobre a superfície de um corpo condutor de forma arbitrária; mas, embora essa proposição pareça muito simples, contudo seria muito difícil demonstrá-la por meio de

[39]Ver, por exemplo, as Notas de rodapé 223, 282 e 905 nas páginas 117, 148 e 449, respectivamente.

[40] Em particular, Potier substituiu em vários lugares das obras de Coulomb o símbolo $\int$ de integração utilizado por Coulomb pelo símbolo de somatória, $\sum$. Nessa tradução para o português mantive o símbolo $\int$ de integração utilizado por Coulomb.

[41]Foram incluídas nessa tradução em português as partes dos textos originais de Coulomb que haviam sido suprimidas por Potier na reedição de suas obras em 1884. Ou seja, todos os artigos apresentados aqui foram integralmente traduzidos para o português. Quando Potier acrescentou algumas frases escritas por ele mesmo no meio do texto de Coulomb, optei por colocar as frases de Potier como uma Nota de rodapé indicada por [Nota de Potier:].

[42][Poisson, 1812a], [Poisson, 1812b], [Poisson, 1813] e [Poisson, 1814].

[43]Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

[44][Poisson, 1812a, pág. 232].

fórmulas para a atração dos esferoides; sendo um desses casos nos quais devemos suprir a imperfeição da análise por alguma consideração direta".

De fato, ele expõe uma demonstração desse teorema, que lhe foi comunicada por Laplace, e que é apenas a reprodução, em termos mais rigorosos, das considerações utilizadas por Coulomb.

Assim como Coulomb, ele estabelece que a ação de um condutor sobre um ponto externo infinitamente próximo [da superfície] é o dobro da ação da porção da superfície infinitamente vizinha, que é suposta limitada por um plano paralelo ao plano tangente. Mas um condutor esférico, uniformemente carregado, da qual fizesse parte essa superfície infinitamente pequena, exerceria uma repulsão $4\pi y$, onde y designa a densidade [superficial de carga]. Essa força é independente do raio da esfera. Podemos imaginar para a normal tantos planos quanto se quiser, separados por ângulos diedros ε, e substituir cada elemento da superfície do condutor por um elemento considerado sobre uma esfera de raio conveniente; a componente normal da atração desse elemento é, portanto, $\frac{\varepsilon}{2\pi} \times 2\pi y = \varepsilon y$, qualquer que seja o raio da esfera. A atração total da superfície infinitamente pequena, limitada por um plano paralelo ao plano tangente, será então $y \sum \varepsilon$ ou $2\pi y$, e a força elétrica total será $4\pi y$.

A constância do potencial no interior do condutor e a proporcionalidade entre a densidade [superficial de carga] e a força, ou a derivada do potencial obtida ao longo da normal à superfície do condutor, são os dois únicos teoremas utilizados por Poisson; nessa época, ele ainda não havia demonstrado que a ausência de eletricidade no interior dos corpos condutores, em equilíbrio elétrico, é uma consequência da lei fundamental.

A questão da atração ou da repulsão entre duas esferas eletrizadas está ligada intimamente à questão da distribuição [de cargas nas superfícies das duas esferas]; ela apresenta um interesse prático do ponto de vista da medida das quantidades de eletricidade ou dos potenciais. Poisson não se ocupou disso, mas deduzimos facilmente de suas fórmulas a maneira de calcular a ação recíproca entre duas esferas.

Achamos que ao inserir, após a reprodução das Memórias de Coulomb, uma Nota resumindo a Memória de Poisson, que está pouco disseminada, juntamente com os trabalhos mais recentes de Sir W. Thomson sobre o mesmo assunto, não nos afastaríamos do objetivo proposto pela Sociedade Francesa de Física. Sir W. Thomson supõe como conhecidos alguns teoremas gerais, que são clássicos hoje em dia e que se encontram demonstrados nos Tratados gerais de Física, assim como nos Tratados especializados; julgamos inútil reproduzir a demonstração desse teoremas. O leitor que quiser estudar essa questão deve consultar, além do *Reprint of Papers* de Sir W. Thomson,[45] as Memórias do Sr. Plana, no VII° Volume da segunda série das *Memórias da Academia de Turin*;[46] essas duas obras contêm Tabelas numéricas, que podemos reconstruir por meio das fórmulas dadas nos *Anexos*.[47]

[45][Thomson, 1884].

[46][Plana, 1845] e [Plana, 1854].

[47]Esses anexos resumindo os trabalhos teóricos de Poisson e Thomson não foram incluídos nessa tradução em português.

Capítulo 4

O Contexto das Pesquisas de Coulomb

4.1 Pesquisas Elétricas

Na época de Coulomb existiam dois sistemas ou conjuntos de ideias principais para explicar os fenômenos elétricos.

Um desses sistemas era baseado em forças atrativas e repulsivas atuando à distância entre os corpos eletrizados, em analogia à lei da gravitação universal de Isaac Newton (1642-1727). Ele era baseado nas ideias de Newton apresentadas em suas principais obras, a saber, nos *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*,[48] e na *Óptica*.[49] Nesse modelo os corpos eletrizados atuam diretamente entre si, sem a intermediação de qualquer agente material entre eles.

Dentro do sistema newtoniano existiam dois sub-sistemas. Um desses sub-sistemas assumia a existência de dois tipos ativos de eletricidade (ou de dois fluidos elétricos ativos). Ele foi introduzido por Charles F. d. C. Du Fay (1698-1739) e Robert Symmer (c. 1707-1763), entre outros.[50] Originalmente Du Fay denominou de vítrea e resinosa aos dois tipos de eletricidade, acreditando que estavam ligadas aos materiais nos quais esses fenômenos foram inicialmente percebidos. Com o avanço das pesquisas por outros pesquisadores percebeu-se que um mesmo tipo de material poderia ser eletrizado com os dois tipos de eletricidade, dependendo do material com o qual era atritado. Hoje em dia o que era chamado de eletricidade vítrea é denominado de eletricidade positiva ou de corpo eletrizado positivamente. Já a eletricidade resinosa é denominada de eletricidade negativa ou de corpo eletrizado negativamente. Du Fay ainda descobriu o princípio de que corpos eletrizados com o mesmo tipo de eletricidade se repelem, enquanto que corpos eletrizados com tipos opostos se atraem.

No outro sub-sistema newtoniano assume-se a existência de um único tipo de eletricidade (ou a existência de apenas um fluido elétrico). Esse segundo sub-sistema newtoniano é devido

[48] [Newton, 1990], [Newton, 2008] e [Newton, 2010].

[49] [Newton, 1996] e [Assis, 1998b].

[50] [Du Fay, 1733], [Du Fay, 1734] com tradução para o português em [Boss and Caluzi, 2007]; [Symmer, 1759] e [Mitchell, 1759].

Ver também as Seções 4.3 (Du Fay reconhece a repulsão elétrica como um fenômeno real) e 5.2 (Du Fay descobre dois tipos diferentes de eletricidade) de [Assis, 2010b], [Assis, 2010a], [Assis, 2011], [Assis, 2015b] e [Assis, 2017]; assim como a Seção 1.2 (a série triboelétrica) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019]. Ver ainda [Fontenelle, 1741], [Heilbron, 1976], [Aepinus, 1979, págs. 198-202], [Heilbron, 1979], [Heilbron, 1981b], [Heilbron, 1982], [Borvon, 1994], [Heilbron, 1999], [Borvon, s d], [Borvon, 2009] e [Blondel and Wolff, 2012].

a Benjamin Franklin (1706-1790).[51] Vários termos utilizados hoje em dia na eletricidade são devidos a Franklin tais como "mais e menos" ou "positivo e negativo". Franklin foi um dos principais responsáveis pelo estabelecimento e utilização da lei de conservação da eletricidade (ou da lei de conservação das cargas elétricas). Os termos que utilizava para designar as partículas elétricas (ou partículas eletrizadas) eram "fogo elétrico", "matéria elétrica" e "fluido elétrico". Ele trabalhava com a teoria de um único fluido elétrico, em vez de dois tipos distintos de eletricidade. Acreditava que havia uma quantidade ou densidade normal deste fluido nas substâncias. Quando um corpo estivesse eletrizado positivamente, seria devido ao fato de possuir mais fluido elétrico do que a quantidade normal, ou seja, um excesso em relação à densidade normal de fluido. Da mesma forma, quando estivesse eletrizado negativamente, seria por possuir uma quantidade menor de fluido do que a quantidade normal, ou seja, uma escassez ou deficiência em relação à densidade normal. Com sua concepção de conservação da eletricidade, Franklin enfatizava que ela não era criada, gerada ou produzida no atrito entre duas substâncias, nem em qualquer outro processo de eletrização. A única coisa que ocorria durante o atrito era uma redistribuição ou transferência de partículas eletrizadas ou de carga elétrica. Isto é, um dos corpos recebia a mesma quantidade de fluido elétrico que o outro havia perdido.

Hoje em dia adotamos a nomenclatura de Franklin, mas trabalhando com um paradigma diferente, a saber, aceitando a existência de dois tipos distintos de eletricidade ou de cargas elétricas. Nessa visão ainda aceitamos a conservação da eletricidade. Só que agora dizemos que em qualquer processo de eletrização a partir de dois corpos neutros, o que ocorre é que um desses corpos fica eletrizado com um tipo de eletricidade, enquanto que o outro fica eletrizado com a mesma quantidade de eletricidade, mas do tipo oposto.

Franklin assumia ainda que haveria repulsão entre dois fluidos elétricos (ou entre duas partículas de matéria elétrica). Haveria também uma atração entre o fluido elétrico e a matéria comum. Essa matéria comum seria um corpo de qualquer natureza (água, vidro, metal, madeira, etc.). Quando há uma quantidade normal de fluido elétrico difundido na matéria comum, esse conjunto (matéria comum junto com o fluido elétrico) não vai atuar eletricamente sobre outro conjunto nesse estado. Dois corpos eletrizados positivamente vão se repelir devido ao excesso de fluido elétrico em cada um deles. O modelo de Franklin leva a uma suposição singular. Sabe-se que existe repulsão não apenas entre dois corpos eletrizados positivamente, mas também entre dois corpos eletrizados negativamente. Na suposição de Franklin um corpo eletrizado negativamente possui menos fluido elétrico do que a quantidade normal. Logo, para explicar com o modelo de Franklin a repulsão entre dois corpos eletrizados negativamente, era necessário assumir a repulsão entre duas partículas de matéria comum, ou seja, entre dois corpos materiais quaisquer. Por exemplo, era necessário assumir a existência de uma repulsão entre dois pedaços de metal, entre um pedaço de metal e um pedaço de vidro, entre dois pedaços de vidro, etc. Essa suposição singular do modelo de Franklin sempre incomodou a diversos pesquisadores, já que parece ir contra a teoria da gravitação universal de Newton de acordo com a qual matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância entre elas. Heilbron, por

[51][Franklin, 1769], [Franklin, 1904], [Franklin, 1941], [Cohen, 1966], [Cohen, 1996], [Heilbron, 1999, Cap. XIV], [Morse, 2004b], [Morse, 2004a], [Silva and Pimentel, 2006], [Silva and Pimentel, 2008], [Blondel and Wolff, 2013c], [Moura and Bonfim, 2017], [Moura, 2018], [Moura, 2019] e [Moura, 2020]. Ver ainda a Seção 11.7 (Gray, Franklin, o poder das pontas e a natureza elétrica dos raios e relâmpagos) do Volume 2 do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

exemplo, discutiu em vários pontos de seu livro como diversos pesquisadores tentaram lidar com a repulsão menos-menos no sistema de Franklin, isto é, com a repulsão entre dois corpos eletrizados negativamente.[52]

Entre os pesquisadores que adotaram a concepção de Franklin que assumia a existência de um único fluido elétrico estava Franz Ulrich Theodor Aepinus (1724-1802), um cientista alemão que trabalhou por muito anos na Rússia e que realizou muitas pesquisas originais sobre eletricidade e magnetismo. Sua obra principal foi publicada em 1759, *Ensaio sobre a Teoria da Eletricidade e do Magnetismo*.[53] Aepinus foi um dos pesquisadores que influenciou a Coulomb e que é citado em seus trabalhos.

O outro sistema ou conjunto de ideias para explicar os fenômenos elétricos era baseado no contato entre corpos materiais, com as atrações e repulsões elétricas sendo explicadas por impulsos mecânicos ocasionados pela colisão de fluidos ou partículas contra os corpos eletrizados. Nesse caso os corpos eletrizados não interagiriam diretamente entre si, sendo a interação transmitida por fluidos ou partículas emitidas e absorvidas por esses corpos.

Vários modelos diferentes foram propostos ao longo do tempo para explicar por contato a interação entre dois corpos eletrizados que estão afastados entre si. Em geral eles eram baseados em algum mecanismo ou por contato mecânico (isto é, assumindo a existência de outros corpos ou partículas além dos dois corpos eletrizados). Alguns desses modelos assumiam a existência de eflúvios materiais emitidos pelos corpos eletrizados. Esses eflúvios ou emanações, ao entrarem em contato com um outro corpo eletrizado, de alguma maneira exerceriam forças atrativas ou repulsivas nesse corpo. Esses eflúvios poderiam ser um feixe de partículas materiais ou corpúsculos emitidos e absorvidos por corpos eletrizados. Em outros modelos haveriam vórtices ou turbilhões de matéria circulando ao redor dos corpos eletrizados. Esses vórtices é que exerceriam forças em outros corpos eletrizados ao haver um contato entre esses vórtices e os outros corpos eletrizados. Em outro modelo haveria uma atmosfera material ao redor de cada corpo eletrizado. Um outro corpo, ao estar localizado na atmosfera do primeiro corpo, poderia sentir uma força atrativa ou repulsiva exercida por essa atmosfera. Ainda em outros modelos os corpos eletrizados emitiram um filamento ou alguma matéria grudenta que exerceria forças atrativas em outros corpos ao entrar em contato com eles.

Não entrarei em detalhes sobre os diversos autores que apresentaram esses modelos materiais já que eles são em grande número e há uma diversidade muito grande entre seus modelos. Para as pessoas interessadas recomendo os excelentes trabalhos de J. L. Heilbron e R. W. Home.[54]

Em suas pesquisas Coulomb sempre posicionou-se contrariamente às concepções de eflúvios elétricos e atmosferas elétricas para explicar por contato mecânico os fenômenos elétricos.[55] Nesse sentido ele continuou as pesquisas de John Michell (1724?-1793), Aepinus e Johan Carl Wilcke (1732-1796) a favor do sistema newtoniano baseado em forças atrativas e repulsivas de ação a distância para explicar os fenômenos elétricos e magnéticos.[56]

[52] [Heilbron, 1999, págs. 337, 356-357, 372, 377-378, 387-389, 396, 446].

[53] [Aepinus, 1759] com tradução para o inglês em [Aepinus, 1979]. Ver também [Heilbron, 1981a] e [Blondel and Wolff, 2013c].

[54] [Heilbron, 1979], [Heilbron, 1981c], [Heilbron, 1982], [Heilbron, 1999]; [Aepinus, 1979, págs. 3-224], [Home, 1981] e [Home, 1992].

[55] [Gillmor, 1971a, págs. 193-196, 205 e 214-219], [Gillmor, 1971b], [Aepinus, 1979, págs. 215-217], [Heilbron, 1999, págs. 95-96] e [Blondel and Wolff, 2011a].

[56] [Michell, 1750], [Michell and Canton, 1752], [Aepinus, 1759] com tradução para o inglês em [Aepinus, 1979], [Wilcke, 1766]. Ver também [Grozier, 2013].

Além de sempre se posicionar favoravelmente ao sistema newtoniano, Coulomb mantinha que tanto o sistema de dois fluidos quanto o sistema de um único fluido explicavam igualmente bem todos os fenômenos elétricos. Apesar disso, colocou-se favoravelmente ao sistema de dois fluidos. Por exemplo, em sua Sexta Memória sobre eletricidade e magnetismo afirmou o seguinte na Seção 20.40 em que discute os dois tipos de eletricidade:

> Qualquer que seja a causa da eletricidade, explicaremos todos os fenômenos, e o cálculo estará de acordo com os resultados das experiências, ao supor dois fluidos elétricos, as partículas do mesmo fluido se repelindo em razão inversa do quadrado das distâncias, e atraindo as partículas do outro fluido na mesma razão inversa do quadrado das distâncias. Essa lei foi encontrada pela experiência para a atração e a repulsão elétrica, na Primeira e na Segunda Memória sobre eletricidade, *volume de 1785 da Academia*.[57] De acordo com essa suposição, os dois fluidos nos corpos condutores tendem sempre a se reunir até que haja equilíbrio, isto é, até que através de sua reunião, as forças atrativas e repulsivas se compensem mutuamente. É nesse estado que se encontram todos os corpos em seu estado natural. Mas caso por uma operação qualquer, fizermos passar para um corpo isolado, uma quantidade em excesso de um dos fluidos elétricos, ele ficará eletrizado, isto é, ele repelirá as partículas elétricas de mesma natureza e atrairá as partículas elétricas de uma natureza diferente do fluido em excesso com o qual está carregado. Caso o corpo condutor eletrizado seja colocado em contato com um outro corpo condutor isolado, eles dividirão entre si o fluido elétrico em excesso nas proporções indicadas nessa Memória e nas Memórias anteriores. Porém, caso ele entre em comunicação com um corpo não isolado,[58] ele perderá instantaneamente toda sua eletricidade, já que ela será dividida com o globo terrestre, cujas dimensões em relação a ele são infinitas.
>
> O Sr. Aepinus supôs na teoria da eletricidade,[59] que existe apenas um único fluido elétrico cujas partículas se repelem mutuamente e que eram atraídas pelas partículas dos corpos com a mesma força com que elas se repelem. Porém, para explicar o estado dos corpos em sua situação natural, assim como a repulsão nos dois tipos de eletricidade, ele foi obrigado a supor que as moléculas dos corpos se repelem mutuamente com a mesma força com a qual elas atraem as moléculas elétricas, e que essas moléculas elétricas se repelem entre si. É fácil de perceber que a suposição do Sr. Aepinus fornece, quanto ao cálculo, os mesmos resultados que a suposição de dois fluidos. Prefiro a suposição de dois fluidos que já foi proposta por vários físicos, já que me parece contraditório admitir ao mesmo tempo nas partículas dos corpos uma força atrativa em razão inversa do quadrado das distâncias demonstrada pelo peso universal,[60] e uma força repulsiva na mesma razão inversa do quadrado das distâncias; força essa que seria necessariamente infinitamente grande em relação à ação atrativa de onde resulta o peso.
>
> Além disso, a suposição de dois fluidos está de acordo com todas as descobertas modernas dos químicos e físicos, as quais nos fizeram conhecer gases diferentes cuja combinação em certas proporções destrói a elasticidade de maneira repentina e total; efeito esse que não pode ocorrer sem que exista qualquer coisa de equivalente a

[57]Ver os Capítulos 10 e 12.
[58]Ou seja, caso ele seja aterrado ao entrar em contato com um corpo condutor ligado à Terra.
[59]Ver a Nota de rodapé 147 e [Aepinus, 1759] com tradução para o inglês em [Aepinus, 1979].
[60]No original: *par la pesanteur universelle*. Ou seja, pela gravitação universal proposta por Isaac Newton.

uma repulsão entre as partículas do mesmo gás que constitui seu estado elástico, e a uma atração entre as partículas de gases diferentes que os faça perder de maneira repentina sua elasticidade.

Como essas duas explicações possuem apenas um grau de probabilidade maior ou menor, advirto, para deixar a teoria que vai seguir livre de toda disputa sistemática, que na suposição de dois fluidos elétricos, tenho apenas a intenção de apresentar com o menor número de elementos possíveis os resultados do cálculo e da experiência, e não de indicar as verdadeiras causas da eletricidade. Retornarei no fim do meu trabalho sobre eletricidade ao exame dos principais sistemas aos quais os fenômenos elétricos deram origem.

4.2 A Terminologia Elétrica de Coulomb

Nessa Subseção apresento alguns outros termos que Coulomb utilizou para se referir aos fluidos elétricos.

Na Segunda e na Terceira Memória Coulomb utilizou as expressões "massa elétrica", "massa do fluido elétrico" e "massa de eletricidade" para se referir à quantidade total de carga em uma bola eletrizada.[61] Certamente essa denominação foi influenciada pela lei da gravitação universal de Newton de acordo com a qual a força gravitacional é proporcional ao produto das massas dos dois corpos que estão interagindo.[62] As mesmas denominações vão ser usadas em outros trabalhos.[63]

Já uma partícula eletrizada (ou partícula elétrica) é algumas vezes denominada de "molécula elétrica" (*molécule électrique*) ou de "*partie électrique*" em francês.[64]

Muitas vezes Coulomb vai se referir à "densidade elétrica" ou à "densidade do fluido elétrico" de um corpo ou de uma molécula elétrica.[65] Em alguns casos esse conceito de densidade elétrica ou de densidade do fluido elétrico corresponde ao que chamamos de quantidade de carga do corpo ou de cada partícula eletrizada. Na Quinta e na Sexta Memória ele vai estudar a distribuição de carga na superfície de corpos condutores. Nesses casos em geral essas expressões (densidade elétrica ou densidade do fluido elétrico) vão se referir à densidade superficial de carga, isto é, à quantidade de carga por unidade de área em cada ponto da superfície desses condutores.

4.3 Alguns Conceitos Básicos do Magnetismo

O meridiano geográfico de um local, chamado simplesmente de meridiano, é um semicírculo máximo passando pelo local e que contenha os polos N e S de rotação diária da Terra em relação ao conjunto de estrelas fixas.

Considere uma agulha imantada ns que é livre para girar em um plano horizontal ao redor de um eixo vertical passando por seu centro. Se ela for solta do repouso em uma orientação qualquer, em geral vai começar a oscilar ao redor de uma certa direção e vai apontar nessa

[61] Ver as Notas de rodapé 439, 441 e 557 nas páginas 220, 221 e 266. Ver ainda [Gillmor, 1971a, págs. 175, 187 e 191].

[62] [Newton, 2008, Livro III].

[63] Ver, por exemplo, as Notas de rodapé 580 e 712 nas páginas 276 e 353, respectivamente.

[64] Ver as Notas de rodapé 527, 773 e 770 nas páginas 247, 390 e 389, respectivamente.

[65] Ver, por exemplo, as páginas 247, 260 e 288.

direção quando atinge o estado de repouso em relação ao solo. Essa linha é chamada de meridiano magnético local. Por convenção denomina-se de polo Norte de uma bússola, n, à extremidade que aponta aproximadamente para o Norte geográfico. Vamos considerar semi-retas no plano horizontal obtidas a partir do centro da agulha. O ângulo φ entre o Norte da agulha, n, com essa direção indicada pela agulha, e a direção do ponto cardeal Norte do meridiano geográfico, N, com essa direção indicada pela semi-reta passando pelo centro da agulha e o polo Norte geográfico, é chamado de declinação magnética, Figura 4.1.

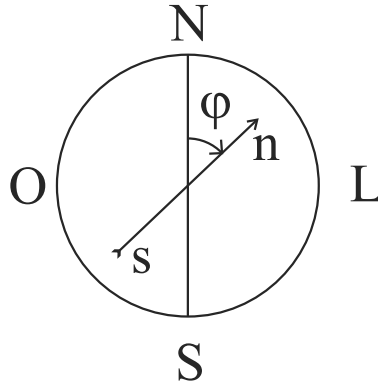



Figura 4.1: Declinação magnética.

Convenciona-se que esse ângulo φ é positivo quando o polo Norte da agulha tende para o Leste geográfico, ou seja, quando está deslocado no sentido horário. Já uma declinação negativa ocorre quando o Norte magnético da agulha tende para o Oeste geográfico, ou seja, quando está deslocado no sentido anti-horário. Por exemplo, a declinação magnética em Outubro de 2021 em São Paulo é de aproximadamente $-21°4'$, já em Paris é de $+1°2'$.

A declinação magnética sempre foi muito importante por sua utilização na navegação. Na época de Coulomb era conhecido que a declinação magnética em um mesmo local variava ao longo do dia e também ao longo do ano. Era importante conhecer esse fenômeno em maiores detalhes. Uma agulha apoiada sobre um pivô nem sempre aponta ao longo do verdadeiro meridiano magnético se houver um atrito grande no ponto de suspensão que impeça a agulha de se mover livremente. Um outro método de suspensão era dependurar a agulha por um fio vertical. Esse método já era conhecido por Francesco Lana Terzi (1631-1687) em 1686, Lous em 1773 etc.[66] Coulomb começou suas pesquisas magnéticas estudando a variação diária da declinação. Usou finos fios de suspensão feitos de seda. A própria influência da torção do fio pode fazer com que não se perceba corretamente a verdadeira declinação de uma bússola. Seus estudos sobre a força de torção (ou torque) dos fios de seda e mais tarde dos fios metálicos parecem ter se originado dessas pesquisas.

Uma agulha imantada ns que é livre para girar em um plano vertical ao redor de um eixo horizontal passando por seu centro de gravidade é chamada de bússola de inclinação, Figura 4.2.

Ela é utilizada com o eixo horizontal de rotação da agulha orientado perpendicularmente ao meridiano magnético local. Se essa agulha for solta do repouso em uma orientação qualquer, em geral vai começar a oscilar em um plano vertical ao redor de uma certa direção e vai apontar nessa direção quando atinge o estado de repouso em relação ao solo. O ângulo θ entre a direção apontando do centro da agulha até seu polo Norte, n, e o horizonte é chamado de inclinação magnética, Figura 4.3.

[66] [Gillmor, 1971a, págs. 141-142 e 162-165] e [Heilbron, 1999, págs. 185-192 e 469].

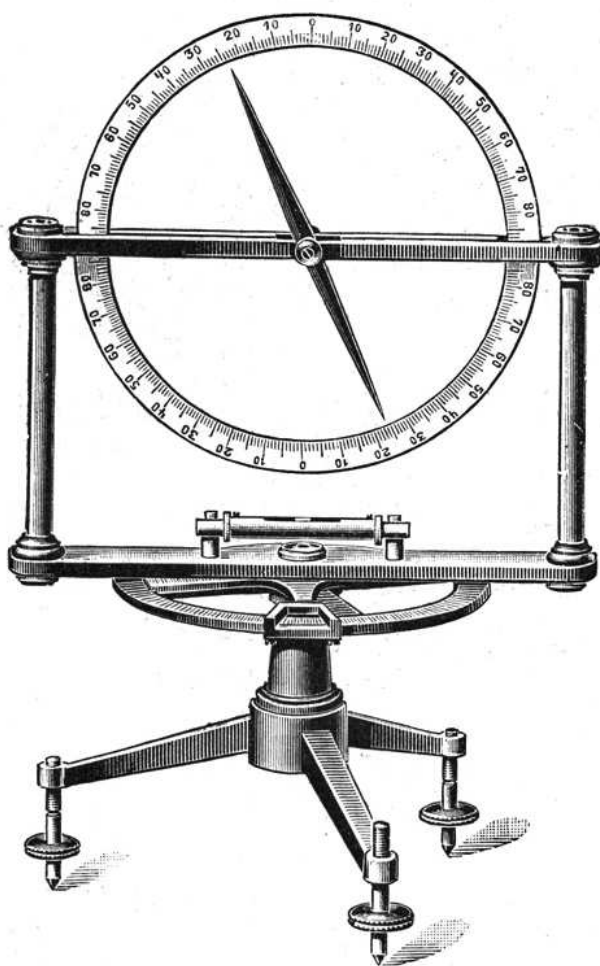



Figura 4.2: Bússola de inclinação, [Müller-Baden (Editor), 1905, Fig. 265].

Convenciona-se que esse ângulo θ é positivo quando o polo Norte da agulha aponta para baixo do horizonte. Já uma inclinação negativa ocorre quando o polo Norte da agulha fica acima do horizonte. Por exemplo, a inclinação magnética em Outubro de 2021 em São Paulo é de aproximadamente $-39,3^\circ$, já em Paris é de $+64,4^\circ$.

Tanto a declinação quanto a inclinação magnética variam de local para local sobre a superfície da Terra. Esses ângulos também sofrem pequenas variações em um mesmo local com a passagem do tempo. Ou seja, variam em função das horas, dias, meses ou anos.

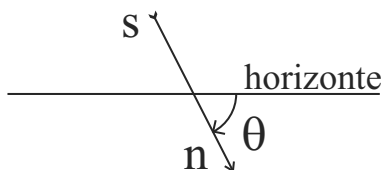



Figura 4.3: Inclinação magnética.

4.4 Pesquisas Magnéticas

Na época de Coulomb havia dois sistemas ou conjuntos de ideias principais para explicar os fenômenos magnéticos. O chamado sistema cartesiano era devido a René Descartes (1596-1650). Uma apresentação detalhada apareceu em seu livro *Princípios de Filosofia* publicado originalmente em latim em 1644. Uma tradução em francês foi publicada em 1647 sob a supervisão de Descartes.[67]

Entre outras coisas Descartes tenta explicar a interação entre dois ímãs que estão afastados entre si (ou a interação entre um ímã e um pedaço de ferro afastado do ímã) através de um mecanismo ou por contato mecânico. Ou seja, por uma ação devida ao contato e colisão entre corpos materiais. Para isso tinha de assumir a existência de outros corpos materiais (ou partículas) além dos dois ímãs que estavam afastados entre si. Ele assumia que existiriam fluxos de partículas passando por dentro de cada corpo imantado e circulando ao redor dele, formando vórtices. Ele acreditava que a Terra, os ímãs naturais, assim como o ferro imantado e o aço imantado teriam dois conjuntos de poros ou canais axiais ao longo de seus polos magnéticos. Um desses conjunto de canais aceitaria apenas partículas parafusadas para a direita (partículas com hélices para a direita, ou destras), enquanto que o outro conjunto aceitaria apenas partículas parafusadas para a esquerda (partículas com hélices para a esquerda, ou canhotas). Essas partículas descreveriam vórtices ou turbilhões, entrando nesses canais em uma extremidade dos corpos magnetizados, saindo pelas outra outra extremidade, circulando então ao redor do corpo até entrar novamente pela primeira extremidade. Um exemplo aparece na Figura 4.4.

Nesse caso a Terra é representada pela esfera central D. As partículas parafusadas ou espiraladas para a direita, por exemplo, entrariam pelo polo Sul, A, percorreriam o interior da Terra ao longo dos canais internos, saindo pelo polo Norte, B. Elas então dariam voltas ao redor da Terra até entrarem novamente por A. Elas poderiam, por exemplo, seguir a trajetória $ABFGEA$ ou a trajetória $ABFHEA$. Já as partículas parafusadas para a esquerda seguiriam o sentido contrário, ou seja, percorrendo o interior da Terra de B para A. Ao redor da Terra estão colocados vários ímãs esféricos, I, K, L, M e N. Essas partículas passariam pelos poros ou canais no interior desses ímãs e os orientariam ao colidirem com esses canais.

Os corpos não magnéticos ou aqueles que não podem ser imantados não teriam esses canais e dessa forma não reagiriam à presença da Terra ou à presença de ímãs em suas proximidades.

Na época de Coulomb essa teoria cartesiana do magnetismo ainda era muito popular. Em 1742 e 1744 a Academia Real de Ciências de Paris realizou uma competição para premiar as melhores explicações para o magnetismo (atração entre o ímã e o ferro, o alinhamento de uma bússola, sua declinação e inclinação). Como não houveram ganhadores, ela foi novamente apresentada em 1746. Os três ganhadores foram Leonhard Euler (1707-1783); Étienne François Dutour de Salvert (1711-1789), também conhecido como du Tour; Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jean Bernoulli, também conhecido como Johann Bernoulli.[68] Esses

[67] [Descartes, 1647] com tradução para o português em [Descartes, 1997] e [Descartes, 2002]. Ver também [Andrade, 2013].

[68] [Euler, 1752], [Du Tour, 1752] e [Bernoulli and Bernoulli, 1752]. De acordo com Home, [Aepinus, 1979, pág. 145], o trabalho conjunto entre os Bernoullis foi feito por Daniel e seu pai Jean I (1667-1748), também conhecido como Johann I. Já de acordo com Heilbron, [Heilbron, 1999, págs. 31, 88, 93 e 575], o trabalho foi feito por Daniel e seu irmão Jean II (1710-1790), também conhecido como Johann II. Na publicação os autores aparecem apenas como Daniel e Jean Bernoulli, não ficando claro se é Jean I ou Jean II,

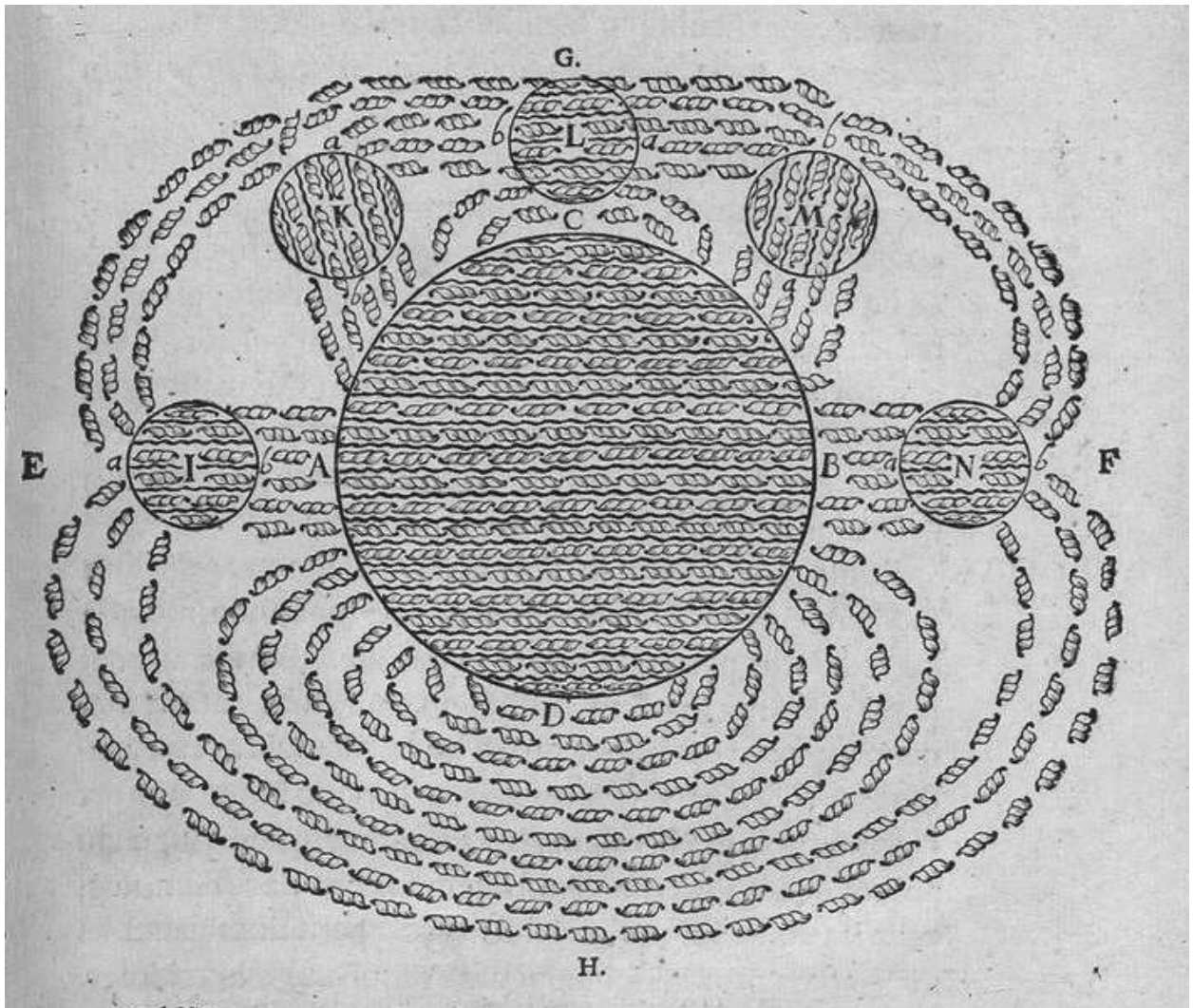



Figura 4.4: Vórtices de Descartes, [Descartes, 1647, Gravura XIX, fig. 1].

autores seguiam as ideias de Descartes de que o magnetismo seria devido a um vórtice de um fluido material que entraria nos ímãs por uma extremidade, saindo por outra. A interação entre um ímã e um pedaço de ferro, por exemplo, seria ocasionada pela pressão ocasionada por esse fluido ao empurrar ou colidir com os poros ou canais que existiriam no ferro. A interação entre dois ímãs ocasionando a orientação mútua, por exemplo, seria devida à ação dos turbilhões de fluido magnético de um ímã ao interagirem com os poros ou canais do outro ímã, e vice-versa. Já os materiais não magnéticos não teriam esses poros e, portanto, não sofreriam a ação de ímãs próximos. Uma discussão sobre esses sistemas cartesianos para explicar o magnetismo encontra-se na obra de Gillmor.[69]

O segundo principal sistema ou conjunto de ideias para explicar os fenômenos magnéticos na época de Coulomb era o chamado sistema newtoniano devido a Isaac Newton. Nesse sistema os fenômenos magnéticos são explicados por forças atrativas e repulsivas entre as partículas magnéticas. Essas forças atuariam diretamente à distância ao longo da linha reta que une as partículas, seguindo o princípio de ação e reação.

[Bernoulli and Bernoulli, 1752, pág. 115].

[69] [Gillmor, 1971a, págs. 176-177, 193-194, 214-219].

Dentro do sistema newtoniano havia dois sub-sistemas principais. Um deles assumia a existência de dois tipos de fluidos magnéticos. Um desses tipos era chamado de fluido austral, fluido magnético Sul ou simplesmente de fluido Sul. O outro era chamado de fluido boreal, fluido magnético Norte ou simplesmente fluido Norte. Fluidos de mesmo tipo se repelem e fluidos de tipos opostos se atraem. Entre os defensores desse sub-sistema newtoniano estavam Anton Brugmans (1732-1789) e Johan Carl Wilcke (1732-1796).[70]

O outro sub-sistema newtoniano foi adotado por Aepinus. Nesse sub-sistema assume-se a existência de um único tipo de fluido magnético. Ele era uma adaptação do sistema de um fluido elétrico estabelecido por Franklin. Nesse caso assume-se a existência de um único tipo de fluido magnético que repele outro fluido magnético, mas que atrai o ferro, o aço e seus compostos. Quando há uma quantidade normal ou natural desse fluido magnético no aço ou no ferro, então diz-se que esses materiais não estão imantados. Na imantação parte do fluido magnético fluiria para uma parte do aço, deixando a outra parte com uma quantidade menor de fluido do que a quantidade normal. Ele chamava de polo positivo à parte de uma lâmina de aço imantado na qual o fluido é abundante (tendo uma quantidade de fluido maior do que a normal), e de polo negativo à parte que foi esvaziada de fluido magnético (tendo uma quantidade de fluido menor do que a normal).

Como polos magnéticos de mesmo tipo se repelem e polos de tipos opostos se atraem, o sistema de um único fluido magnético de Aepinus leva a uma propriedade curiosa ou singular. Essa propriedade é a de que vai haver uma repulsão entre as partes negativas de duas lâminas de aço imantadas nas quais existe menos fluido magnético do que a quantidade normal. Ou seja, teria de haver uma força repulsiva entre partículas de ferro (ou entre partículas de compostos de ferro). Porém, de acordo com a teoria da gravitação universal de Newton, matéria atrai matéria. Logo essa propriedade do sistema de Aepinus era considerada um pouco estranha por ir contra a lei de Newton da gravitação. Essa violação incomodava a vários físicos, inclusive Coulomb.

Coulomb sempre se posicionou contrário ao sistema cartesiano (ou contrário aos sistemas análogos de Euler, Dutour de Salvert, Daniel Bernoulli e Jean Bernoulli).[71] Ele apresentou seus pontos de vista contrários ao sistema de vórtices e turbilhões para explicar o magnetismo em dois trabalhos principais. O primeiro é a Memória com o qual foi um dos ganhadores do prêmio da Academia de Ciências de 1777, publicado em 1780. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 5. Ver, em particular, a Seção 5.6. O segundo trabalho é sua Sétima Memória sobre eletricidade e magnetismo. Essa Sétima Memória dedicada essencialmente ao magnetismo foi publicada em 1793, estando traduzida no Capítulo 22. Ver, em particular, a Seção 22.25.

Em seu artigo de 1777, por exemplo, afirmou o seguinte:[72]

> Portanto, parece que resulta da experiência que não são os turbilhões que produzem os diferentes fenômenos magnéticos e que, para explicar esses fenômenos magnéticos, é necessário recorrer a forças atrativas e repulsivas da mesma natureza daquelas que somos obrigados a utilizar para explicar o peso dos corpos e a física celeste.

Além de atacar o sistema cartesiano, Coulomb defendeu o sistema newtoniano de explicar o magnetismo por forças atrativas e repulsivas. Inicialmente ele posicionou-se favoravelmente ao sub-sistema de Aepinus que assumia a existência de apenas um fluido magnético. Porém

---

[70] [Brugmans, 1765], [Wilcke, 1766], [Gillmor, 1971a, págs. 180 e 215-216] e [Aepinus, 1979, págs. 200, 209-210 e 216-217].

[71] [Gillmor, 1971a, págs. 177-179, 193, 214-215 e 218] e [Blondel and Wolff, 2011a].

[72] Ver a página 56 dessa tradução em português.

enfatizava que tanto o ponto de vista de Aepinus quanto os pontos de vista de Brugmans e Wilcke (que assumiam a existência de dois fluidos magnéticos) explicavam igualmente bem o conjunto de fenômenos magnéticos. Sua escolha final pelo sistema de dois fluidos ocorreu apenas após a publicação de sua Sétima Memória sobre eletricidade e magnetismo, em um artigo lido em 1799 e publicado em 1801. Esse artigo está publicado no Capítulo 24. Ele então expressou-se da seguinte maneira:[73]

> Resulta dessas experiências que, qualquer que seja a causa dos fenômenos magnéticos, todos esses fenômenos podem ser explicados e submetidos ao cálculo supondo nas lâminas de aço ou em suas moléculas, dois fluidos magnéticos, as partes de cada fluido repelindo-se em razão direta de suas densidades e em razão inversa do quadrado da distância entre eles, e atraindo as moléculas do outro fluido na mesma razão; de maneira que cada lâmina de ferro ou aço contém em cada molécula, antes de ser imantada, uma quantidade suficiente dos dois fluidos para se saturar ou se equilibrar mutuamente, tal que os dois fluidos assim reunidos não exercem mais qualquer ação um sobre o outro.

Ao ler os trabalhos de Coulomb e de outros pesquisadores dessa época sobre magnetismo pode-se perceber que eles assumiam que uma parte qualquer de um ímã ou de uma agulha de aço imantada podia conter um único tipo de fluido magnético. Isto é, essa parte podia ter mais fluido Norte do que fluido Sul (na suposição da existência de dois fluidos magnéticos) ou então essa parte podia estar magnetizada positivamente (na suposição da existência de apenas um fluido magnético, com essa parte tendo mais fluido do que a quantidade normal). Quando uma agulha de ferro ou de aço era imantada por um outro ímã, esses autores assumiam que o fluido magnético podia fluir ao longo da agulha, concentrando-se em uma parte e deixando uma outra parte com uma deficiência de fluido. Coulomb chega a estimar a distribuição de fluido magnético ao longo de uma agulha imantada, com a densidade de fluido variando de ponto a ponto ao longo da agulha. Se esse fosse o caso, seria possível ao quebrar um ímã no meio separar os dois fluidos magnéticos, com uma parte tendo um excesso de fluido Norte em relação ao fluido Sul (ou estando magnetizada positivamente com um excesso de fluido em relação à matéria comum na concepção da existência de apenas um único fluido magnético), enquanto que a outra parte teria um excesso de fluido Sul em relação ao fluido Norte (ou estando magnetizada negativamente com uma deficiência de fluido em relação à matéria comum na concepção da existência de apenas um fluido magnético). Logo, ao separar as duas metades desse ímã quebrado, a Terra poderia nesse caso exercer uma força resultante não nula ao atuar sobre uma dessas partes. Contudo, isso não ocorre na prática. Ou seja, de acordo com a experiência vem que qualquer pedaço de um ímã continua sofrendo apenas um par de forças iguais e opostas exercidas pela Terra, mas não uma força resultante. Desde 1269 com Petrus Peregrinus, também conhecido como Pierre de Maricourt, já se sabia que ao quebrar no meio um ímã em dois pedaços, cada pedaço torna-se um novo ímã contendo dois polos opostos.[74]

Em sua Sétima Memória Coulomb chama atenção para esse fato na Seção 22.29. Na Seção 22.30 ele então cria uma nova teoria do magnetismo baseada na polarização molecular, isto é, tal que o fluido Norte, por exemplo, não poderia fluir ao longo de uma agulha imantada, podendo se deslocar apenas no interior de cada molécula de aço da agulha, o

[73]Ver a página 471 dessa tradução, assim como [Gillmor, 1971a, pág. 216].
[74][Martins, 2017].

mesmo ocorrendo com o fluido Sul. Esses fluidos não poderiam passar de uma molécula para outra. No estado natural esses fluidos estariam juntos e a molécula não estaria imantada. Ao imantar uma agulha de aço, haveria uma separação dos dois fluidos apenas dentro de cada molécula do aço, sendo que as moléculas ficariam polarizadas magneticamente nesse caso. Palavras de Coulomb nessa Memória:

> Creio que podemos reconciliar o resultado das experiências com o cálculo ao fazer algumas mudanças nas hipóteses; aqui vai uma modificação que parece poder explicar todos os fenômenos magnéticos cujos testes anteriores forneceram medidas precisas. Essa mudança consiste em supor no sistema do Sr. Aepinus que o fluido magnético está contido em cada molécula ou em cada parte integrante do ímã ou do aço, [supor] que o fluido pode ser transportado de uma extremidade a outra dessa molécula, o que fornece dois polos a cada molécula, mas [supor ainda] que esse fluido não pode passar de uma molécula para outra. Assim, por exemplo, se uma agulha imantada tiver um diâmetro muito pequeno, ou se, *Figura 7*, cada molécula puder ser considerada como uma pequena agulha cuja extremidade Norte seria unida à extremidade Sul da agulha anterior a ela, haveriam apenas duas extremidades n e s dessa agulha que forneceriam sinais de magnetismo; já que seria apenas nessas duas extremidades onde um dos polos das moléculas não estaria em contato com o polo contrário de uma outra molécula.

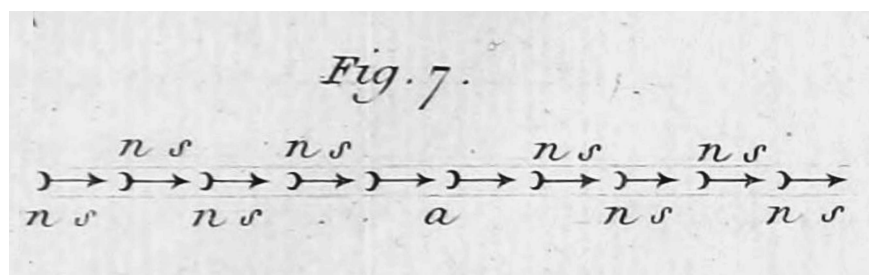



Figura 4.5: Modelo de polarização magnética molecular de Coulomb.

O modelo de Coulomb foi importante nas pesquisas posteriores de J.-B. Biot, S. D. Poisson e René Just Haüy (1743-1822).[75] Poisson, por exemplo, afirmou o seguinte:[76]

> Essa opinião, muito singular à primeira vista, é, contudo, aquela que prevaleceu de maneira geral.

A teoria molecular de Coulomb também foi importante para André-Marie Ampère (1775-1836) e Augustin-Jean Fresnel (1788-1827), embora eles tenham alterado a ideia de uma polarização molecular para a suposição de que o magnetismo consistia em correntes elétricas microscópicas fluindo em um plano normal ao eixo magnético de cada molécula ou partícula de uma substância imantada. Para uma discussão das correntes moleculares de Ampère ver o livro *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*.[77]

---

[75] [Gillmor, 1971a, págs. 175 e 217-218].
[76] [Poisson, 1822, pág. 250] e [Gillmor, 1971a, pág. 218].
[77] [Assis and Chaib, 2011] e [Assis and Chaib, 2015]. Ver também [Chaib, 2009].

4.5 A Terminologia Magnética de Coulomb

No caso do magnetismo o fluido magnético é denominado em francês tanto por "fluide magnétique" quanto por "fluide aimantaire".[78] O fluido boreal ou Norte é denominado de "fluide boréal", já o fluido austral ou Sul é denominado de "fluide austral".[79]

Uma "partícula magnética" ou "molécula magnética" é denominada por "molécule magnétique", "molécule aimantaire" ou "partie magnétique".[80] Essa partícula ou molécula magnética seria uma partícula que conteria apenas um dos fluidos magnéticos.

As extremidades das agulhas imantadas são chamadas de polos magnéticos. A extremidade que se dirige aproximadamente em direção ao polo geográfico Norte é chamada de "pôle boréal", "pôle boréal N", "pôle N" ou de "pôle nord"; enquanto que a extremidade que se dirige aproximadamente em direção ao polo geográfico Sul é chamada de "pôle austral", "pôle austral S", "pôle S" ou de "pôle sud".[81] O polo magnético de uma agulha também é chamado de centro de ação, "centre d'action", centro de ação magnética, "centre d'action magnétique", ou de centro de gravidade da curva das densidades magnéticas, "centre de gravité de la courbe des densités magnétiques".[82]

Algumas vezes ele se refere à "densidade do fluido magnético" ou à "densidade magnética".[83] Em alguns casos essas expressões referem-se à quantidade total de fluido magnético em uma partícula ou em um polo magnético. Em outros casos elas referem-se à densidade linear, superficial ou volumétrica de fluido magnético, isto é, à quantidade de fluido por unidade de comprimento, superfície ou volume, respectivamente.

A quantidade de fluido magnético em uma partícula também é indicada pelas expressões "intensidade de massa", "intensidade magnética" e "massa do fluido magnético".[84]

A expressão "momentum magnétique" utilizada por Coulomb às vezes pode se referir ao "momento magnético" de uma lâmina ou agulha imantada, ou seja, ao grau de magnetização ou de imantação dessa lâmina. Em outras ocasiões pode se referir ao "torque magnético" exercido pela Terra sobre essa lâmina, sendo esse torque proporcional ao momento magnético da lâmina ou à sua magnetização.

4.6 Métodos de Magnetização por Contato, Toque Simples, Toque em Separado e Toque Duplo

Apresento aqui de forma simplificada alguns métodos de imantação ou de magnetização para contextualizar parte do trabalho de Coulomb.[85] Esses métodos eram utilizados para produzir ímãs artificiais. Os quatro métodos principais na época de Coulomb, com várias variações entre eles, foram denominados de método do contato; do toque simples (*single touch*); do toque em separado ou dividido (*divided touch*); e de toque duplo (*double touch*).

[78]Ver, por exemplos, as Notas de rodapé 113, 114 e 259.

[79]Ver as Notas de rodapé 253 e 254.

[80]Ver, por exemplo, as Notas de rodapé 146, 501, 513, 529, 841 e 949.

[81]Ver, por exemplo, as páginas 46, 52, 66 e 232.

[82]Ver as Notas de rodapé 478, 884 e 887.

[83]Ver, por exemplo, as páginas 134, 238, 248, 439 e 452.

[84]Ver as Notas de rodapé 98, 841 e 913.

[85][Brewster, 1837, Cap. X: Account of the different methods of making artificial magnets, págs. 283-320], [Aepinus, 1979, págs. 179-182], [Dhogal, 2008, págs. 88-89], [Ricker III, 2011] e [Martins, 2017, Notas 23 e 45].

John Michell (1724-1793) criou as denominações de toque simples e toque duplo em 1750.[86]

A magnetização por contato é bem antiga e já era conhecida por muito tempo antes de Coulomb. Petrus Peregrinus, por exemplo, em sua carta sobre o magneto de 1269 já menciona como uma agulha de ferro ou aço pode ser magnetizada tocando um ímã natural.[87] Quando o polo Norte do ímã toca uma ponta da agulha por um certo tempo, essa ponta torna-se um polo Sul e vice-versa. Suponha um objeto de ferro que não esteja imantado. Ao colocá-lo em contato ou bem próximo de um ímã forte por um certo tempo, o objeto torna-se magnético. Porém, quando separado, perde praticamente toda sua magnetização. Se fizermos a mesma coisa com um objeto de aço, ele vai manter seu magnetismo por um longo tempo após a separação. A ponta do objeto de aço que tocar o polo Norte do ímã torna-se um polo Sul e a extremidade oposta do objeto torna-se um polo Norte, Figura 4.6.

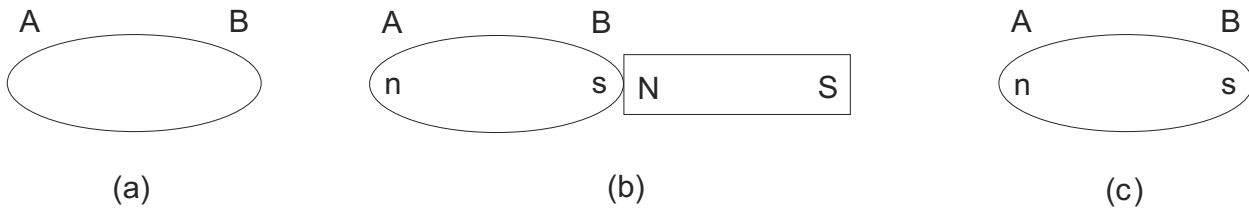



Figura 4.6: Magnetização por contato. (a) Objeto de aço AB inicialmente desmagnetizado. (b) Magnetização de AB após ficar em contato com um ímã forte NS por um tempo. (c) O objeto permanece magnetizado depois de afastado do ímã.

Peregrinus também parece ter sido a primeira pessoa a utilizar a palavra "polo" aplicada ao magnetismo, além de ter sido o primeiro a enunciar que polos magnéticos opostos se atraem, mostrando também três métodos para localizar os polos de um ímã esférico.[88]

Os três métodos de imantação nos quais há um movimento e atrito entre o ímã e o corpo a ser imantado estão ilustrados de maneira bem simples na Figura 4.7.

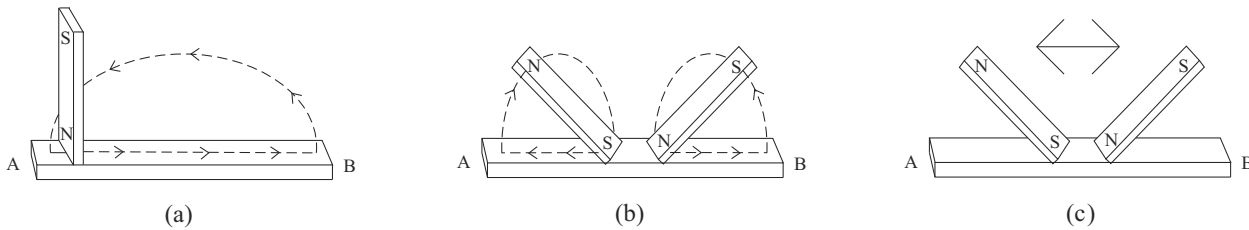



Figura 4.7: (a) Magnetização por toque simples, (b) por toque em separado e (c) por toque duplo.

No método de toque simples utiliza-se apenas um polo de um ímã para imantar uma barra ou agulha de aço. Esse método também já era conhecido bem antes de Coulomb. Em geral atrita-se um único polo de um ímã em uma única direção ao longo da barra de aço AB que se quer imantar, Figura 4.7 (a). Esse processo é repetido algumas vezes sobre as faces superior e inferior da barra AB até que ela esteja imantada até a saturação. No método de toque em separado utilizam-se dois ímãs. Eles são colocados com seus polos opostos sobre o centro da barra AB que se quer imantar, sendo então afastados até as extremidades da barra, Figura 4.7 (b). Esse processo é repetido algumas vezes sobre as duas faces da barra.

[86] [Michell, 1750, págs. 8 e 36-37] e [Michell and Canton, 1752].
[87] [Verschuur, 1996, pág. 9], [Bacha and Vannucci, 2014] e [Martins, 2017].
[88] [Araújo, 2010] e [Martins, 2017].

O método de toque duplo é similar ao anterior, sendo que agora os dois ímãs ficam sempre juntos, sendo atritados nos dois sentidos sobre a barra, mantendo fixa a separação entre os dois ímãs, Figura 4.7 (c).

Suponha que queremos magnetizar uma barra de aço AB. No método de magnetização por toque simples, a barra é colocada sobre um suporte com um ímã permanente NS colocado verticalmente sobre ela, Figura 4.8 (a). Atritamos então o ímã permanente NS sobre a superfície da barra, sempre no mesmo sentido (de A para B por exemplo) e sempre com o mesmo polo do ímã (por exemplo N) deslizando sobre a barra. Quando chegamos na extremidade B, levantamos o ímã e repetimos o mesmo procedimento algumas vezes. Isso é feito sobre a face superior e inferior da barra, até que ela esteja imantada até a saturação. No final do processo a extremidade A da barra de aço adquire um polo Norte, enquanto que a extremidade B adquire um polo Sul, Figura 4.8 (b):

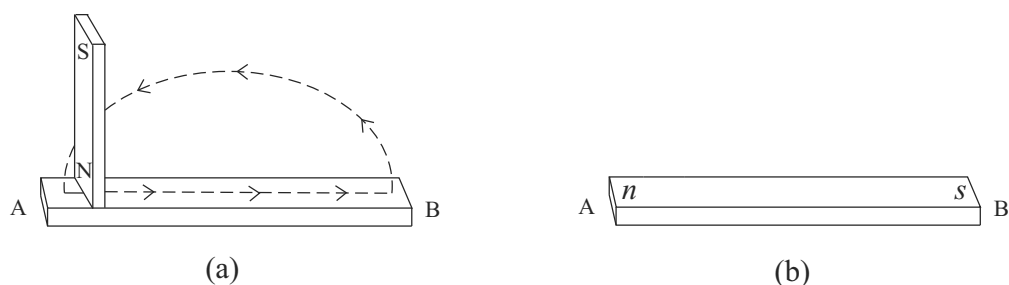



Figura 4.8: Magnetização por toque simples. (a) O ímã NS é atritado algumas vezes ao correr sobre a barra de aço AB. (b) A extremidade A adquire um polo Norte enquanto que a extremidade B adquire um polo Sul.

Em uma variação desse processo o ímã NS é atritado contra a barra enquanto está inclinado em relação a ela, Figura 4.9.

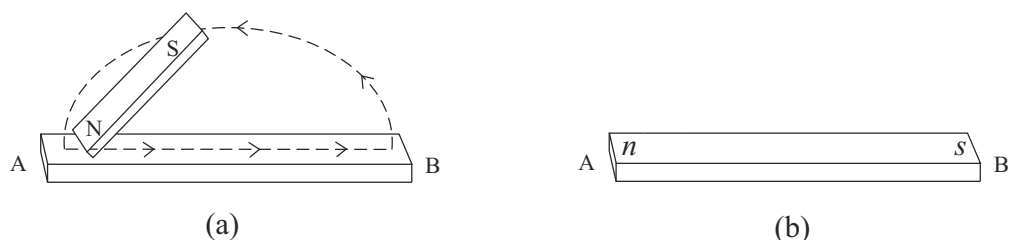



Figura 4.9: Magnetização por toque simples. (a) O ímã NS é atritado algumas vezes ao correr sobre a barra de aço AB. (b) A extremidade A adquire um polo Norte enquanto que a extremidade B adquire um polo Sul.

Também é possível manter o ímã fixo no laboratório enquanto a barra é atritada contra ele. Seja uma barra AB sobre o polo Norte de um ímã vertical NS. Vamos supor que a barra é movida da direita para a esquerda raspando contra o polo Norte do ímã, começando a raspar pela extremidade A e terminando a raspar pela extremidade B, como na Figura 4.10 (a). Quando a extremidade B termina de passar contra o ímã, levanta-se a barra e depois repete-se o processo algumas vezes. No final desse procedimento a extremidade A fica com um polo Norte, n, e a extremidade B com um polo Sul, s, Figura 4.10 (b).

Durante o século XVIII houve uma revolução nos métodos de magnetização. Foram criadas novas maneiras de imantação que produziam ímãs artificiais mais potentes e homogêneos. Esses desenvolvimentos foram fundamentais para as pesquisas de Coulomb.

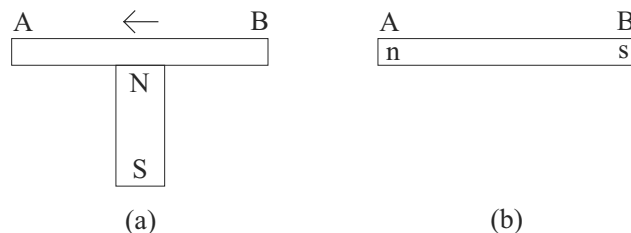



Figura 4.10: Magnetização por toque simples. (a) A barra AB é atritada de A para B contra o polo Norte do ímã. (b) A extremidade A adquire um polo Norte enquanto que a extremidade B adquire um polo Sul.

O método de toque em separado de Gowin Knight (1713-1772) foi utilizado no início da década de 1740. O resultado foi apresentado à *Royal Society*, mas o método em si foi mantido em segredo durante sua vida por motivos comerciais, sendo publicado apenas após sua morte.[89] Ele é ilustrado na Figura 4.11.

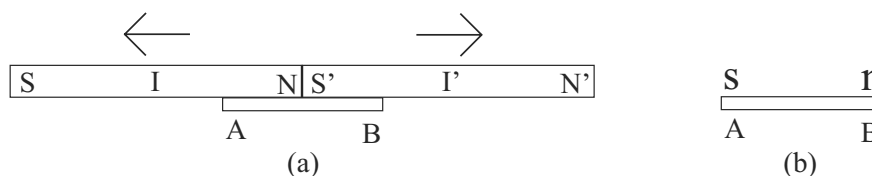



Figura 4.11: Método de Knight.

A barra AB que se quer imantar é colocada sob os polos opostos de dois ímãs I e I' deitados sobre ela, Figura 4.11 (a). Esses polos são então afastados deslizando sobre a barra, tal que o polo N passe sobre a metade esquerda da barra e o polo S' passe sobre a metade direita da barra. Esses dois ímãs são novamente colocados sobre a barra AB e o procedimento é repetido algumas vezes. Ao final do processo a extremidade A adquire um polo Sul, s, e a extremidade B adquire um polo Norte, n, Figure 4.11 (b). Esse método é chamado de toque em separado ou de toque dividido.

O método de magnetização por toque em separado de Henri-Louis du Hamel du Monceau (1700-1782), conhecido como método de Duhamel, é ilustrado de maneira simplificada na Figura 4.12.[90]

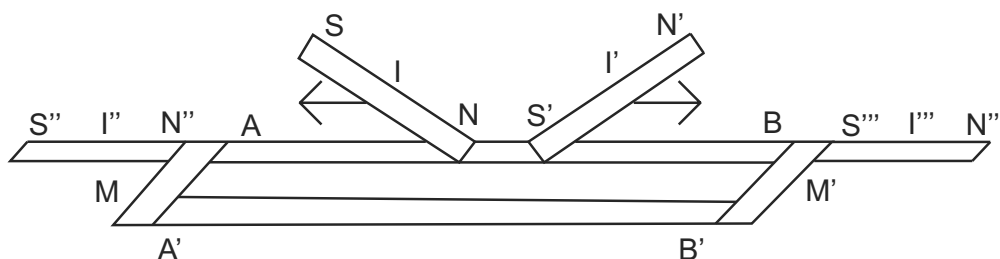



Figura 4.12: Método de Duhamel para imantar a lâmina AB.

As barras de aço a serem imantadas são AB e $A'B'$. Elas são colocadas paralelas entre si entre dois pedaços M e M' de ferro doce, chamados de armaduras, com os pedaços de ferro

[89] [Knight, 1744a], [Knight, 1744b], [Knight, 1746], [Knight, 1754], [Brewster, 1837, Cap. X: Account of the different methods of making artificial magnets] e [Aepinus, 1979, págs. 158-160 e 179].

[90] [Du Hamel, 1745], [Du Hamel, 1750], [Brewster, 1837, págs. 285-287] e [Aepinus, 1979, págs. 179-180].

ortogonais às barras, formando um retângulo. Alinhado com AB ele coloca dois ímãs I'' e I''' com seus polos como indicados na Figura 4.12. Ele então utiliza dois ímãs fortes I e I' com seus polos inferiores de tipos opostos. O polo N do ímã I fica do lado do polo N'' do ímã I'', enquanto que o polo S' do ímã I' fica do lado do polo S''' do ímã I'''. Os ímãs I e I' podem ser colocados verticalmente sobre o centro da barra AB ou inclinados de um certo ângulo, como mostrado na Figura. Eles são então atritados contra a barra AB ao serem afastados entre si indo em direção às extremidades da barra. Os ímãs são então colocados novamente sobre o centro de AB e o procedimento é repetido algumas vezes, Figura 4.12. Vira-se a lâmina AB de cabeça para baixo e repete-se o procedimento para imantar seu lado inferior.

O mesmo procedimento é feito com a barra $A'B'$, só que agora o ímã I' é colocado à esquerda do ímã I no centro de $A'B'$. Além disso, os ímãs I'' e I''' têm seus polos invertidos. Os ímãs I e I' são mais uma vez afastados entre si deslocando-se até as extremidades de $A'B'$ por algumas vezes, Figura 4.13.

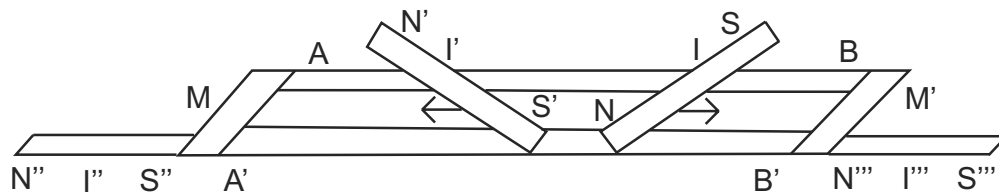



Figura 4.13: Método de Duhamel para imantar a lâmina $A'B'$.

Em vez de dois ímãs I e I', podem ser usados dois conjuntos de feixes de lâminas imantadas, sendo que em cada conjunto as lâminas são presas entre si com os polos de mesmo tipo colocados juntos.

Ao final do processo de Duhamel a barra AB vai ficar imantada com os polos n e s, enquanto que a barra $A'B'$ vai ficar imantada com os polos n' e s', como indicado na Figura 4.14.

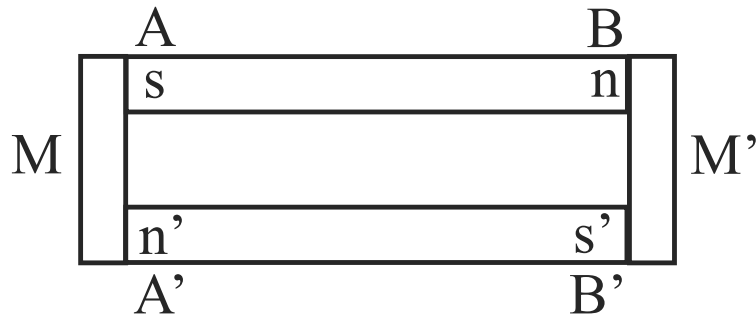



Figura 4.14: Resultado final do processo de Duhamel.

O método de toque duplo de Michell e John Canton (1712-1772) de 1750-1752 está ilustrado na Figura 4.15.[91]

Um conjunto de três lâminas imantadas CD é colocada sobre a barra AB que se quer imantar (que pode ser dividida em três pedaços como na Figura ou em seis pedaços como descrito por Michell). Vamos supor que o polo Sul das lâminas CD esteja em D, na parte em

[91] [Michell, 1750], [Canton, 1752], [Michell and Canton, 1752], [Brewster, 1837, págs. 287-288] e [Aepinus, 1979, págs. 180-181].

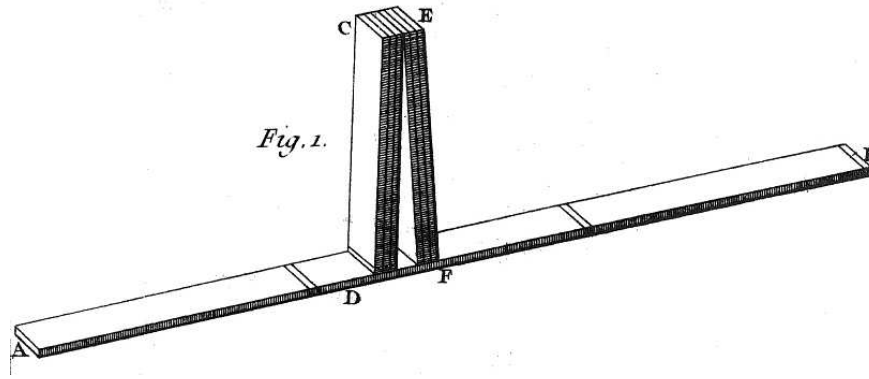



Figura 4.15: Método do toque duplo de Michell.

contato com AB. Coloca-se um outro conjunto de lâminas imantadas EF com o polo oposto em contato com AB. Em nosso exemplo teríamos o polo Norte dessas lâminas em F. Há uma pequena separação entre os polos inferiores D e F. Esse sistema de seis lâminas desliza então algumas vezes de forma conjunta para frente e para trás entre as extremidades A e B da barra de aço, mantendo fixa a separação entre as lâminas. A barra AB é então invertida, tal que o lado inferior passe para o lado superior, sendo então todo o procedimento repetido. Ao final do processo a barra AB fica imantada com um polo Norte, n, na extremidade A e com um polo Sul, s, na extremidade B, como ilustrado na Figura 4.16 (a) e (b).

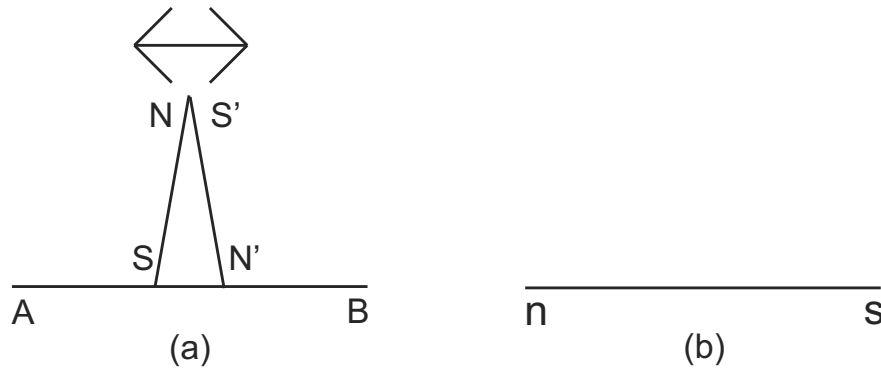



Figura 4.16: Ilustração do método de Michell.

O método de toque duplo de Aepinus (1724-1802) e Antheaulme é ilustrado na Figura 4.17.[92]

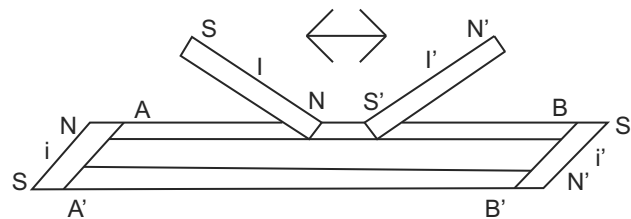



Figura 4.17: Método do toque duplo de Aepinus.

[92][Aepinus, 1759] com tradução para o inglês em [Aepinus, 1979, págs. 181-182 e 380-383], [Antheaulme, 1760] e [Brewster, 1837, págs. 291-292].

Em vez de colocar as barras de aço a serem imantadas entre outras duas peças de ferro, como no método de Duhamel, Aepinus colocou-as entre dois ímãs i e i' com os polos invertidos, Figura 4.17. Os ímãs I e I' que iam imantar as barras de aço eram colocados sobre o centro de uma dessas barras. Porém, em vez de ficarem quase ortogonais à barra a ser imantada, como no método de Michell, os ímãs agora ficavam bem inclinados em relação à barra, de apenas de 15 ou 20 graus, com seus polos inferiores sendo de tipos opostos. Esse foi o grande avanço em relação ao método de Michell. Havia uma pequena separação fixa entre os ímãs I e I'. Além disso, ao invés de separar os ímãs I e I' do centro de cada barra a ser imantada até suas extremidades, os ímãs I e I' eram movidos juntos ao longo da barra AB, fazendo um movimento de ida e volta entre as extremidades da barra. Esses ímãs I e I' ficavam inclinados em relação à barra, sendo mantidos a uma distância fixa entre si por um pedaço de madeira enquanto eram atritados contra a barra. Em seguida é repetido o mesmo procedimento com o lado inferior da barra AB, fazendo com que ela esteja imantada até a saturação. O mesmo procedimento é feito com a barra $A'B'$, só que agora o ímã I' é colocado à esquerda do ímã I no centro de $A'B'$.

No final do processo a extremidade A da barra fica com um polo Sul, s, e a extremidade B com um polo Norte, n. Já a barra $A'B'$ vai ficar imantada com seus polos invertidos, Figura 4.18.

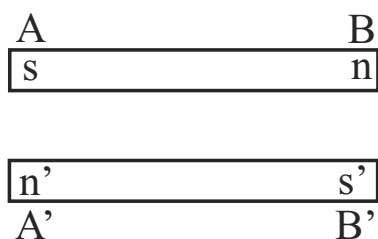



Figura 4.18: Resultado final do processo de Aepinus.

Em vez de dois ímãs I e I', podem ser usados dois conjuntos de feixes de lâminas imantadas, sendo que em cada conjunto as lâminas são presas entre si com os polos de mesmo tipo colocados juntos.

Coulomb aprimorou ainda mais o procedimento de toque duplo de Antheaulme e Aepinus.[93] Com isso obteve ímãs artificiais longos e finos com polos bem definidos, o que foi fundamental para chegar na lei de força entre polos magnéticos. Por exemplo, em sua Segunda Memória ele utiliza ímãs artificiais no formato de barras cilíndricas bem compridas e finas, tendo um comprimento de 54 a 68 cm (20 a 25 polegadas) e um diâmetro de 0,3 cm (1,5 linha). Elas eram de um aço excelente e foram uniformemente magnetizadas seguindo o método de toque duplo de Michell e Canton, como aperfeiçoado por Antheaulme e Aepinus. Coulomb mostrou que seus centros de ação ou polos magnéticos estavam concentrados em regiões muito pequenas localizadas a aproximadamente 2,3 cm (10 linhas) de cada extremidade. Ao utilizar sua balança magnética conseguiu finalmente medir a força entre dois polos magnéticos, mostrando que era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

[93] [Aepinus, 1979, págs. 179-182] e [Heilbron, 1999, págs. 91-96, 373 e 469-470].

Capítulo 5

Pesquisas sobre a Melhor Maneira de Fabricar as Agulhas Imantadas, de Suspendê-las, de Ter Certeza que Elas Estão ao Longo do Verdadeiro Meridiano Magnético; enfim, de Justificar Suas Variações Diurnas Regulares

Por Coulomb[94]

Enquanto todas as partes da Terra são unidas por suas necessidades respectivas e pela troca de suas coisas redundantes, enquanto que os exércitos e todas as nações cobrem e habitam os mares, os sábios, tão respeitáveis por seu amor pelo bem público quanto pela engenharia, propõem para as pesquisas dos físicos e dos geômetras a perfeição do instrumento que dirige o avanço dos navios, que, colocado no centro de um horizonte vasto e uniforme, traça uma linha por meio da qual é conhecida a direção: é servir à humanidade e ao seu país responder aos seus pontos de vista e tentar a sua força em um objeto tão útil.

5.0.1 Definições e Princípios

1. Caso se suspenda uma agulha imantada por seu centro de gravidade, ao redor do qual supõe-se que ela possa girar livremente em todos os sentidos, ela assume uma direção fixa, de maneira que, se essa direção for prolongada, ela voltará sempre a ela de maneira oscilante.

Caso, através da direção dessa agulha, passarmos um plano vertical, esse plano será o meridiano da bússola ou, dito de outra maneira, o meridiano magnético. O ângulo formado por esse plano com o meridiano verdadeiro[95] da Terra será a declinação da bússola.

[94][Coulomb, 1780]. Esse trabalho publicado em 1780 compartilhou o prêmio de 1777 da Academia de Ciências da França relacionado às pesquisas sobre o melhor método de fabricar agulhas imantadas, [Gillmor, 1971a, págs. 176-182].

[95]Isto é, com o meridiano geográfico local, plano vertical que contém o eixo de rotação da Terra em relação

Caso um plano horizontal passe pelo ponto de suspensão da agulha, o ângulo formado pela direção da agulha com esse plano será a inclinação da bússola.

Distinguimos, nas agulhas imantadas, suas extremidades pelo nome de *polos*. A extremidade que se dirige aproximadamente em direção ao Norte [geográfico] é chamada de *polo boreal*. A extremidade que se dirige aproximadamente em direção ao Sul [geográfico] é chamada de *polo austral*.[96] Os polos de mesmo nome pertencentes a ímãs ou agulhas diferentes parecem exercer uns sobre os outros uma força repulsiva. Os polos de nomes diferentes parecem exercer uma força atrativa.

As lâminas de aço são susceptíveis apenas a um certo grau de magnetismo que elas não podem ultrapassar. Quando chegam a esse ponto, diz-se que elas estão imantadas na saturação.

5.0.2 Primeiro Princípio Fundamental

2. Caso, após haver suspendido uma agulha por seu centro de gravidade, a afastarmos da direção que ela assume naturalmente, ela retorna sempre para essa direção por meio de forças que agem paralelamente a essa direção, que são diferentes para os pontos diferentes da agulha, mas que são as mesmas para cada um desses pontos em particular, em qualquer orientação que essa agulha seja colocada, relativamente à sua direção natural; de maneira que uma agulha imantada sofre sempre a mesma ação, qualquer que seja a orientação em que esteja, por parte das forças magnéticas da Terra.[97]

Desenvolvimento desse Princípio

O globo da Terra é um ímã natural que, por sua ação, ocasiona o direcionamento da bússola. Caso seja suposto que as forças magnéticas são forças atrativas ou repulsivas, os centros dessas forças, colocados dentro do globo terrestre, estarão, com relação ao comprimento da agulha, a uma distância que podemos considerar como infinita. Porém, como a ação das forças atrativas ou repulsivas depende da natureza e da intensidade das massas[98] e de uma função da distância, a distância pode ser suposta a mesma, em qualquer posição que a agulha seja colocada, e [como] cada ponto dessa bússola considerado em particular não experimenta nas mudanças de posição qualquer variação em relação à constituição de suas partes, segue-

---

às estrelas.

[96]No original: *pôle boréal* e *pôle austral*. A palavra *boreal* refere-se às coisas que pertencem ao Norte terrestre ou que são relativas ao hemisfério Norte. Já a palavra *austral* refere-se às coisas que pertencem ao Sul terrestre ou que são relativas ao hemisfério Sul. Hoje em dia chamamos de polo Norte de uma bússola à sua extremidade que aponta aproximadamente em direção ao Norte geográfico terrestre. Logo, o polo boreal de Coulomb seria hoje em dia chamado de polo Norte da agulha, enquanto que seu polo austral seria chamado de polo Sul da agulha.

Alguns outros autores adotaram uma definição oposta à de Coulomb para a denominação dos polos de um ímã, chamando de polo austral à extremidade da agulha que se dirige aproximadamente em direção ao Norte geográfico terrestre.

Nunca houve um consenso sobre a denominação dos polos magnéticos de um ímã.

[97]Uma discussão e ilustração desse primeiro princípio fundamental encontra-se na Seção 6.1.

[98]No original: *intensité des masses*. A força de atração gravitacional de Newton é proporcional ao produto das massas das partículas que estão interagindo. Nesse caso Coulomb está se referindo à força magnética exercida pela Terra sobre os diferentes pontos de uma agulha imantada. O que ele chama aqui de "intensidade das massas" parece estar se referindo ao produto das quantidades de fluido magnético contidas nas partículas que estariam interagindo por forças magnéticas.

se disso que cada um dos pontos da agulha será solicitado por uma força cuja direção será sempre a mesma e cuja intensidade será independente da posição da agulha.

As experiências do Sr. Musschenbroek[99] e aquelas de Wiston, citadas pelo mesmo autor, vêm apoiar a teoria. O Sr. Musschenbroek (*Dissertatio de magnete*, Exp. CIII)[100] encontrou que, quando uma bússola de inclinação[101] é feita oscilar em um plano vertical diferente do meridiano magnético, as forças que produzem as oscilações nos planos diferentes estão entre si como o co-seno da inclinação formada pela direção natural da agulha com esses planos. Ora, caso seja suposto que a força particular que atua em cada ponto da bússola possui sempre a mesma direção e que sua ação é independente da posição da agulha, resultará dessa suposição e do princípio de decomposição das forças que as forças que fazem a agulha imantada oscilar, nos planos inclinados em relação à direção natural, estarão como os co-senos dos ângulos que esses planos formam com essa direção: estando isso confirmado pela experiência, resulta disso que o princípio estabelecido é legítimo.

Um outro fato, que temos todos os dias sob os olhos, prova ainda, me parece, esse princípio de uma maneira incontestável. Quando suspendemos sobre a ponta de um pivô uma agulha comum de declinação, caso ela estivesse em equilíbrio, antes de ser imantada,[102] ela deixará de estar [equilibrada na horizontal] quando tiver sido imantada; a parte boreal se encontrará mais pesada do que a parte austral,[103] e seremos obrigados, para restabelecer o equilíbrio, ou de adicionar um pequeno contrapeso à parte austral ou de diminuir o peso da parte boreal. Portanto, são forças dependentes da virtude magnética que aumentam o peso da parte boreal ou que diminuem o peso da parte austral. Porém, após termos restabelecido o equilíbrio por meio de um pequeno contrapeso, caso a bússola se encontre em uma situação horizontal dirigida naturalmente ao longo de seu meridiano magnético e caso giremos essa bússola horizontalmente, ela continuará, abandonada a si própria, a permanecer horizontal em todas as posições nas quais ela será levada por seu movimento oscilatório; consequentemente, a força magnética[104] aumenta o peso da parte boreal ou diminui o peso da parte austral de uma mesma quantidade, em qualquer orientação em que a bússola se encontre, em relação ao seu meridiano magnético: portanto, a orientação da bússola não afeta a ação das diferentes forças magnéticas.

5.0.3 Segundo Princípio Fundamental

3. As forças magnéticas do globo terrestre que atuam sobre os diferentes pontos de uma bússola agem em sentidos opostos. A parte boreal da bússola é atraída para o polo boreal do meridiano magnético.[105] A parte austral da agulha é solicitada na direção oposta. Qualquer que seja a lei de acordo com a qual atuam essas forças, a soma das forças que atuam sobre a agulha em direção ao polo boreal é exatamente igual à soma das forças que atuam sobre

[99]Pieter van Musschenbroek (1692-1761) foi um cientista holandês.

[100][Musschenbroek, 1754].

[101]No original: *aiguille d'inclinaison*.

[102]Isto é, caso essa agulha não imantada ficasse parada apontando na direção horizontal.

[103]Se temos uma bússola de inclinação em Paris, observa-se que no equilíbrio o polo boreal da agulha imantada (com a definição de Coulomb, equivalente ao polo Norte da bússola) fica abaixo do horizonte, enquanto que o polo austral da agulha fica acima do horizonte.

[104]No original: *force aimantaire*.

[105]Isto é, a extremidade boreal de uma bússola (ou seja, seu polo Norte, seguindo a denominação de Coulomb) é a que aponta no equilíbrio para o polo Sul magnético terrestre, que fica próximo do polo Norte geográfico terrestre.

o polo austral da agulha na direção oposta.[106]

Desenvolvimento desse Princípio

O Sr. Musschenbroek (*Dissertatio de magnete*, Exp. XXVI) encontrou que uma lâmina de aço, pesada antes de ser imantada e após ter sido imantada, não mudou de peso. Qualquer precisão que ele pudesse colocar em suas experiências, elas sempre lhe forneceram o mesmo resultado. Assim todas as forças que atuam sobre uma agulha imantada, estando decompostas ao longo de uma direção horizontal e de uma direção vertical, segue-se dos princípios da estática, e dessa experiência, que a soma das forças verticais deve ser nula.

Por outro lado, sabe-se que, quando uma agulha imantada flutua sobre um pequeno pedaço de cortiça, ela se orienta ao longo do meridiano magnético, mas que o centro de gravidade de todo o sistema logo chega a um estado de repouso; ora, se a soma das forças horizontais não fosse nula, caso, por exemplo, a soma das forças que atua em direção ao polo boreal fosse maior do que a soma das forças que atua no sentido oposto, o centro de gravidade do sistema deveria deslocar-se em direção ao Norte com um movimento contínuo.

Portanto, pode-se concluir dessas experiências que, desde que a soma das forças decompostas no plano horizontal ao longo do meridiano magnético é nula, da mesma forma que a soma das forças verticais, segue-se que a soma das forças que atuam ao longo da direção natural da bússola também é nula.

Como alguém pode se opor a essa experiência [afirmando] que a coesão da água pode destruir os efeitos das forças horizontais,[107] vai aqui um fato que me parece irrespondível:

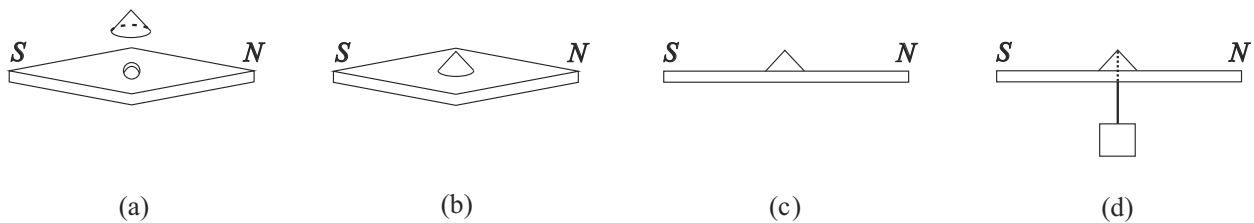
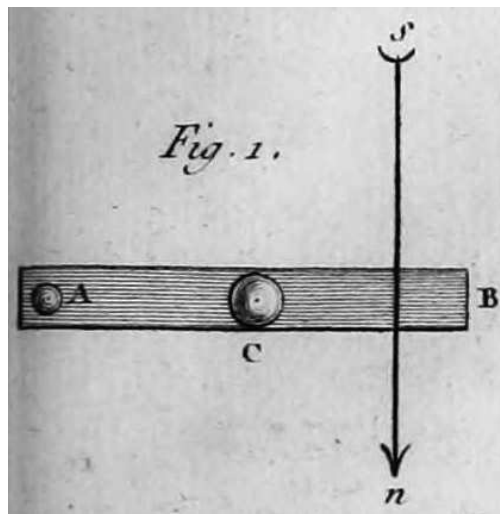
Uma régua de madeira AB (Figura 1), muito leve, perfurada em seu centro C e guarnecida nesse ponto de uma capa de bússola,[108] foi suspensa, por meio dessa capa, sobre um pivô da mesma maneira que suspendemos uma bússola de declinação.[109]

---

[106]Uma discussão e ilustração desse segundo princípio encontra-se na Seção 6.2 na página 138.

[107]Isto é, essa pessoa poderia afirmar que a força magnética resultante sobre a bússola não é nula, mas que ela não se move devido à força de atrito exercida pela água, que cancelaria a força magnética.

[108]No original de 1777: *chappe de boussole*, [Coulomb, 1780, pág. 172]. No texto de 1884 editado por Potier essa expressão aparece como *chape de boussole*, [Potier, 1884, pág. 7]. A capa de bússola é uma tampa com uma pequena cavidade oca, na forma de uma capa, cone ou tampa esférica côncava (tipo um dedal), para receber o pivô ou eixo ao redor do qual a bússola gira. Essa capa é fixada ou soldada na face superior da lâmina imantada da bússola, ao redor do furo em seu centro, com a parte côncava voltada para baixo. Pode ser feita, por exemplo, de metal ou ágata. Na Figura dessa Nota de rodapé, letra (a), ilustro uma agulha imantada SN com um furo no centro e com uma capa cônica acima dela. Em (b) vê-se em perspectiva a capa presa ao redor do furo. Em (c) a agulha com a capa é vista de lado. Já em (d) vê-se a agulha de lado com a capa apoiada sobre a ponta de uma agulha.

(a) (b) (c) (d)

[109]No original: *aiguille de déclinaison*.

Uma agulha sn foi fixada à extremidade dessa régua e formava com ela um ângulo reto;[110] colocamos um pequeno contrapeso em A para que todo o sistema ficasse equilibrado horizontalmente e pudesse se mover sobre a ponta de um pivô ao redor do centro de suspensão C. Depois que as oscilações terminaram, a agulha sn encontra-se dirigida ao longo do meridiano magnético, ou seja, ao longo da mesma linha que se ela estivesse apoiada sobre a ponta de um pivô por seu centro E.[111] Aqui vai a explicação e o resultado dessa experiência: as forças que agem sobre essa agulha, quando ela está em seu meridiano magnético, estão dirigidas ao longo de seu comprimento. Contudo, como a experiência nos mostra que a bússola alcança seu estado de repouso quando ela aponta ao longo do meridiano magnético, segue-se que as forças boreais e as forças austrais possuem o mesmo braço de alavanca: assim elas não podem estar em equilíbrio a menos que sejam iguais.

Repeti essa experiência com um grande número de agulhas imantadas até a saturação (ou não chegando até esse ponto de saturação), tendo somente um centro magnético ou tendo um número maior [de centros magnéticos].[112] Constantemente encontrei o mesmo resultado. Essa experiência será ainda mais exata ao suspender a pequena régua de madeira com fios

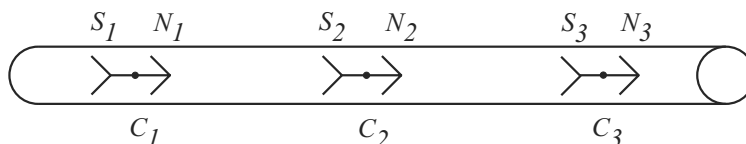
[110] As iniciais s e n da agulha referem-se aos seus polos magnéticos. Ou seja, essa é uma agulha imantada com s sendo seu polo Sul e n seu polo Norte. A agulha imantada sn está fixada sobre a régua. Tanto a régua quanto a agulha sn ficam na horizontal. Esse sistema pode girar ao redor da pequena capa côncava fixada no centro C da régua de madeira, apoiada sobre um pivô ou eixo vertical.

[111] Esse centro E da agulha sn não foi indicado na Figura de Coulomb.

[112] No original: *centre aimantaire*. Essa expressão está sendo traduzida aqui como centro magnético. No caso de uma agulha de bússola comum imantada homogeneamente, o centro magnético fica no ponto médio entre seus polos magnéticos, isto é, no ponto médio entre o polo Norte e o polo Sul da bússola. É possível imantar uma lâmina de aço tal que ela tenha mais de dois polos magnéticos. Por exemplo, ela pode ter os pares de polos magnéticos N_1 e S_1, N_2 e S_2, assim como N_3 e S_3. Nesse caso essa lâmina terá três centros magnéticos, C_1, C_2 e C_3. O centro C_1 estará no ponto médio entre N_1 e S_1, o centro C_2 estará no ponto médio entre N_2 e S_2, enquanto que C_3 estará no ponto médio entre N_3 e S_3.

Há uma maneira simples de produzir um espeto de madeira ou canudo plástico com três centros magnéticos. Basta prender ao longo de seu comprimento três agulhas imantadas, como na Figura dessa Nota de rodapé:

S_1 N_1 S_2 N_2 S_3 N_3

C_1 C_2 C_3

de seda, como explico na sequência dessa Memória.

5.0.4 Corolário Geral

4. Pode-se concluir a partir desses dois princípios, me parece, que a direção de uma agulha imantada não pode depender de uma torrente de fluido que, movendo-se com rapidez ao longo do meridiano magnético, força a agulha, por seu impulso, a se dirigir ao longo desse meridiano; pois, pelo primeiro princípio estabelecido, a agulha experimenta sempre a mesma ação por parte do fluido magnético,[113] qualquer que seja o ângulo que ela forma com sua direção natural, a qual deveria ser a direção da torrente de fluido magnético.[114] Contudo, de acordo com tudo que podemos conhecer das leis das impulsões dos fluidos, eles agem de maneira diferente, de acordo com que os corpos atingidos sejam colocados diferentemente e apresentem uma superfície menor ou maior em relação à direção da corrente desses fluidos. Assim, como a experiência nos mostra que as forças magnéticas do globo terrestre agem igualmente sobre a agulha em todas as orientações, essa ação não pode provir de uma torrente de fluido.

Em segundo lugar, como segue do segundo princípio que a soma das forças que agem sobre a agulha é igual nos dois sentidos opostos, é necessário, se quisermos fazer com que a direção da agulha dependa da impulsão de um fluido, imaginar torrentes opostas que agem igualmente em sentidos contrários sem se destruir mutuamente. Hipóteses semelhantes devem ser rejeitadas na física, como sendo muito contrárias aos princípios da mecânica.

Portanto, parece resultar da experiência que não são os turbilhões que produzem os diferentes fenômenos magnéticos e que, para explicar esses fenômenos magnéticos, é necessário recorrer a forças atrativas e repulsivas da mesma natureza daquelas que somos obrigados a utilizar para explicar o peso dos corpos e a física celeste.

5.1 Capítulo I. Fórmulas Deduzidas de Todas as Forças, Sejam Ativas, Sejam Coercitivas, que Possam Influenciar sobre a Orientação de uma Agulha em Equilíbrio em um Plano Horizontal

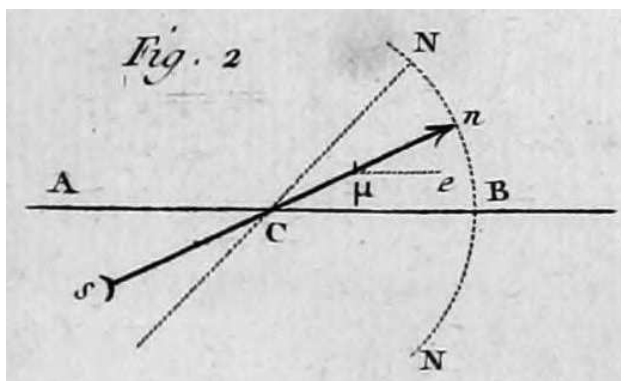
5. Quando uma bússola de declinação, equilibrada em um plano horizontal, pode girar livremente ao redor de seu ponto de suspensão, caso ela seja afastada de seu meridiano magnético, ela retornará a ele pela força magnética que age sobre cada ponto dessa agulha, e seu movimento será retardado por todas as forças coercitivas provenientes, seja do atrito da capa [da bússola] sobre seu pivô, seja da torção da seda na qual se pode supor suspendidas as bússolas, seja enfim da resistência do ar no qual a bússola realiza suas oscilações. Não consideraremos aqui os erros que podem surgir da posição do ponto de suspensão e da imperfeição dos pivôs e das capas [das bússolas].[115] Voltaremos a isso na sequência.

[113] No original: *fluide magnétique*.

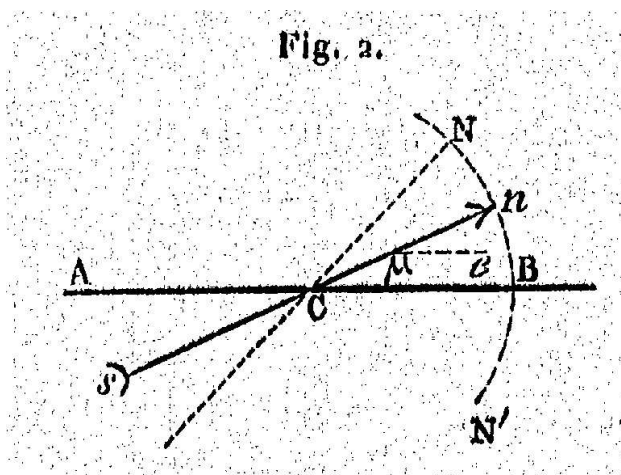
[114] No original: *fluide aimantaire*.

[115] Ou seja, por hora Coulomb não vai considerar os erros ou desvios que podem surgir na orientação da agulha em relação ao meridiano magnético devidos à posição do ponto de suspensão ou da imperfeição dos pivôs e das capas.

Sobre essas diferentes forças coercitivas, sendo que todas elas tendem a destruir o movimento das agulhas que oscilam: umas [forças] são constantes e dependem, seja do atrito, seja da coesão do ar; outras [forças] dependem igualmente do atrito e da coesão do ar, mas aumentam com a velocidade; de maneira que o *torque*[116] de todas as forças coercitivas será representado por uma grandeza $(A+Fu)$ na qual, sendo A uma grandeza constante, Fu será uma função da velocidade angular.

6. Seja AB (Figura 2) o meridiano [magnético] verdadeiro de uma bússola de declinação, a qual supomos afastada no início de seu movimento, pelo ângulo $BCN = B$, o ponto C sendo o ponto de suspensão, que se afasta muito pouco do centro de gravidade e do centro magnético em todas as lâminas homogêneas imantadas até a saturação.[117]

Quando a agulha chega em n, seja o ângulo $NCn = S$, o ângulo $nCB = B - S$, a velocidade angular $= u = dS/dt$, a força magnética μe, que age sobre um ponto qualquer μ (decomposta ao longo do plano horizontal), paralela ao meridiano magnético $= \varphi$, $C\mu = r$, $CN = l$, o *torque* da força magnética sobre o ponto μ será representado por[118]

[116]No original: *momentum*. Essa expressão também pode ser traduzida por momento, momento de força, ou momento de alavanca.

[117] Na Figura 2 a letra N na parte debaixo deve ser substituída por N', como corrigido na reedição de 1884 da obra de Coulomb:

[118]No original de 1777 essa equação aparece como, [Coulomb, 1780, pág. 175]:

$$\varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S) \ .$$

Caso $R = (A + Fu)$ represente o *torque* de todas as forças coercitivas, teremos, para o *torque* total, ao redor do ponto C, a grandeza $\int \varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S) - R$; mas, quando a agulha retorna a seu estado de repouso, as forças ativas e coercitivas devem estar em equilíbrio; assim teremos para o desvio da agulha[119]

$$\operatorname{sen}(B-S) = \frac{R}{\int \varphi\mu r} \ ;$$

e, quando o ângulo do desvio é pequeno,[120] teremos $(B-S) = R : \int \varphi\mu r$. Assim, para ter as dimensões mais vantajosas de uma agulha, é necessário, quando conhecemos a grandeza R e a grandeza $\int \varphi\mu r$, integrada por todo o comprimento da agulha, certificar-se que o ângulo $(B-S)$ seja um mínimo.

7. Passemos agora ao movimento oscilatório. Teremos necessidade dele na sequência, seja para comparar a força magnética de agulhas diferentes, seja para comparar a força magnética com a força coercitiva.

O *torque* de todas as forças que produzem a aceleração da agulha quando ela chega no ponto n é, como acabamos de ver no Artigo anterior, expresso por $\int \varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S) - R$; mas a aceleração do ponto μ, ou o pequeno arco percorrido por esse ponto, é expresso por rdu; assim temos, denominando dt o elemento de tempo,[121]

$$\varphi\mu C\mu \frac{\operatorname{sen}(B-S)}{raio} \ .$$

Em 1884 Potier escreveu essa equação como, [Potier, 1884, pág. 11]:

$$\varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S) \ .$$

Nessa tradução em português vou seguir a notação mais moderna de Potier. Ou seja, se θ representa um ângulo, então o seno e o cosseno desse ângulo serão representados por $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$, em vez da notação original de Coulomb, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{raio}$ e $\frac{\cos\theta}{raio}$.

O que Coulomb chama de $\varphi\mu$ nessa equação é a componente horizontal da força magnética terrestre atuando sobre o ponto μ que está a uma distância r do eixo de rotação. A componente dessa força normal à direção da agulha é dada por $\varphi\mu \operatorname{sen}(B-S)$. Portanto, o torque que ela produz na agulha é dado por $\varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S)$.

[119]No original: *l'erreur de l'aiguille*. Ou seja, o erro ou desvio da agulha em relação ao meridiano magnético. Esse desvio é causado pelas forças de atrito ou coercitivas que impedem com que ela volte exatamente para o meridiano magnético.

[120]O ângulo de afastamento da bússola em relação ao meridiano magnético é dado por $B-S$. Quando $B-S \ll 1$ radiano, temos que $\operatorname{sen}(B-S) \approx (B-S)$.

[121]Na próxima equação de Coulomb temos que μ no lado direito da equação representa um elemento infinitesimal de massa inercial, sendo r a distância desse elemento de massa até o eixo vertical de rotação. Logo, o momento de inércia de toda a agulha em relação a esse eixo de rotação é dado por $I = \int \mu r^2$. A integração aqui deve ser pensada como sendo uma integração volumétrica em todo o volume da agulha. A velocidade angular ao redor desse eixo é dada por $u = dS/dt = \dot{S}$, onde S é o ângulo NCn da Figura 2. Logo, $du/dt = d^2S/dt^2 = \ddot{S}$ representa a aceleração angular. O torque ao redor do eixo de rotação é dado por $\tau = \int \varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S) - R$. A equação dada por Coulomb é então a conhecida segunda lei do movimento da mecânica aplicada à rotação, sendo dada por $\tau = I\ddot{S}$. Ou seja, o torque atuando sobre a agulha é igual a seu momento de inércia vezes sua aceleração angular.

$$\left[\int \varphi\mu r \operatorname{sen}(B-S) - R\right] dt = du \int \mu r^2 \ ;$$

de onde, integrando essa grandeza, após haver substituído no lugar de dt seu valor de $dS : u$, e notando que u desaparece quando $S = 0$, teremos[122]

$$\int \varphi\mu r \left[\cos(B-S) - \cos B\right] - \int RdS = \frac{u^2}{2} \int \mu r^2 \ .$$

8. Caso o ângulo B seja muito pequeno (este é o único caso que precisaremos na sequência), teremos[123]

$$\cos(B-S) - \cos B = \frac{1}{2}(2BS - S^2) \ ;$$

assim a equação reduz-se a

$$\int \varphi\mu r(2BS - S^2) - 2\int RdS = u^2 \int \mu r^2 \ .$$

9. Caso se faça $u = 0$, encontraremos

$$2B - S = \frac{2\int RdS}{S\int \varphi\mu r} \ ;$$

e caso R seja uma quantidade constante, teremos

$$2B - S = \frac{2A}{\int \varphi\mu r} \ ;$$

assim, quando a agulha, após haver percorrido o arco NB, progride até N',[124] caso o arco percorrido BN' seja suposto $= B'$, teremos

$$B - B' = \frac{2A}{\int \varphi\mu r} \ ;$$

o que sempre fornece, na suposição de forças coercitivas constantes, a mesma quantidade para a diferença dos arcos para baixo e para cima.

---

[122] No original essa equação aparece como, [Coulomb, 1780, pág. 175]:

$$\int (\varphi\mu r)\frac{(\cos(B-S) - \cos B)}{raio} - \int RdS = \frac{uu}{2}\int r^2\mu \ .$$

Como afirmado na Nota de rodapé 118, estou seguindo Potier e substituindo a expressão de Coulomb $\frac{\cos\theta}{raio}$ por $\cos\theta$, onde θ representa um ângulo qualquer.

[123] Quando o ângulo B é muito pequeno, também $B - S$ será muito pequeno. Supondo B expresso em radianos, as seguintes aproximações podem então ser feitas: $\cos B \approx 1 - B^2/2$ e $\cos(B-S) \approx 1 - (B-S)^2/2$. Utilizando essas aproximações chega-se então no próximo resultado apresentado por Coulomb.

[124] Ver a Nota de rodapé 117 na página 57.

10. Caso se suponha $R = A + Fu$, teremos então, não interessando o quão pequena seja a velocidade u,

$$B - B' > \frac{2A}{\int \varphi \mu r} \ .$$

Essa consideração será suficiente na sequência para provar que a resistência do ar não pode produzir um desvio perceptível na posição da agulha.

11.[125] Quando, na equação anterior, supomos $R = 0$, chegamos na equação aproximada

$$u^2 = \frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \left(2BS - S^2 \right) \ ,$$

de onde:

$$\left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} dt = \frac{dS}{\sqrt{2BS - S^2}} \ .$$

Contudo,

$$\int \frac{dS}{\sqrt{2BS - S^2}}$$

é o ângulo cujo raio é B, e S o seno verso; grandeza que é igual a $\pi/2$ quando $S = B$; assim, denominando T o tempo de uma oscilação total, teremos

$$T \left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} = \pi \ .$$[126]

12. Se quisermos comparar a força magnética com a gravidade, notamos que, caso g exprima essa força, teremos[127]

[125]Na Seção 6.3 na página 139 apresento uma discussão detalhada desse Artigo 11 de Coulomb.

[126]Ver a Seção 6.3 na página 139 para uma discussão do significado que Coulomb dava à expressão "tempo de uma oscilação total", juntamente com uma dedução dessa fórmula apresentada por ele.

[127]Embora Coulomb chame de g à "força" da gravidade, ele está se referindo à aceleração de queda livre na superfície da Terra, ou seja, a força gravitacional por unidade de massa. Suponha que temos um pêndulo simples de comprimento λ que realiza pequenas oscilações em um plano vertical devido à ação gravitacional da Terra, partindo do repouso de um ângulo θ_o. Na próxima equação T' representa o tempo para o pêndulo ir de θ_o até $-\theta_o$, ver a Seção 6.3 na página 139. Logo T' é então dado por:

$$T' = \frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \right) = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \ .$$

No artigo original Coulomb escreve essa relação da seguinte maneira, [Coulomb, 1780, pág. 176]:

$$T' \left(\frac{g}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} = (180)^\circ \ .$$

Potier, [Potier, 1884, pág. 13], substituiu-a por

$$T' \left(\frac{g}{\lambda} \right)^{1/2} = \pi \ .$$

$$T'\left(\frac{g}{\lambda}\right)^{1/2} = \pi$$

para as oscilações de um pêndulo cujo comprimento é λ. Assim, se quisermos que o tempo T' seja isócrono com as oscilações da agulha imantada, faremos

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{\int(\varphi\mu r)}{\int \mu r^2} \ ,$$

de onde

$$\lambda = g\frac{\int \mu r^2}{\int \varphi\mu r} \ .$$

Supondo que a bússola seja uma lâmina de uma largura e de uma espessura uniforme, denominando de δ à seção transversal dessa lâmina e de l à metade de seu comprimento, teremos[128]

$$\int \mu r^2 = 2\delta l \times \frac{l^2}{3} \ ;$$

mas $2\delta l$ representa a massa da agulha que, multiplicada pela força da gravidade g, é igual a seu peso P. Assim,

$$\int \mu r^2 = \frac{Pl^2}{3g} \ ,$$

e, consequentemente,

$$\lambda = \frac{Pl^2}{3\int \varphi\mu r} \ .$$

13. Se procuramos por um peso Q tal que, colocado na extremidade l da alavanca, exerce o mesmo *torque* que a força magnética da agulha, teremos

[128] Na próxima equação Coulomb está apresentando o momento de inércia de uma lâmina no formato de um paralelepípedo de comprimento 2ℓ, largura a e espessura e, tal que $\ell \gg a$ e $\ell \gg e$. Seja M a massa dessa agulha e $\rho = M/(2\ell \cdot a \cdot e)$ sua densidade volumétrica de massa. Seja um eixo perpendicular ao plano $2\ell \cdot a$ passando pelo centro da agulha. O momento de inércia dessa lâmina é dado por

$$I = \int_i \mu_i r_i^2 = \frac{M(2\ell)^2}{12} = \frac{M\ell^2}{3} \ .$$

O que Coulomb chama de δ ou de seção transversal dessa lâmina é sua densidade linear de massa, ou então sua densidade volumétrica de massa multiplicada pela área ae da seção transversal da lâmina, a saber:

$$\delta = \frac{M}{2\ell} = \rho ae \ .$$

Supondo uma densidade de massa igual à unidade, vem que $\delta = ae$. Nesse caso a massa da agulha fica representada por $M = 2\ell\delta$, como mencionado por Coulomb logo a seguir.

$$Ql = \int \varphi\mu r \ ;$$

mas, em consequência do Artigo anterior,

$$\int \varphi\mu r = \frac{Pl^2}{3\lambda} \ ;$$

assim $Q = \frac{Pl}{3\lambda}$, grandeza essa que é a mesma que aquela encontrada pelo Sr. Euler,[129] no trabalho que concorreu ao prêmio [da Academia de Ciências], em 1743,[130] na qual esse geômetra, ao dividir a força magnética em duas partes, que atuam em sentidos contrários, nas duas extremidades da agulha, encontrou para cada uma [dessas partes o valor] $Q = Pl : 6\lambda$.

5.2 Capítulo II. Determinação Teórica e Experimental das Forças Magnéticas

13*.[131] O Sr. Musschenbroek (*Dissert. de Magnete*, Exp. CVII) diz que, nas oscilações de lâminas imantadas, o quadrado dos tempos nos quais se realiza um certo número de vibrações está em uma razão composta do comprimento das lâminas e de seus pesos; o que, expresso algebricamente, fornece

$$T^2 = mlP \ ,$$

onde T exprime o tempo de um certo número de vibrações, m sendo um coeficiente constante, $2l$ seu comprimento, e P o peso da agulha; mas encontramos, nos Artigos anteriores,

$$T^2 = \pi^2 \frac{\int \mu r^2}{\int \varphi\mu r} = \pi \frac{Pl^2}{3g \int \varphi\mu r} \ ;$$

assim, ao comparar esse valor de T^2 com a experiência, resulta a seguinte equação:

$$mlP = \pi^2 \frac{Pl^2}{3g \int \varphi\mu r} \ ,$$

de onde

$$\int \varphi\mu r = \pi^2 \frac{l}{3gm} = Ql \ ;$$

portanto, ao comparar as experiências de Musschenbroek com a teoria das oscilações, encontraremos que o *torque* total das forças magnéticas de uma lâmina, quaisquer que sejam as dimensões dessa lâmina, será sempre igual a um peso constante, multiplicado pelo comprimento da lâmina.

[129] Leonhard Paul Euler (1707-1783) foi um cientista suíço.

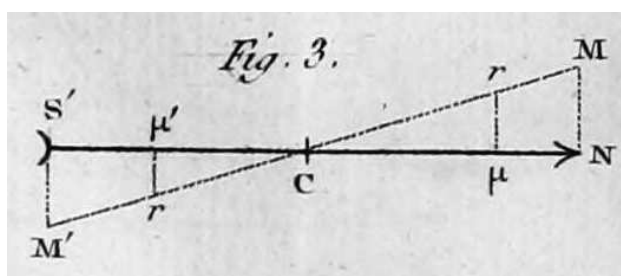
[130] [Euler, 1752].

[131] Coulomb numerou dois Artigos com o número 13, ver o final da Seção 5.1 na página 61. Estou seguindo o trabalho original e denominando esse segundo artigo 13 por 13*.

14. Disso conclui-se que para comprimentos iguais, o atrito das bússolas de declinação que giram sobre um pivô, aumenta seguindo uma lei do peso, e o *torque* da ação magnética sendo sempre uma grandeza constante, as bússolas mais leves serão as melhores.

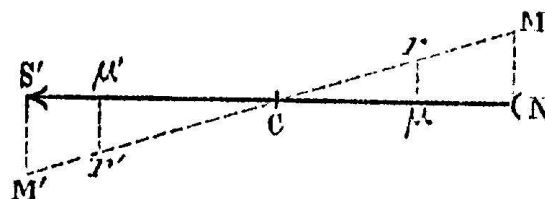
15. Segue-se ainda que, caso o *torque* do atrito aumente em razão direta dos pesos, ele aumentará, com tudo o mais permanecendo igual, como os comprimentos das bússolas: contudo, o *torque* da força magnética aumenta na mesma proporção. Assim, sendo constante a razão do *torque* das forças magnéticas em relação ao *torque* dos atritos, sempre resultará o mesmo desvio na orientação das agulhas.

16. Caso quiséssemos encontrar, de acordo com as mesmas fórmulas, baseadas nas experiências de Musschenbroek, a lei das forças magnéticas [atuando] em pontos diferentes das agulhas, aqui está como poderíamos fazê-lo.

Seja $S'N$ (Figura 3) uma agulha cujo centro magnético está localizado em C, isto é, na qual o ponto C é tal que todos os pontos μ da parte CN possuem uma força boreal,[132] enquanto que todos os pontos μ'[133] da parte CS' possuem uma força austral.[134]

Caso a ordenada μr represente a força sobre o ponto μ e se, pelas extremidades de todas as ordenadas, passarmos uma linha MCM', essa linha será o lugar geométrico de todas as forças magnéticas e cortará a agulha em um ponto C que será o centro magnético. Mas,

[132]No original: *force boréale*. Isto é, possuem um fluido boreal ou fluido Norte. Também pode-se dizer que os pontos μ da parte CN sofrem uma força magnética que aponta aproximadamente para o polo Norte geográfico.

[133]No original aparece μ aqui.

[134] No original: *force australe*. Isto é, possuem um fluido austral ou fluido Sul. Também pode-se dizer que os pontos μ' da parte CS' sofrem uma força magnética que aponta aproximadamente para o polo Sul geográfico. Na Figura 3 a letra r na parte debaixo deve ser substituída por r'. Isso foi corrigido na reedição de 1884 da obra de Coulomb. O problema é que quando essa Figura foi refeita em 1884, a ponta e o rabo da agulha imantada ficaram invertidas em relação à Figura original:

pelo segundo princípio, a soma das forças boreais é igual à soma das forças austrais, de onde conclui-se que a área CMN é igual à área $CM'S'$.

Porém a experiência nos mostra que, nas agulhas homogêneas imantadas até a saturação, o centro magnético encontra-se no centro das agulhas; assim, se supusermos que a grandeza φ, que é a força magnética do ponto μ, seja representada por $nl^q r^k$, sendo n um coeficiente constante, l a metade do comprimento da agulha e r a distância do ponto μ até o ponto C, sendo ainda q e k as potências de l e de r, obteremos disso que $\int \varphi \mu r = Ql$, sendo Q um peso constante,

$$\int \varphi \mu r = \int n\delta l^q r^{k+1} dr = \frac{n\delta l^q r^{k+2}}{k+2} ,$$

e, quando $r = l$, teremos

$$\frac{2n\delta l^{q+k+2}}{k+2} = Ql ;$$

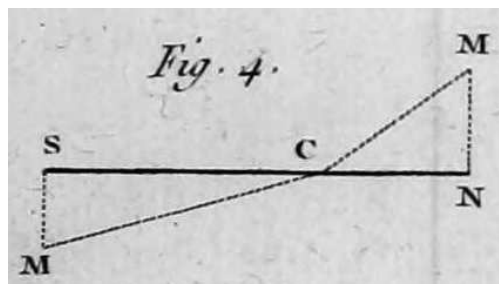
ou, como essa equação deve ser idêntica e como Q é uma grandeza constante, é necessário que $(q+k+1) = 0$, ou $(q+k) = -1$; assim a força φ, para a extremidade N, sendo nl^{q+k}, teremos sempre na extremidade das agulhas, $\varphi = (n/l)$, qualquer que seja o valor de q ou de k.

17. Caso se suponha, juntamente com a maioria dos autores que se ocuparam da matéria magnética, que as forças boreais e austrais dos diferentes pontos μ da agulha, estão como as distâncias $C\mu$ desses pontos ao centro magnético,[135] nesse caso $\varphi = nl^q r$ e $q = -2$; assim $\varphi = nr/l^2$, e o lugar geométrico MCM' será uma linha reta.

18. Embora existam várias experiências que parecem mostrar conjuntamente que as forças sobre os pontos diferentes de uma lâmina são como as distâncias desses pontos ao centro magnético, apresenta-se uma dificuldade que, me parece, deve nos deixar cautelosos sobre essa hipótese. Concebemos, de fato, bem facilmente que, quando uma agulha é imantada até a saturação, o centro magnético encontra-se no centro da lâmina, o lugar geométrico das forças magnéticas pode ser representado por dois triângulos iguais, opostos pelo vértice e ligados pela mesma equação; mas somos mestres em transportar esse centro magnético em direção às extremidades da lâmina, servindo-nos da prática prescrita pelo Sr. Le Monnier (*Loi du Magnétisme*, pág. 107).[136] Se supusermos que esse centro encontra-se em um ponto diferente do centro da lâmina, nesse caso as forças boreais serão representadas por um triângulo CMN e as forças austrais por um triângulo $M'CS$ (Figura 4).[137]

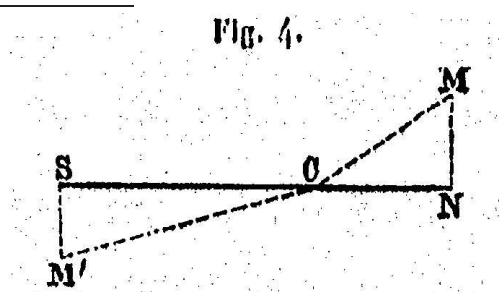
[135]Isto é, caso se suponha que a densidade de fluido magnético em cada ponto é proporcional à distância desse ponto ao centro da agulha. Com essa suposição vem que a força magnética exercida pela Terra sobre cada ponto da agulha também vai ser proporcional à distância desse ponto ao centro da agulha.

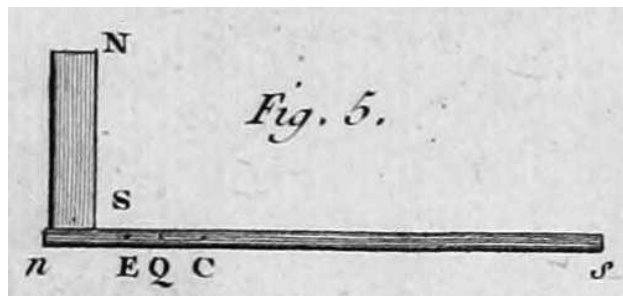
[136]Pierre Charles Le Monnier (1715-1799) foi um astrônomo francês. Seu trabalho sobre as leis do magnetismo foi publicado em duas partes entre 1776 e 1778, [Le Monnier, 1778].

[137] Na Figura 4 a letra M na parte debaixo deve ser substituída por M', como corrigido na reedição de 1884 da obra de Coulomb:

A lei da continuidade exige que os dois triângulos sejam semelhantes ou que MCM' seja uma linha reta; porém resulta do primeiro princípio que a soma das forças austrais deve ser igual à soma das forças boreais. Assim é necessário, para satisfazer a esse princípio, que os dois triângulos sejam iguais, o que é incompatível com a semelhança dos dois triângulos, no caso em que a linha NC for maior ou menor do que CS; assim a hipótese das forças magnéticas atuando sobre pontos diferentes da agulha, proporcionais à distância desses pontos, não pode ser aceita.

5.2.1 Novas Experiências para Determinar a Força Diretriz das Lâminas Imantadas

19. Caso as experiências de Musschenbroek fossem mais numerosas, caso a teoria do magnetismo tivesse chegado na sua época ao estado atual em que chegou, a autoridade desse autor na física tem um peso tão grande, que eu teria adotado cegamente as fórmulas simples que resultam delas; mas será fácil perceber que elas são incompatíveis com a teoria do magnetismo, quando expusermos aquilo que as experiências repetidas nos fizeram entrever desde alguns anos sobre a maneira pela qual se comunica a virtude magnética; obterei dessas experiências consequências que acredito serem interessantes relativas ao assunto que estou tratando.

20. Quando o polo de um ímã é colocado sobre a extremidade n de uma lâmina de aço (Figura 5), caso seja, por exemplo, o polo austral do ímã que toca o ponto n, uma parte nC dessa lâmina assume uma força boreal,[138] enquanto que a outra parte Cs assume uma força austral, e o centro C, que separa a parte boreal da parte austral, que não possui qualquer

[138]Nessa experiência deve-se supor que a lâmina de aço não estava imantada inicialmente. Após o íma NS ficar sobre uma extremidade da lâmina por algum tempo, com seu polo Sul tocando a lâmina, observa-se que o pedaço nC da lâmina de aço fica imantado com um fluido boreal (ou seja, com um fluido magnético Norte, ou com um polo Norte). O fluido adquirido pelo pedaço nC é oposto ao fluido do polo do ímã que ficou tocando essa parte da lâmina de aço.

força magnética, é chamado de *centro magnético* ou *centro de indiferença*.[139]

Caso o polo S do ímã seja deslizado ao longo da lâmina, o centro de indiferença C se aproximará do ponto s; a força austral da extremidade s vai inicialmente aumentando, até que o polo do ímã chegue a um ponto E; depois ela diminui até que o polo chegue a um ponto Q no qual ela é nula. Em seguida ela torna-se boreal e vai sempre aumentando até que o polo austral S do ímã chegue no ponto s. O que dissemos em relação ao ponto s também acontecerá com o ponto n; sua força, que inicialmente é boreal, aumentará, diminuirá, vai se tornar nula, depois austral, enquanto que o polo do ímã percorre o comprimento da lâmina.

Isso que acabamos de encontrar para o polo austral do ímã também acontecerá, *vice-versa*, se utilizarmos o polo boreal N.

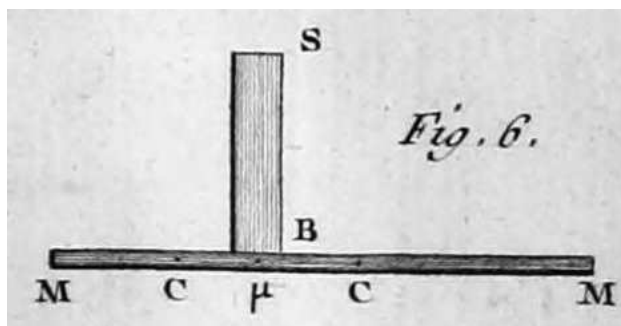
Essas experiências foram feitas por vários autores: encontramos os detalhes mais circunstanciados em uma obra de Vanswiden (*Tentamina theoriae mathematiae de phaenomenis magneticis*);[140] percebemos que, na operação que acabamos de detalhar, quando a força magnética das extremidades n ou s torna-se nula, nesse caso o centro de indiferença dessa lâmina recai nas extremidades da lâmina.

21. Em geral, ao ser aplicado o polo de um ímã a um ponto μ de uma lâmina (Figura 6), ele comunica a esse ponto uma força de nome contrário àquela do polo do ímã que toca a ponta da lâmina.[141],[142]

[139]O centro magnético é o ponto não imantado da lâmina de aço ns. Supondo que o polo austral (nosso polo Sul) do ímã fique sobre o ponto n da lâmina de aço, observa-se que a parte nC fica imantada com um fluido boreal ou fluido Norte, enquanto que a parte Cs fica imantada com um fluido austral ou fluido Sul.

[140]Jan Hendrik van Swinden (1746-1823) foi um físico e matemático holandês. O trabalho citado por Coulomb foi publicado em 1772.

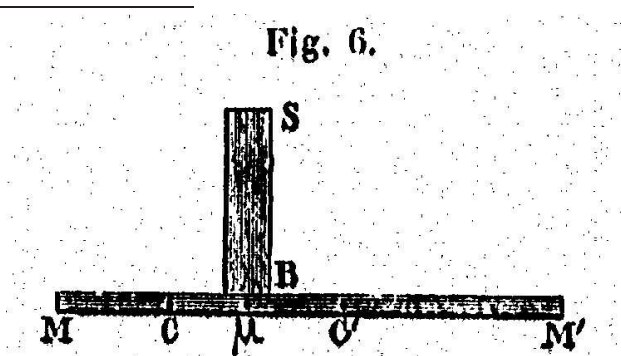
[141]Isto é, caso o polo Norte de um ímã ficar aplicado a um certo ponto de uma lâmina de aço, esse ponto ficará imantado com um polo Sul. Se aplicarmos o polo Sul do ímã a um ponto da lâmina de aço, esse ponto ficará imantado com um polo Norte.

[142] Na Figura 6 as letras C e M no lado direito devem ser substituída por C' e M', respectivamente, como corrigido na reedição de 1884 da obra de Coulomb:

Por exemplo, caso seja o polo boreal do ímã que toque o ponto μ, este ponto μ assumirá uma força austral;[143] acontecerá o mesmo para todos os pontos circunvizinhos, todos eles assumem uma força austral; essa força vai sempre diminuindo até os pontos C e C' que serão os centros magnéticos, as extremidades CM e $C'M'$ terão forças boreais. Acontecerá mais frequentemente que a extremidade mais curta $\mu M'$[144] terá uma força austral e que a lâmina se dividirá somente em duas partes por um centro C; também poderá ocorrer que ela se divida em três e quatro partes por vários centros magnéticos, o que depende da natureza dessa lâmina, de suas dimensões e da força do ímã.

Se deslizarmos o polo N do ímã ao longo da lâmina, os centros magnéticos percorrerão essa lâmina, mas o ponto sobre o qual se encontra o polo N receberá sempre uma força de um nome contrário a esse polo.

22. Resulta dessas experiências que, como o polo de um ímã produz sempre sobre a parte da lâmina onde está aplicado uma força de um nome diferente do polo que a toca, caso juntemos duas lâminas imantadas até a saturação reunindo os polos de mesmo nome, qualquer que seja a causa de sua ação, elas tendem a produzir uma sobre a outra uma força de nome contrário àquele que elas próprias são dotadas: assim o efeito dessa ação deve diminuir a força polar de cada uma dessas lâminas.

Consequentemente, a força magnética de cada elemento longitudinal de um ímã artificial

---

Além disso, a letra B na extremidade inferior do ímã vertical representa um polo boreal, ou seja, um polo Norte. Na Figura 5 esse polo boreal foi representado pela letra N de polo Norte.

[143]Isto é, ficará imantado com um polo austral, oposto ao polo do ímã que está tocando esse pedaço da lâmina de aço.

[144]Para que o texto original de Coulomb fique de acordo com sua Figura 6 como indicado na Nota de rodapé 142, devemos substituir aqui a expressão "extremidade mais curta" por "extremidade mais longa". Ou então mantemos essa expressão "extremidade mais curta $\mu M'$," só que então as letras C e M no lado esquerdo da Figura 6 original de Coulomb é que têm de ser substituídas por C' e M'.

diminui necessariamente na medida em que aumenta sua espessura; dessa forma a força total de dois ímãs artificiais do mesmo comprimento, mas de espessuras desiguais, com os dois imantados até a saturação, terá, portanto, uma proporção menor do que a proporção de suas massas.

23. Caso, em vez de tocar um polo de um ímã a uma lâmina de aço, o aproximarmos somente a uma ou duas linhas de distância,[145] teremos os mesmos fenômenos que aqueles descritos no Artigo 21, contudo o grau de magnetismo adquirido pela lâmina será menor do que no primeiro caso.

Assim, cada ponto de um ímã ou de uma lâmina imantada pode ser considerado como o polo de um pequeno ímã, que tende a produzir nos outros pontos dessa lâmina uma força [isto é, um polo] de nome contrário àquele que o próprio ponto possui, e o efeito dessa ação será maior por quão maior for a intensidade da força do ponto que age e por quão menor for sua distância aos pontos sobre os quais ele age; assim a força magnética de um ímã depende da ação recíproca que todos os pontos desse ímã exercem entre si.

24. Se desenvolvermos os raciocínios anteriores, veremos que, como a ação sentida por um ponto magnético aumenta necessariamente, na medida em que aumenta a intensidade da força dos outros pontos que formam a lâmina, na medida em que aumenta o número dos pontos que agem sobre ele e que eles exercem suas ações a uma distância menor, quanto mais próximos estiverem os pontos de um ímã artificial da forma desse ímã, maior será a ação que as partes diferentes exercem entre si para destruir suas forças recíprocas e, consequentemente, menor será a força de cada ponto.

Assim, entre duas lâminas de mesmo peso e de mesmo comprimento, o magnetismo será maior naquela que tiver a maior largura, já que as fibras longitudinais serão mais isoladas na lâmina maior.

Assim, caso uma lâmina seja separada em duas partes, cada uma delas imantada até a saturação receberá em particular um maior grau de magnetismo do que quando estavam reunidas.

Assim, entre todos os formatos, a forma cilíndrica sendo para os bastões de aço aquela na qual as partes no mesmo comprimento estão mais próximas para o mesmo peso, ela será também aquela forma na qual a ação mútua das partes magnéticas elementares[146] será maior e, consequentemente, aquela na qual será menor o magnetismo.

Ao prosseguir com essas analogias, encontraremos que os pontos da superfície de uma lâmina serão necessariamente dotados de uma força magnética maior do que os pontos no interior dessa lâmina, já que as partes interiores são cercadas de todos os lados por elementos que tendem a destruir sua força magnética, ao passo que, nas superfícies, há apenas um lado que está em contato.

Encontraremos igualmente que as extremidades dos bastões imantados são as partes que adquirem o maior grau de magnetismo, já que são as partes mais isoladas.

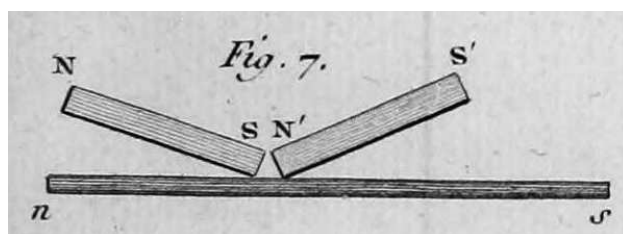
Enfim, concluímos que para espessuras iguais, as extremidades de uma longa lâmina

[145]Isto é, 0,226 ou 0,452 cm.

[146] O que Coulomb chama aqui de *parties aimantaires* está sendo traduzido por "partes magnéticas elementares" (elementary magnetic parts), [Gillmor, 1971a, pág. 217]. Uma outra possibilidade de tradução é por "partículas magnéticas" (die magnetischen Theilchen), [Coulomb, 1890c, pág. 37].

imantada até a saturação e, portanto, cujo centro magnético encontra-se no meio [da lâmina], terão menos força que as extremidades de uma lâmina pequena, já que no primeiro caso há um número maior de partes que agem do que no segundo caso, etc.

25. A partir dessas reflexões, podemos extrair várias consequências sobre a escolha das lâminas imantadas para a construção de bússolas; contudo, antes de terminarmos essa discussão, relataremos várias experiências que nos ajudarão a desenvolver essa teoria de uma maneira mais segura e precisa.

26. Utilizamos, nas experiências descritas a seguir, com o intuito de imantar as lâminas até a saturação, duas barras de aço, cujo comprimento [de cada barra] era de 12 polegadas (32,48 cm), a largura de 1 polegada (2,71 cm), e a espessura de 5 linhas (1,128 cm). Imantamos, pelo método de toque duplo, tal como prescrito pelos Srs. Antheaume e OEpinus.[147] Ele consiste em inclinar os dois ímãs artificiais sobre a lâmina que queremos imantar, de tal forma que o polo austral S da barra NS (Figura 7) esteja a apenas uma ou duas linhas [0,226 ou 0,452 cm] do polo boreal N' da barra $N'S'$.

Nessa situação, deslizamos os dois ímãs de uma extremidade à outra da lâmina; quando a lâmina tem uma pequena espessura e apenas 7 a 8 polegadas de comprimento [18,95 a 21,66 cm], é raro que ela não seja imantada até a saturação após sete ou oito atritos um pouco lentos sobre cada uma das faces. Podemos nos assegurar que a lâmina está imantada até a saturação quando, suspensa horizontalmente, ela continua a realizar o mesmo número de oscilações no mesmo tempo, qualquer que seja o número de vezes que ela tenha sido novamente atritada ou ainda que você utilize outros ímãs em vez dos primeiros.[148]

Utilizamos em todas as experiências, um aço muito puro e de mesma textura: todas as lâminas foram obtidas de uma serra alemã com uma espessura aproximadamente uniforme, mas tivemos o cuidado de aplainá-la durante muito tempo a frio com o martelo. A experiência ensinou que esta é a única maneira de ter resultados controlados e de evitar as desigualdades causadas pela diferença da posição das partes e das quais nenhuma hipótese pode explicar.

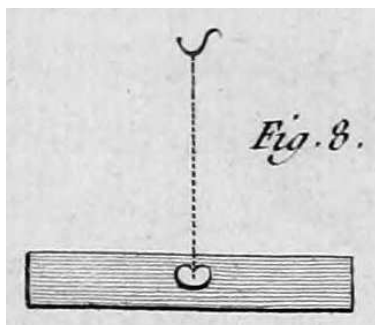
Quando uma lâmina foi imantada até a saturação, ela era suspensa de lado horizontalmente[149] por uma [linha de] seda bem flexível, na extremidade da qual estava fixado um

[147] Franz Ulrich Theodor Aepinus (1724-1802) foi um físico alemão que realizou muitas pesquisas originais sobre eletricidade e magnetismo. Sua obra principal foi publicada em 1759, *Ensaio sobre a Teoria da Eletricidade e do Magnetismo*, [Aepinus, 1759] com tradução para o inglês em [Aepinus, 1979]. Ver ainda [Heilbron, 1981a] e [Blondel and Wolff, 2013c]. Antheaulme (e não Antheaume como escreve Coulomb) publicou em 1760 o trabalho *Sur les Aimans Artificiels*, [Antheaulme, 1760].

O método de toque duplo é discutido na Seção 4.6.

[148] Ver a Seção 4.6 na página 43.

[149] No original: *on la suspendait de champ horizontalement*. Seja uma lâmina no formato de um parale-

pouco de cera que era colado nessa lâmina (Figura 8).

Tínhamos certeza, pelas experiências que explicaremos a seguir, que a torção da seda não podia influenciar em nada sobre o tempo das oscilações.[150] Medíamos com cuidado o tempo gasto pela lâmina para fazer 20 oscilações. Cada operação era repetida duas vezes, em seguida cortávamos uma polegada [2,7 cm] de cada lado da lâmina, o restante estando imantado até a saturação. Realizávamos as mesmas operações que haviam sido feitas sobre a primeira lâmina.

A lâmina oscilava dentro de uma caixa bem fechada, para que as correntes de ar que ocorriam no lugar não atrapalhassem de forma alguma as experiências. Essa precaução é indispensável principalmente quando há fogo.

5.2.2 Experiências para Determinar a Força Magnética das Lâminas Considerando Seu Comprimento

Primeira Experiência

27. A lâmina tinha 3 linhas (0,677 cm) de largura, um comprimento de 1 pé (32,48 cm), pesava 288 grãos (15,30 g).[151] Ela fazia suas oscilações [nos seguintes tempos], a saber:

Comprimentos	Duração de 20 oscilações s
16 polegadas (43,31 cm)	231
12 polegadas (32,48 cm)	180
10 polegadas (27,07 cm)	154
8 polegadas (21,65 cm)	126
6 polegadas (16,24 cm)	98
4 polegadas (10,83 cm)	80

lepípedo com comprimento C, largura L e espessura E tal que $C > L > E$. Diz-se que ela está suspensa de lado quando o comprimento C e a espessura E estão na horizontal, enquanto que a largura L está na vertical.

[150] Depois que a lâmina está em repouso, ela é girada de um certo ângulo ao redor do eixo vertical que coincide com a linha de seda e solta do repouso. As experiências de Coulomb mostraram que o número de oscilações que ela realiza por unidade de tempo não depende desse ângulo inicial. Nas próximas experiências Coulomb não vai nem mesmo mencionar quais foram esses ângulos iniciais.

[151] Supondo uma lâmina de aço com uma densidade de massa de 8×10^3 kg/m^3 vem que sua espessura seria de 0,087 cm.

Segunda Experiência

A lâmina tinha 8 linhas (1,805 cm) de largura, um comprimento de 1 pé (32,48 cm), pesava 976 grãos (51,83 g). Ela fazia suas oscilações, a saber:

Comprimentos	Duração de 20 oscilações s
16 polegadas (43,31 cm)	254
12 polegadas (32,48 cm)	202
8 polegadas (27,07 cm)	154
4 polegadas (21,65 cm)	104

Terceira Experiência

Essa lâmina tinha 12 linhas (2,71 cm) de largura, um comprimento de 1 pé (32,58 cm), pesava 1105 grãos (58,70 g). Ela fazia suas oscilações, a saber:

Comprimentos	Duração de 20 oscilações s
16 polegadas (43,31 cm)	250
12 polegadas (32,48 cm)	205
8 polegadas (27,07 cm)	153
4 polegadas (21,65 cm)	110

Resultados dessas Três Experiências

Na primeira experiência, temos, para uma lâmina com 12 polegadas de comprimento e 3 linhas de largura, 20 oscilações em 180 s. Na primeira experiência temos, para uma lâmina de 4 polegadas de comprimento e tendo de resto as mesmas dimensões que a [lâmina] anterior, 20 oscilações em 80 s. Assim, a diferença de tempo, para 20 oscilações nessas duas lâminas, é de 100 s.

Na segunda experiência temos, para uma lâmina de 8 linhas de largura e 12 polegadas de comprimento, 20 oscilações em 202 s; para essa mesma lâmina reduzida a 4 polegadas, encontramos 20 oscilações em 104 s. Assim, a diferença de tempo, para uma diminuição de comprimento igual a 8 polegadas, encontra-se para 20 oscilações [um valor de] 98 s.

Na terceira experiência encontramos, para uma lâmina de 12 linhas de largura e 1 pé de comprimento, 20 oscilações em 205 s. Temos, para a mesma experiência, para uma lâmina de 4 polegadas, 20 oscilações em 110 s, o que fornece, para uma diminuição de 8 polegadas, no tempo de 20 oscilações, uma diminuição de 95 s.

Ao comparar agora esses três resultados, vemos que uma diminuição igual nos comprimentos fornece, praticamente, a mesma diminuição nos tempos das oscilações. Assim, a largura das lâminas influencia muito pouco nessa diminuição.

Se compararmos, em cada experiência particular, a diminuição dos tempos de oscilação com o encurtamento das lâminas, veremos que esse tempo diminui, praticamente, por quantidades que são proporcionais às diminuições das lâminas.

Por essas experiências vemos ainda que o tempo total das oscilações é maior, com espessuras e comprimentos iguais, para as lâminas largas do que para as lâminas estreitas. É

o que resulta evidentemente da primeira experiência comparada com a terceira, é o que a teoria havia anunciado. A segunda experiência comparada com a terceira parece fornecer um resultado contrário. Mas, se prestarmos atenção que a segunda lâmina, embora mais estreita que a terceira, é proporcionalmente mais pesada e, consequentemente, mais espessa, veremos que elas fornecem um resultado exatamente em conformidade com a teoria do magnetismo.

Quarta Experiência

28. Tentamos determinar nessa experiência se, ao aumentar a espessura das lâminas, o aumento do tempo de oscilação continuava a ser proporcional ao aumento dos comprimentos das lâminas, como nos Artigos anteriores.

A lâmina de que nos servimos nessa experiência era da mesma natureza que as anteriores. Ela tinha 3 linhas de largura [0,677 cm] como aquela lâmina da primeira experiência, mas sua espessura era um pouco mais que o triplo [da lâmina da primeira experiência] e as 12 polegadas de comprimento [32,48 cm] pesavam 936 grãos (49,71 g). Ela fornecia suas oscilações, a saber:

Comprimentos	Duração de 20 oscilações s
12 polegadas [32,48 cm]	229
10 polegadas [27,07 cm]	208
8 polegadas [21,65 cm]	176
6 polegadas [16,24 cm]	151
4 polegadas [10,83 cm]	128

Resultado Dessa Experiência

Se subtrairmos dessa experiência do tempo que uma lâmina de 12 polegadas utiliza para fazer 20 oscilações, o tempo que uma lâmina de 4 polegadas de comprimento utiliza para fazer as mesmas 20 oscilações, encontramos 101 s, quantidade quase exatamente a mesma que aquela que encontramos na primeira experiência. Assim, parece que a espessura não afeta em nada o aumento do tempo das oscilações que é sempre proporcional ao aumento dos comprimentos.

29. Ao reunir agora os resultados de todas as experiências anteriores, veremos facilmente que o tempo T de um certo número de oscilações pode sempre ser representado, para as lâminas de uma espessura e de uma largura uniforme, por uma grandeza $(A + ml)$, na qual A exprime uma função da espessura e da largura, e (ml) é o produto de um coeficiente constante pelo comprimento l; a quantidade A aumenta na medida em que aumentam a largura e a espessura: ela será maior para um bastão cilíndrico do que para um outro formato.

O coeficiente constante m depende da natureza do aço e do grau de magnetismo do qual ele é suscetível. Esse coeficiente será maior na medida em que o aço ou o ferro será menos suscetível de magnetismo. Nos fios de ferro comuns no comércio, encontramos na média que uma diminuição de 8 polegadas [21,65 cm] no comprimento produz uma diminuição de 120 s para 20 oscilações. Vamos agora determinar a grandeza A.

5.2.3 Experiências Relativas à Largura das Lâminas

Quinta Experiência

Buscamos, nessa experiência, encontrar uma relação entre o tempo das oscilações e a largura das lâminas. Pegamos, consequentemente, uma lâmina de 4 polegadas [10,83 cm] de comprimento e 1 polegada [2,71 cm] de largura, a qual dividimos exatamente em 36/3 linhas. Essa lâmina, de uma espessura uniforme, pesava 378 grãos (20,08 g). Após ter sido imantada até a saturação, ela foi suspensa como as lâminas dos Artigos anteriores e determinamos o tempo no qual ela realizava 20 oscilações. Em seguida subtraímos uma parte de sua largura. A parte restante foi novamente imantada até a saturação e medimos o tempo que ela empregava para fazer 20 oscilações, continuando essa operação diminuindo pouco a pouco a largura da lâmina, encontramos, a saber:

	Largura das lâminas	Duração de 20 oscilações s	A s
Primeiro teste	36/3 linhas (2,707 cm)	114	65
Segundo teste	22/3 linhas (1,654 cm)	99	50
Terceiro teste	13/3 linhas (0,997 cm)	83	34
Quarto teste	7/3 linha (0,526 cm)	74	25
Quinto teste	3/3 linha (0,226 cm)	68	19

Resultado Dessa Experiência

A expressão geral do tempo das oscilações é representada pela grandeza $(A+ml)$. Ora, uma diminuição de 8 polegadas [21,65 cm] no comprimento das lâminas produz (experiências 1, 2, 3), para 20 oscilações, uma diminuição de 98 s, aproximadamente o valor médio entre (100 e 95) dados pela primeira e pela terceira experiência. Assim, a lâmina tinha aqui 4 polegadas de comprimento, ml será igual a 49 s e a expressão geral torna-se $T = (A + 49 \text{ s})$. Assim, ao subtrair em toda parte, nessa experiência, 49 s do tempo de 20 oscilações, teremos a grandeza A designada no fim de cada teste.

Mas acabamos de ver, no Artigo anterior, que essa grandeza é igual a uma função da largura e da espessura. Assim, caso essa função possa ser representada por um único termo, teremos $A = nL^\mu E^\nu$, sendo n um coeficiente constante, L^μ uma potência μ da largura, e E^μ uma potência ν da espessura. E, como nos nossos testes a espessura era constante, devemos encontrar os valores de A proporcionais a L^μ. Assim, ao comparar duas lâminas de larguras diferentes L e L' com as grandezas que lhes correspondem, A e A', teremos[152]

$$A : A' :: L^\mu : L'^\mu \ ,$$

de onde

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{L}{L'}\right)^\mu \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{\log\left(\frac{A}{A'}\right)}{\log\left(\frac{L}{L'}\right)} \ .$$

[152] Isto é,

$$\frac{A}{A'} = \frac{L^\mu}{L'^\mu} \ .$$

Agora é fácil, ao substituir no lugar de A e no lugar de L seus valores numéricos fornecidos em cada teste, descobrir [o valor] da grandeza μ.

Primeiro e Quinto Testes

Uma lâmina de 36/3 linhas de largura fornece $A = 65$ s.
Uma lâmina de 3/3 linha de largura fornece $A = 19$ s.

Resulta desses dois testes:

$$\mu = \frac{\log\left(\frac{65}{19}\right)}{\log\left(\frac{36}{3}\right)} = 0,4951 \ .$$

Primeiro e Quarto Testes

Uma lâmina de 36/3 linhas de largura fornece $A = 65$ s.
Uma lâmina de 7/3 linhas de largura fornece $A = 25$ s.

Resulta desses dois testes:

$$\mu = \frac{\log\left(\frac{65}{25}\right)}{\log\left(\frac{36}{7}\right)} = 0,5835 \ .$$

Primeiro e Terceiro Testes

Resulta desses dois testes $\mu = 0,6363$.

Primeiro e Segundo Testes

Resulta desses dois testes $\mu = 0,5330$.

Embora o valor de μ não seja perfeitamente igual em todas essas comparações, as diferenças são muito pequenas para que elas possam ser atribuídas a outra coisa que não à imperfeição das operações, e podemos, sem erro perceptível para a prática, supor $\mu = 1/2$.

Experiências semelhantes, feitas com lâminas de 6 e de 8 polegadas de comprimento, me forneceram os mesmos resultados, e a grandeza μ jamais diferiu de 1/6 de seu valor 1/2. Não se deve, além disso, esperar nessas experiências uma grande exatidão: quaisquer partes heterogêneas são suficientes para produzir essas diferenças.

5.2.4 Experiências Relativas à Espessura das Lâminas

Sexta Experiência

31. Para ter uma teoria completa das lâminas imantadas, só falta determinar como a espessura aumenta o tempo das oscilações. Aqui vão os diferentes testes que realizamos para nos assegurar disso:

Primeiro teste. Uma lâmina de 4 polegadas de comprimento, de 3 linhas de largura, pesando 310 grãos (16,46 g), foi imantada até a saturação. Ela realizou 20 oscilações em 136 s, o que fornece $A = 87$ s.

Segundo teste. Polimos com uma lima a superfície da lâmina do teste anterior sem diminuir sua largura. Essa lâmina ficou reduzida a 200 grãos (10,60 g), foi imantada até a saturação e realizou 20 oscilações em 112 s, o que fornece $A = 63$ s.

Terceiro teste. [A mesma lâmina] foi reduzida pela mesma operação a 104 grãos (15,52 g) ou um terço de sua espessura inicial, ela realizou 20 oscilações em 79 s, de onde $A = 30$ s.

Quarto teste. Reduzida na pedra de amolar a 64 grãos (3,40 g), ela realizou 20 oscilações em 70 s, de onde $A = 21$ s.

Quinto teste. Reduzida a 33 grãos (1,75 g), ela realizou 20 oscilações em 60 s; resultando $A = 11$ s.

Resultado Dessa Experiência

As espessuras das lâminas estão entre si, nos cinco testes, aproximadamente como os números 3, 2, 1, 2/3, 1/3, a quantidade A correspondente é expressa pelos números 87, 63, 30, 21, 11 que diferem muito pouco de estar na mesma razão que as primeiras.[153] Assim, podemos deduzir que a grandeza A cresce proporcionalmente à espessura, e a forma geral $T = A + ml$, que exprime o tempo de um certo número de oscilações, torna-se

$$T = \left(nL^{1/2}E + ml\right) \ .$$

5.2.5 Lâminas Compostas

32. Para poder perceber mais exatamente a concordância da teoria do magnetismo com a experiência, para poder penetrar no interior das barras imantadas, juntamos várias lâminas que se tocavam exatamente por todos os pontos de suas superfícies. Elas foram fixadas juntas em suas extremidades e nos seus centros, por três pequenos laços de seda bem leves. Os feixes assim compostos foram imantados até a saturação, eles foram suspensos e colocados a oscilar, para ver seus graus de magnetismo. Ao decompor em seguida esses feixes, fizemos com que cada lâmina em particular oscilasse, para poder comparar uma à outra. Aqui vão os resultados de algumas dessas experiências.

Sétima Experiência

33. *Primeiro teste*. Uma única lâmina de 4 polegadas de comprimento, 3 linhas de largura, pesando 108 grãos [5,74 g], realizou 20 oscilações em 80 s, de onde $A = 31$ s.

Segundo teste. Duas lâminas de mesmas dimensões que a primeira foram reunidas o mais exatamente que era possível. Elas formavam uma única lâmina que tinha o dobro de espessura da primeira, e que pesava 218 grãos. Ela realizou suas 20 oscilações em 114 s, de onde $A = 65$ s.

Terceiro teste. Três lâminas reunidas da mesma maneira que as duas anteriores realizaram suas 20 vibrações em 139 s, de onde $A = 90$ s.

Quarto teste. Cinco lâminas reunidas realizaram suas 20 oscilações em 190 s, de onde $A = 141$ s.

[153]Isto é, a razão entre as grandezas A estão entre si como a razão entre as espessuras.

Quinto teste. Oito lâminas reunidas realizaram suas 20 oscilações em 242 s, de onde $A =$ 193 s.

Resultado Dessa Experiência

Segue-se dessa experiência, comparada com a sexta, que um feixe de lâminas assume aproximadamente o mesmo grau de magnetismo que uma única lâmina do mesmo formato e do mesmo peso, consequentemente [segue-se] que a grandeza A é proporcional às espessuras. É o que ainda resulta aqui dos três primeiros testes. Mas, se compararmos o primeiro e o quinto testes, encontraremos na grandeza $A = nL^\mu E^\nu$, que

$$\nu = 0,7783 \ ,$$

quantidade menor que a unidade. De onde parece que é necessário concluir que quando a espessura é bem considerável, todo o resto estando igual, a grandeza A cresce em uma razão menor do que as espessuras. Mas essa observação, que parece dever introduzir um segundo termo na função das larguras e espessuras que representa a grandeza A, influencia apenas nas barras de uma grande espessura, e não sobre as lâminas de bússola, que a teoria do magnetismo nos mostrou que devem ser grandes e leves.

Oitava Experiência

34. Para obter agora a força magnética das diferentes lâminas reunidas na experiência anterior, separei os feixes, e fiz cada lâmina oscilar em particular.

Primeiro teste. Um feixe de três lâminas, que fazia suas 20 oscilações em 139 s, ao ser decomposto, as duas lâminas das superfícies fizeram suas 20 oscilações, uma em 100 s, a outra em 114 s; a lâmina do centro não forneceu qualquer sinal de magnetismo.

Segundo teste. O feixe de oito lâminas, que realizava suas 20 oscilações em 242 s, ao ser decomposto, forneceu para cada lâmina particular o mesmo número de oscilações na ordem que segue:[154]

[154]Creio que essa Tabela saiu errada. Como só há duas lâminas de superfície, uma em cada extremidade do feixe, o correto deve ser:

		Duração de 20 oscilações s
I	Lâmina da superfície	91
II	Lâmina	231
III	Lâmina	278
IV	Lâmina	211
V	Lâmina	222
VI	Lâmina	237
VII	Lâmina, os polos invertidos	237
VIII	Lâmina da superfície	90

		Duração de 20 oscilações s
I	Lâmina da superfície	91
II	Lâmina da superfície	231
III	Lâmina da superfície	278
IV	Lâmina da superfície	211
V	Lâmina da superfície	222
VI	Lâmina da superfície	237
VII	Lâmina, os polos invertidos	237
VIII	Lâmina da superfície	90

Terceiro teste. Como eu poderia supor que a matéria magnética estava, nos dois testes anteriores, em uma situação forçada, já que os feixes foram decompostos somente algumas horas após terem sido imantados, aqui vai o que fizemos para conhecer o magnetismo de cada lâmina, quando ela havia chegado a um estado estável.

Pegamos um feixe formado de cinco lâminas, nas quais havíamos eliminado com cuidado todo o magnetismo, antes de reuni-las. Em seguida imantamos esse feixe até a saturação, ele realizou 20 oscilações em 190 s. Deixamos esse feixe durante dois meses sem o desunir, para que, caso a matéria magnética estivesse em um estado forçado, ela tivesse tido o tempo de se distribuir, adotando uma situação natural. Ao fim desses dois meses, procuramos saber qual era a força magnética de cada lâmina, e aqui vai o que encontramos.

Estando todas as lâminas reunidas, [realizaram] 20 oscilações em 196 s.

O feixe de cinco lâminas decomposto:

		Duração de 20 oscilações s
I	Lâmina da superfície	105
II	Lâmina	438
III	Lâmina	340
IV	Lâmina	320
V	Lâmina da superfície	98

Resultado Dessa Experiência

A força magnética de cada uma das lâminas das experiências anteriores, sendo inversamente proporcional ao quadrado dos tempos de suas oscilações, resulta que a força magnética das lâminas interiores é muito menor do que a força magnética das [lâminas das] superfícies. Isso acontece mesmo que às vezes, ao decompor os feixes, os polos de uma ou de várias lâminas estejam invertidos. É isso que observei no segundo teste para a sétima lâmina.

O último teste, que foi feito com muito cuidado, nos prova que a força magnética das partes interiores das barras imantadas é quase nula em relação à força magnética das superfícies.

Contudo, devemos observar que o *momento* magnético das lâminas interiores[155] não é provavelmente o mesmo quando as lâminas estão reunidas.[156] E, quando elas estão separadas, encontrei quase sempre, ao calcular o *momento* magnético da cada lâmina em particular, que a soma desses *momentos* era maior do que o *momento* do feixe antes da separação. O que surge provavelmente do fato de que o estado magnético de cada lâmina, que é dependente da ação mútua de todas as lâminas que compõem o feixe, esse estado muda quando as lâminas são separadas.

Nona Experiência

35. Entre duas lâminas de 8 linhas (1,805 cm) de largura e 4 polegadas (10,83 cm) de comprimento pesando cada uma 244 grãos (12,97 g), inserimos uma terceira lâmina com as mesmas dimensões, mas dividida ao longo de seu comprimento em três outras lâminas. A lâmina do centro tinha 4 linhas de largura, aquelas das duas bordas tinham cada uma 2 linhas; a lâmina de 4 linhas encontrava-se localizada consequentemente no centro do feixe que foi imantado até a saturação. Aqui vai o resultado que me pareceu interessante para a teoria do magnetismo.

O feixe realizou 20 oscilações em 172 s.

Ao decompor o feixe:

As lâminas de 8 linhas de cada superfície realizaram suas 20 oscilações em 123 s.

As lâminas de 2 linhas que formavam as bordas da lâmina central, [realizaram] 20 oscilações em 124 s.

A lâmina central de 4 linhas de largura realizou suas 20 oscilações em 128 s. Mas seus polos estavam em uma posição contrária aos polos do feixe, de tal forma que sua extremidade boreal estava localizada na extremidade austral do feixe.

Resultado Dessa Experiência

Segue-se evidentemente dessa experiência que pode acontecer frequentemente que as partes centrais das barras imantadas tenham uma força de nome contrário à força das partes vizinhas.[157]

36. Realizamos um grande número de experiências do mesmo tipo, seja juntando várias lâminas para aumentar as espessuras, seja juntando as mesmas lâminas ao longo de seus comprimentos. Dessa forma compusemos feixes com arames de aço muito finos. Mas todas essas experiências, que nos pareceram apropriadas para esclarecer a teoria do magnetismo, não possuem uma relação tão direta com o assunto principal dessa Memória, para encontrar um lugar aqui. Aconteceu o mesmo com todas as experiências que pudemos fazer com as lâminas que inicialmente imantávamos até a saturação, cada uma em particular, sendo que em seguida formávamos os feixes. Quando as separávamos, a força magnética das lâminas

[155] No original: *momentum magnétique des lames intérieures*. Coulomb está se referindo aqui à magnetização das lâminas interiores. O torque magnético exercido pela Terra sobre essas lâminas imantadas é proporcional à magnetização das lâminas.

[156] Ou seja, ao reunir várias lâminas imantadas, Coulomb encontrou que a imantação das lâminas que ficavam no centro diminuía em relação à imantação delas quando estavam isoladas das outras lâminas.

[157] Isto é, tenham um um tipo de fluido magnético de nome contrário ao fluido das partes vizinhas.

centrais havia quase desaparecido, ou ao menos era pouco maior do que nas experiências do Artigo 34.

5.2.6 Reflexão sobre a Fórmula Geral $T = \left(mL^{1/2}E + nl\right)$

37. Podemos nos assegurar que a fórmula $T = mL^{1/2}E + nl$ foi confirmada por um grande número de experiências, e que ela sempre anunciou os resultados de uma forma tão exata quanto podemos esperar na prática.

Vamos agora compará-la com as fórmulas do movimento oscilatório, determinadas no Artigo 7, e vamos tirar daí as consequências que podem estar relacionadas com nosso assunto.

Encontramos (Artigo 11):

$$\int \varphi\mu r = \frac{\pi^2 \int \mu r^2}{T^2} \ .$$

Por outro lado temos, para as lâminas com uma largura e espessura uniformes, nas quais supomos a densidade [de massa] igual à unidade,[158]

$$\int \mu r^2 = \frac{2LEl^3}{3} \ .$$

Substituindo esses dois valores e fazendo $K = 2\pi^2/3$, teremos

$$\int \varphi\mu r = \frac{K \cdot LE \cdot l^3}{\left(mL^{1/2}E + nl\right)^2} \ .$$

Essa equação apresenta o seguinte resultado:

38. O *torque* da força magnética $\int \varphi\mu r$ cresce com o comprimento da lâmina e torna-se infinito quando esse comprimento é infinito.

39. Esse mesmo *torque* cresce na medida em que aumenta a largura L. E, quando essa largura torna-se infinita, ele será igual a $Kl^3/(m^2E)$.

40. Se diferenciarmos essa equação tornando apenas E variável, encontraremos, para o *máximo* de $\int \varphi\mu r$:

$$\frac{dE}{E} = \frac{2mL^{1/2}dE}{mL^{1/2}E + nl} \qquad \text{e} \qquad E = \frac{nl}{mL^{1/2}} \ .$$

41. Se dividirmos $\int \varphi\mu r$ pela seção transversal LE, teremos o *torque* médio da força magnética de cada fibra longitudinal, das quais podemos supor que a lâmina é formada. Isso fornecerá

[158]Ver a Nota de rodapé 128 na página 61.

$$\frac{\int \varphi \mu r}{LE} = \frac{Kl^3}{(mL^{1/2}E + nl)^2} ,$$

quantidade essa que aumenta na medida em que a quantidade l aumenta, torna-se infinita com essa quantidade [l], aumentará igualmente na medida em que L ou E diminuem, e será igual a Kl/n^2 quando L ou E são nulas. Isso fornece, nesse último caso, o *torque* proporcional ao comprimento da lâmina. Encontramos aqui a fórmula do Sr. Musschenbroek, que é verdadeira apenas quando L ou E podem ser supostas infinitamente pequenas, ou quando a grandeza $mL^{1/2}E$ pode ser desprezada. Mas ainda, nesse caso, o peso não aparece nessa expressão, o que é novamente contrário à teoria desse autor.

5.3 Capítulo III. Experiências e Teoria sobre a Força de Torção dos Fios de Cabelo e de Seda. — Comparação Dessas Forças com a Força Magnética. — Sobre a Resistência do Ar nos Movimentos Muito Lentos. — Construção de uma Nova Bússola de Declinação Apropriada para Observar as Variações Diurnas

42. Todos os meios que podemos empregar para suspender uma agulha de declinação trazem necessariamente inconvenientes. Caso ela seja suspensa por um fio de seda ou por um fio de cabelo, sempre será necessário que a bússola utilize uma certa força para os torcer. E, caso seja suposto que a seda está torcida quando a agulha estiver sobre seu meridiano [magnético] verdadeiro, a seda fará um esforço para ir a outra direção.

Caso a agulha seja suportada, por meio de uma capa,[159] sobre a ponta de um pivô, não importando quão perfeita seja essa capa, não importando quão rígida seja a ponta do pivô, a capa pressionará todo o peso da agulha sobre a ponta do pivô. Ora toda pressão produz atrito. Portanto, assim que o *torque* da força magnética for igual ao *torque* do atrito, a agulha ficará sem ação para se restabelecer ao longo de seu meridiano magnético.[160]

Além das dificuldades apresentadas pelos meios de suspensão, há uma outra dificuldade que provém da coesão do ar. Todo fluido possui uma certa tenacidade entre suas partes. Assim, para que um corpo que está mergulhado nesse fluido possa mudar de posição, é necessário que a força que o retira de seu estado de repouso seja maior do que a resistência que essa tenacidade lhe opõe. Mas veremos agora mesmo que a resistência devida à coesão é pequena em relação à força magnética e que pode ser desprezada.

[159] Ver a Nota de rodapé 108 na página 54.

[160] Ou seja, o atrito vai impedi-la de se orientar ao longo de seu meridiano magnético.

5.3.1 Sobre a Força de Torção dos Fios de Cabelo e dos Fios de Seda

43. Não podemos citar aqui as experiências de qualquer autor,[161] mas aquelas experiências que vamos reportar aqui são tão simples, tão fáceis de repetir, que espero que elas mereçam certa confiança.

Primeira Experiência

Suspendi, com um fio de cabelo de 6 polegadas (16,24 cm) de comprimento, uma peça redonda de cobre, de 8 linhas (1,80 cm) de diâmetro e pesando 50 grãos (2,66 g), de maneira que ela estivesse suportada por seu centro C e que seu plano estivesse na horizontal. Girei essa placa ao redor de seu centro C, sem perturbá-la de sua situação horizontal. O fio AC (Figura 9) permanecendo sempre vertical, abandonei-a por si mesma [em repouso], ela assumiu um movimento oscilante de rotação ao redor de seu centro C.

Medimos o tempo de cada oscilação e encontramos que, quer essa placa fizesse uma, duas e até seis ou sete revoluções por oscilação, o tempo de cada oscilação era constante e igual a 16/2 s.[162]

Resultado Dessa Experiência

Quando um corpo suspenso por uma linha ou por um fio de cabelo é abandonado a si mesmo, ele logo chega a um estado de repouso no qual o fio que o sustenta não realiza qualquer esforço para fazê-lo girar em qualquer sentido. Esse estado é aquele que podemos chamar de situação natural do cabelo. Mas se, permanecendo imóvel o centro de gravidade, o fizermos girar ao redor desse centro, na medida em que ao girá-lo ele se afastará da situação [natural] na qual ele estava em seu estado de repouso, o fio de cabelo será torcido e, ao se torcer, fará um

[161] Ou seja, Coulomb está sendo original aqui, já que não encontrou qualquer outro cientista que tenha estudado a força de torção de fios.

[162] Como visto na Seção 6.3 na página 139, esse tempo de de 8 s para realizar cada oscilação total é o tempo para o fio de torção partir do repouso de um ângulo inicial θ_o ao redor do eixo vertical, com esse ângulo medido a partir de uma certa reta horizontal de referência fixa no laboratório, até chegar em repouso no ângulo $-\theta_o$. O período total para partir de θ_o e chegar novamente a esse ângulo θ_o é de 16 s. O que Coulomb encontrou é que o tempo de 8 s para cada oscilação total era constante, não importando se $\theta_o = 360°$, 720°, ..., ou até mesmo $\theta_o = 7 \times 360° = 2520°$.

esforço para se restabelecer na sua situação natural. Encontramos agora, nessa experiência, que esse esforço produz oscilações cujo tempo [de cada oscilação] é constante, qualquer que tenha sido o ângulo primitivo de revolução. Assim, as forças de torção que trazem um corpo à sua situação natural são necessariamente proporcionais ao ângulo de torção.[163]

Segunda Experiência

44. Buscamos saber nessa experiência se o peso do corpo suspenso pelo cabelo influencia na força de torção. Aqui vai o que encontramos.

Primeiro teste. Uma única placa, com as mesmas dimensões que na experiência anterior, suspensa por um fio de cabelo de 6 polegadas, realizou uma oscilação em 16/2 s.

Segundo teste. Colamos sob essa primeira placa, com um pouco de cera, uma segunda placa absolutamente similar à primeira. As duas peças reunidas faziam uma oscilação em 22/2 s.

Terceiro teste. Uma terceira placa, reunida às duas outras, fazia cada oscilação em 27/2 s.

Quarto teste. Uma quarta placa, reunida da mesma forma que as anteriores, fazia cada oscilação em 30/2 s.

Quinto teste. Uma quinta [placa], reunida, fazia cada oscilação em 35/2 s.

Sexto teste. Uma sexta peça [reunida às anteriores fazia cada oscilação] em 39/2 s.

Sétimo teste. Uma sétima em 42/2 s.

Resultado Dessa Experiência

Sendo a força de torção, em consequência do Artigo anterior, proporcional ao ângulo de torção, caso a diferença dos pesos não alterasse em nada a essa força, ela seria a mesma em cada teste e T^2 seria proporcional a $\int \mu r^2$, sendo T o tempo de uma oscilação, e sendo $\int \mu r^2$ a soma dos produtos (das massas) de todos os pontos da placa pelo quadrado de suas distâncias ao centro de rotação. Mas como as placas são todas iguais, $\int \mu r^2$ é como o número de placas utilizada em cada teste. Assim, basta saber se T^2 é proporcional ao número de placas.[164]

---

[163] Ou seja, os torques exercidos pelo fio de cabelo são proporcionais ao ângulo de torção. Seja um corpo rígido de momento de inércia I que pode girar de um ângulo θ em relação a um referencial inercial, sendo esse ângulo medido em relação a uma reta fixa nesse referencial. A segunda lei do movimento da mecânica para o caso de rotações é dada por $\tau = Id^2\theta/dt^2 = I\ddot{\theta}$, onde τ é o torque atuando sobre o corpo. O corpo vai descrever uma rotação harmônica periódica que não depende do ângulo inicial θ_o caso $\tau = -k\theta$, onde k é uma constante positiva. No caso da experiência de Coulomb essa constante k é chamada de coeficiente de restituição do fio, constante elástica de torção do fio, módulo elástico de torção, ou simplesmente de constante de torção. Nesse caso, supondo que o corpo parta do repouso do ângulo inicial θ_o, a solução da equação de movimento $I\ddot{\theta} + k\theta = 0$ é dada por $\theta = \theta_o \cos(\omega t)$, com $\omega = \sqrt{k/I}$ sendo a frequência angular de oscilação. O período para uma oscilação completa de ida e volta é dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/k}$, que não depende do ângulo inicial θ_o.

[164] O momento de inércia de um disco de massa M_1 e raio R ao redor de seu eixo de simetria é dado por $I_1 = M_1R^2/2$. Logo, se temos N discos iguais, o momento de inércia desse conjunto é dado por $I_N = NM_1R^2/2 = NI_1$. Da Nota de rodapé 163 na página 82 vem que o quadrado do período de oscilação para um único disco é dado por $T_1^2 = 4\pi^2 I_1/k$. Já o quadrado do período de oscilação de N discos é dado por $T_N^2 = 4\pi^2 I_N/k = N(4\pi^2 I_1/k) = NT_1^2$, caso k não dependa do peso do corpo que está dependurado no fio de cabelo. Ou seja, T_N^2 é proporcional ao número N de discos. Já o período de oscilação de N discos

	Teoria s	Experiência s
O primeiro teste, comparado com o segundo, fornece, para o tempo de oscilação de duas peças	22,6	22
Os testes I e III	27,7	27
Os testes I e IV	32	30
Os testes I e V	35,8	35
Os testes I e VI	39	39
Os testes I e VII	42,3	42

Vemos, por essa Tabela, que a experiência e a teoria possuem a maior conformidade entre si, e que assim a massa dos corpos suspensos pelos fios de cabelo ou, o que dá no mesmo, a tensão desses fios de cabelo, não tem influência na força de torção.

Contudo, é necessário notar que, quando aumentamos bastante o peso dos corpos e quando os fios de cabelo ou os fios de seda estão a ponto de se romper, a mesma lei não é observada exatamente. Nessa situação a força de torção parece bem diminuída, as oscilações não são isócronas, o tempo das grandes [oscilações] é muito maior que o tempo das [oscilações] pequenas. Nesse caso acontece que o fio, devido a uma tensão muito grande, perde sua elasticidade, aproximadamente como uma lâmina que conserva sua elasticidade apenas quando ela é curvada até um certo ponto.

Terceira Experiência

45. Buscamos determinar, nessa experiência, qual é a lei de acordo com a qual diminui a força de tensão, nos fios de cabelo, devido ao aumento de [seus] comprimentos.

Primeiro teste. Um fio de cabelo de 3 polegadas [8,12 cm] de comprimento, carregado com uma peça de cobre, similar àquelas dos Artigos anteriores, fazia cada oscilação em 11/2 s.

Segundo teste. Um fio de cabelo de 6 polegadas de comprimento, carregado da mesma peça, fazia suas oscilações em 16/2 s.

Terceiro teste. Um fio de cabelo de 12 polegadas de comprimento, ao suspender nele a mesma peça, fazia suas oscilações em 22/2 s.

Resultado Dessa Experiência

Na medida em que alongamos o fio de cabelo, a placa de cobre pode fazer um número maior de oscilações, sem aumentar a torção desse cabelo. Se, por exemplo, comparamos a torção da cada parte do cabelo quando a peça de cobre faz uma revolução com um fio de cabelo de 3 polegadas de comprimento, com a torção quando a placa faz uma revolução com um

---

deve ser proporcional à raiz quadrada de N, isto é, $T_N = (\sqrt{N})T_1$. Foi utilizando essa fórmula que Coulomb apresentou os resultados teóricos esperados que se encontram na segunda coluna da Tabela a seguir. Por exemplo, como o período encontrado para um único disco foi de 16 $s/2$, o período esperado para dois discos iguais é dado por $(\sqrt{2})16\ s/2 = 22,6\ s/2$.

Na Tabela apresentada a seguir faltou dividir por 2 todos os tempos da segunda e da terceira colunas.

cabelo de 6 polegadas, a torção de cada parte do cabelo encontrar-se-á dobrada no primeiro caso em relação ao que ela está no segundo caso. Portanto, deve-se chegar, seguindo tudo o que conhecemos da ação das molas, que a reação da torção também deve ser dobrada no primeiro caso. Assim as forças de torção devem, para revoluções iguais, estar em razão inversa dos comprimentos [dos fios].[165] Mas as fórmulas do movimento oscilatório isócrono nos fornecem as forças [de torção, ou seja, os torques,] em razão inversa do quadrado dos tempos das oscilações. Assim, os quadrados dos tempos devem encontrar-se em razão direta dos comprimentos dos fios de cabelo. Comparemos essa teoria com a experiência.[166]

	Teoria	Experiência
Os testes I e II fornecem	15/2 + 1/4 s	16/2 s
Os teste I e III	22/2 s	22/2 s

Portanto, aqui a experiência e a teoria concordam entre si para provar que as forças de torção estão, para revoluções iguais, em razão inversa dos comprimentos dos fios de cabelo.

Quarta Experiência

46. Enfim, buscamos determinar como o diâmetro dos fios homogêneos de cabelo ou de seda influenciam na força de torção. Não apresentarei aqui o detalhe dessas experiências que pude fazer sobre esse assunto, já que a dificuldade de medir o diâmetro de um fio de cabelo ou de um fio de seda muito fino e de se assegurar que ele é homogêneo ao longo de todo o seu comprimento fez com que os resultados [das experiências] variassem. Mas encontramos bem geralmente, ao comparar um grande número de experiências que, para fios de seda homogêneos e de mesmo comprimento, as forças de torção estavam, para revoluções iguais, em razão tripla dos diâmetros.[167]

Repetimos essas mesmas experiências com fios de seda com os quais nos servimos preferencialmente para suspender as agulhas de bússola, pois encontramos que para forças iguais eles são infinitamente mais flexíveis que os primeiros,[168] e encontramos as mesmas leis que nas experiências anteriores.[169]

---

[165]Ou seja, os torques exercidos pelos fios de cabelo devem ser inversamente proporcionais aos comprimentos dos fios.

[166]Foi visto na Nota de rodapé 163 na página 82 que o período para uma oscilação harmônica é dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/k}$, sendo I o momento de inércia do corpo e k o coeficiente de torção do fio. Portanto, T^2 é inversamente proporcional ao coeficiente k. Caso k seja inversamente proporcional ao comprimento ℓ do fio, teremos T^2 proporcional a este comprimento ℓ. Já T deve ser proporcional a $\sqrt{\ell}$. Logo, se um fio de comprimento ℓ_1 realiza suas oscilações em um período T_1, um fio com um comprimento $\ell_N = N\ell_1$ vai realizar suas oscilações em um período $T_N = (\sqrt{N})T_1$. Os resultados teóricos apresentados na próxima Tabela utilizam essa fórmula.

Por exemplo, como um fio de 3 polegadas realizou suas oscilações em 11/2 s, um fio com 6 polegadas deve realizar suas oscilações em $(\sqrt{2}) \cdot 11/2\ s = 15,556/2\ s \approx (15/2 + 1/4)\ s$. Já um fio de 12 polegadas deve realizar suas oscilações em $(\sqrt{4}) \cdot 11/2\ s = 22/2\ s$.

[167]Ou seja, os torques são proporcionais ao cubo dos diâmetros. Depois Coulomb vai se corrigir chegando em 1784 ao resultado de que os torques (ou forças de torção) são proporcionais à quarta potência dos diâmetros dos fios, [Coulomb, 1787], ver o Capítulo 7.

[168]Ou seja, os fios de seda são mais flexíveis que os fios de cabelo.

[169]Isto é, Coulomb encontrou que os torques exercidos pelos fios de seda seguem as mesmas leis que os fios de cabelo. O torque τ exercido por esses dois tipos de fio quando giram de um ângulo θ em relação à orientação relaxada pode ser escrito como $\tau = -k\theta$, que é válida mesmo para ângulos grandes de até sete

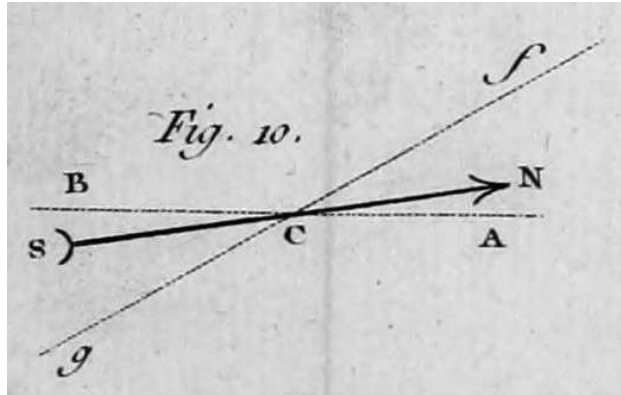
5.3.2 Comparação do *Torque* das Forças Magnéticas com o *Torque* da Força de Torção dos Fios de Seda

47. Vimos, no Artigo 6 e nos seguintes, que quando uma bússola de declinação é afastada de seu meridiano [magnético] verdadeiro de um pequeno ângulo C, o *torque*[170] de todas as forças magnéticas, para trazê-la de volta ao seu meridiano, é expresso pela grandeza $C \int(\varphi\mu r)$, e que o tempo das oscilações é dado pela equação

$$\frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2} = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 .$$

Mas acabamos de ver, pelas experiências sobre a torção, que se um corpo for suspenso por um fio de seda cujo ângulo de torção seja C', teremos aC' para o *torque* da força de torção, sendo a uma grandeza constante, e que assim teremos igualmente, para o tempo de uma oscilação:

$$\frac{a}{\int \mu' r'^2} = \left(\frac{\pi}{T'}\right)^2 .$$

Assim, tanto num caso quanto no outro, o tempo das oscilações sendo dado pela experiência, da mesma forma que as grandezas $(\int \mu r^2)$ e $(\int \mu' r'^2)$, sempre será fácil determinar, para um dado ângulo C, a razão entre o *torque* da força de torção a e da força magnética $\int(\varphi\mu r)$, e de encontrar, consequentemente, como um dado ângulo de torção pode afastar uma agulha de seu verdadeiro meridiano magnético.

Caso seja suposto que a agulha SCN (Figura 10) suspendida por um fio de seda e equilibrada horizontalmente seja afastada de seu verdadeiro meridiano [magnético] BA pelo ângulo $NCA = C$, e que o ângulo de torção [do fio] de seda que sustenta essa agulha seja $fCN = C'$, essa agulha, ao chegar a seu estado de repouso, é solicitada por duas forças, a saber, a força magnética, cujo *torque* para levá-la para $A = C \int \varphi\mu r$, e a força de torção, cujo *torque* é aC'. E, como há equilíbrio, encontramos a equação

---

voltas (ou seja, com um ângulo inicial θ_o podendo ir até $\theta_o = 7 \times 360° = 2520° = 14\pi\ rad$). Nessa equação k é uma constante positiva que Coulomb encontrou ser independente do peso do corpo que está suspenso no fio, sendo ainda inversamente proporcional ao comprimento do fio e proporcional à terceira potência do diâmetro do fio. Depois Coulomb vai se corrigir chegando ao resultado de que os torques (ou forças de torção) são proporcionais à quarta potência dos diâmetros dos fios, ver o Capítulo 7.

[170] No original: *momentum*. Ver a Nota de rodapé 116 na página 57.

$$C \int \varphi \mu r = aC' \; ;$$

de onde segue que o desvio da agulha[171] expresso por C aumentará como o produto da força de torção pelo ângulo de torção e diminuirá na medida em que aumenta a força magnética.

Portanto, é fácil suspender uma agulha de maneira que a torção da seda tenha uma influência muito pequena sobre sua orientação e que produza apenas erros imperceptíveis. Vai aqui como se pode obter isso. Inicialmente suspende-se no fio de seda que se quer utilizar uma agulha de prata ou de cobre, e fazemos isso de maneira que, quando o fio de seda chega em seu estado natural, a direção da agulha de cobre coincida com o meridiano magnético. Em seguida substitui-se a agulha de cobre por uma agulha imantada, de mesmo peso, e então estaremos certos de que a torção da seda vai influenciar apenas de uma maneira imperceptível sobre a direção da agulha, já que o ângulo de torção coincide praticamente com o meridiano magnético.

48. Mas, para dar a esses princípios todo o alcance que eles parecem merecer, pela utilidade que eles terão para nós na sequência e pelas relações que eles podem ter com as artes, vamos provar que ao suspender as agulhas imantadas por fios de seda bem finos, não torcidos, e [fortes] o bastante para sustentar dessa forma o peso sem se romper, mesmo quando supomos que o ângulo de torção seja superior a 100° com o meridiano magnético, ainda assim a força de torção será pequena, em relação à força magnética, de tal forma que ela produzirá apenas erros insensíveis.

Quinta Experiência

49. Um fio de seda, quando ele sai do casulo, suportou sem se romper um peso de 200 grãos (10,6 g). Para determinar o *torque* da força de torção, suspendemos horizontalmente nesse fio uma pequena agulha cilíndrica de cobre de 1 polegada (2,71 cm) de comprimento e 6 grãos (0,32 g) de peso. O fio de seda, desde seu fixador até o ponto de suspensão, tinha apenas uma polegada de comprimento. Giramos horizontalmente o fio de cobre [isto é, giramos a agulha de cobre] ao redor de seu centro de gravidade. Abandonado [em repouso] a si próprio, realizou suas oscilações perceptivelmente isócronas em 40 s.[172,173]

---

[171] No original: *erreur de l'aiguille*. Isto é, o ângulo de desvio da agulha em relação a seu verdadeiro meridiano magnético. Esse desvio também pode ser chamado de erro da bússola já que, devido à torção do fio de seda, ela não estará apontando no repouso ao longo do verdadeiro meridiano magnético local.

[172] [Nota de Potier:] Ou seja, um par de torção de 0,0012 para um ângulo = 1.

[173] A agulha cilíndrica tem um comprimento $\ell = 2,71\ cm = 0,0271\ m$ e uma massa $M = 0,32\ g = 0,00032\ kg$. O momento de inércia dessa agulha em relação a um eixo ortogonal a ela passando por seu centro é dado por

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \frac{M dx}{\ell} = \frac{M}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{M\ell^2}{12} \; .$$

Ou seja, nesse caso $I = 1,96 \times 10^{-8}\ kgm^2$. O torque de reação τ exercido pelo fio quando ele é torcido de um pequeno ângulo θ em relação a um referencial inercial é dado por $\tau = -k\theta$, onde k é uma constante positiva.

Como mostrado na Nota de rodapé 163 na página 82, o período T para a agulha sair e voltar ao mesmo ponto quando é solta do repouso afastada de um pequeno ângulo θ é dado por $T = 2\pi\sqrt{I/k}$. Nesse caso

Resultado Dessa Experiência

Encontramos, para um corpo que oscila devido à torção, a equação

$$a = \frac{\int \mu' r'^2}{T'^2} \pi^2 \ .$$

Denominando de P' ao peso da agulha e de l' a metade de seu comprimento, teremos

$$\int \mu' r'^2 = \frac{P' l'^2}{3g} \ ,$$

de onde

$$a = \left(\frac{\pi}{3g}\right)^2 \frac{P' l'^2}{T'^2} \ .$$

Encontramos, para o *torque* da força magnética,

$$\int (\varphi \mu r) = \left(\frac{\pi}{3g}\right)^2 \frac{P l^2}{T^2} \ .$$

Ao comparar essas duas equações, obtém-se

$$\frac{\int \varphi \mu r}{a} = \frac{P l^2 T'^2}{P' l'^2 T^2} \ .$$

Assim, se quisermos comparar a força magnética de uma lâmina de 4 polegadas (10,83 cm) de comprimento, 3 linhas (0,677 cm) de largura e 100 grãos (5,3 g) de peso, com a força de torção que resulta dessa experiência, encontraremos que essa lâmina, imantada até a saturação, realiza 20 oscilações em 80 s. Temos assim um tempo de oscilação = 4 s e

$$\frac{P}{P'} = \frac{100}{6} \ , \qquad \frac{l^2}{l'^2} = \frac{4^2}{1} \ , \qquad \frac{T'^2}{T^2} = \left(\frac{40}{4}\right)^2 = (10)^2 \ ,$$

de onde encontramos

$$\frac{\int \varphi \mu r}{a} = \frac{26670}{1} \ .$$

Assim, um ângulo de torção (Artigo 47) de 26670', ou de 444°, produzirá apenas, com esse fio de seda, um desvio de um minuto na orientação de uma agulha de 4 polegadas de

---

Coulomb obteve $T = 2 \times 40 \ s = 80 \ s$. Logo $k = 4\pi^2 I/T^2 = 1,2 \times 10^{-10} \ kgm^2/(s^2 rad) = 1,2 \times 10^{-3} \ dina \cdot m/rad$.

Logo o torque exercido pelo fio quando é torcido de um ângulo $\theta = 1 \ radiano$ é dado por $\tau = k\theta = 1,2 \times 10^{-10} \ Nm = 1,2 \times 10^{-3} \ dina \cdot cm$, como calculado por Potier.

comprimento, pesando 100 grãos.[174,175]

Sexta Experiência

50. Pegamos um fio de seda de 20 polegadas (54,14 cm) de comprimento, e composto de 12 filamentos, tais como aqueles que saem do casulo ou da fieira do bicho de seda. Esses 12 filamentos foram colados juntos sem serem torcidos, e podiam suportar, sem se romper, um peso de 1800 grãos (95,6 g). Suspendemos nesse fio horizontalmente a mesma agulha de cobre utilizada na experiência anterior. Ela realizou suas oscilações visivelmente isócronas em 29 s.

Resultado Dessa Experiência

A grandeza $\int \mu' r'^2 = P'l'^2/(3g)$ é aqui a mesma grandeza que na experiência anterior, pois é o mesmo fio de cobre [ou seja, é a mesma agulha de cobre] que a força de torção faz oscilar. Assim, ao comparar essa experiência com a anterior, devemos encontrar o *torque* das forças de torção, em razão inversa do quadrado dos tempos. Assim, a força de torção é aqui $a(40/29)^2 = 1,90a$ ou o dobro, aproximadamente, da força de torção calculada na primeira experiência. Assim, um ângulo de torção, igual a 222°, produz apenas um desvio de um minuto na orientação da agulha descrita no Artigo anterior.[176]

Então, estamos certos que a torção dos fios de seda podem influenciar apenas de uma maneira imperceptível na orientação das agulhas magnéticas que serão suspensas neles. Resta determinar se a coesão do ar pode produzir desvios.

5.3.3 Sobre a Resistência do Ar nos Movimentos Muito Lentos

51. Alguns autores célebres pensaram que a parte da resistência do ar, que é constante e independente da velocidade, tinha um valor bem considerável para que não devêssemos negligenciá-la nas fórmulas do movimento dos corpos nesse fluido. Vou provar, creio, que

[174] Um grau tem 60 minutos, isto é, $1° = 60'$. O torque magnético τ_{mag} exercido pela Terra sobre uma agulha imantada desviada de um pequeno ângulo θ em relação ao meridiano magnético local, supondo $\theta \ll 1$ radiano, é dado por $\tau_{mag} = -k_{mag}\theta$, sendo $k_{mag} = \int \varphi \mu r$. Já o torque τ_{fio} devido à torção do fio de um ângulo θ em relação à orientação relaxada do fio é dado por $\tau_{fio} = -k_{fio}\theta = -a\theta$, sendo a constante de torção do fio dada por $k_{fio} = a$. A relação que Coulomb acabou de encontrar é que $k_{mag}/k_{fio} = 26670/1$, isto é, $k_{mag} \gg k_{fio}$. Ou seja, na prática podemos desprezar o torque exercido pelo fio de suspensão sobre a agulha em comparação com o torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha imantada. Apenas no caso de experiências com alta precisão, como aquelas realizadas posteriormente por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), é que vai ser necessário levar em consideração tanto o torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha imantada, quanto o torque exercido pela torção do fio de suspensão. As obras de Gauss e Weber relacionadas com esse tópico já se encontram traduzidas para o inglês no livro *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*. Volume 1: Gauss and Weber's Absolute System of Units, [Assis (editor), 2021a]; Volume 2: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, [Assis (editor), 2021b]; Volume 3: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, [Assis (editor), 2021c]; e Volume 4: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, [Assis (editor), 2021d].

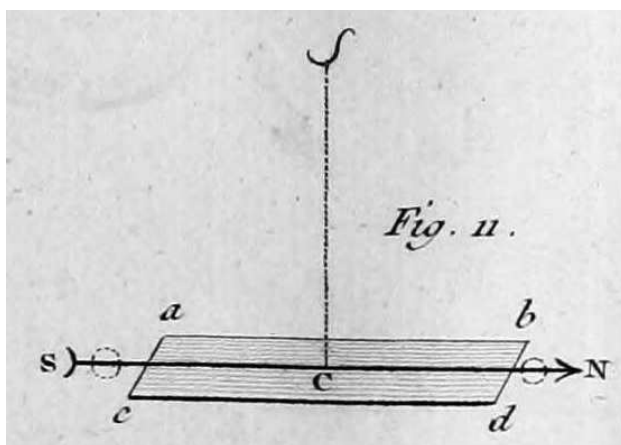
[175] [Nota de Potier:] Supondo a componente horizontal do magnetismo terrestre igual a 0,185, o torque magnético da agulha seria, por unidade de volume, aproximadamente 250. Na primeira experiência do Artigo 27, esse torque seria 453 para uma lâmina quatro vezes mais longa.

[176] Vamos comparar esse resultado com aquele apresentado na Nota de rodapé 174 na página 88. Temos agora $k_{mag}/k_{fio} = 222°/1' = 13320/1$ tal que novamente $k_{mag} \gg k_{fio}$.

o *torque* dessa resistência constante é apenas uma parte muito pequena do *torque* da força magnética de uma lâmina, que ela pode produzir apenas erros insensíveis na orientação da bússola e que dificilmente haverá pesquisas nas quais não possamos desprezá-la sem perigo. É o que se pode concluir inicialmente, me parece, da seguinte observação.

Se suspendermos horizontalmente no fio de seda da experiência anterior uma lâmina de cobre, ela sempre vai parar, dentro de poucos graus, na mesma orientação. Ou, como aqui age apenas a força de torção e como encontramos essa força ser muito pequena para um ângulo bem grande, resulta que, como essa lâmina sempre volta aproximadamente na mesma direção, a parte constante da resistência do ar só pode ter um valor imperceptível. Mas vão aqui algumas coisas mais precisas.

Sétima Experiência

52. Um fio de ferro NS (Figura 11), com 9 polegadas de comprimento [24,36 cm] e pesando 24 grãos [1,27 g] foi fracamente imantado. Ele foi suspenso por seu centro C com um fio de seda com um único filamento, de 6 polegadas de comprimento [16,24 cm] e cujo ângulo de torção era nulo: sua força magnética fazia com que ele realizasse 4 oscilações em 62 s. Como era apenas uma questão de determinar a parte constante da resistência do ar, buscamos diminuir ainda mais a velocidade das oscilações. Isso é fácil ao ligar a cada extremidade dessa agulha um peso de 50 grãos [2,66 g]. Em seguida colamos no fio de ferro um retângulo de papel, com 1 polegada de largura e 8 polegadas de comprimento.

No primeiro teste, o plano do papel era horizontal; no segundo [teste], ele era vertical. Todo o sistema realizava 4 oscilações em 155 s, o que produzia um movimento muito lento nas pequenas oscilações. Determinamos, nos dois testes, ao fazer essa agulha oscilar, de quanto diminuía em cada oscilação o ângulo descrito, desde o começo do movimento até o instante em que as oscilações eram imperceptíveis.

Primeiro teste. Estando o plano do papel horizontal, a agulha afastada de 2° de seu verdadeiro meridiano magnético,

Ela chegou a	em
$1^\circ\ 45'$	2 oscilações
$1^\circ\ 30'$	2 oscilações
$1^\circ\ 15'$	2 oscilações
1°	2 oscilações
$45'$	2 oscilações
$30'$	4 oscilações
$15'$	4 oscilações
$0'$	6 ou 8 oscilações

Segundo teste. Estando o plano do papel vertical:

Ela chegou	em
de $2^\circ\ 5'$ a $1^\circ\ 50'$	2 oscilações
$1^\circ\ 20'$	2 oscilações
$50'$	4 oscilações
$20'$	4 oscilações
$10'$	4 oscilações
$0'$	4 ou 6 oscilações

Resultado Dessa Experiência

O fio de ferro do qual nos servimos nessa experiência oscila em virtude da força magnética. A torção da seda é nula; os arcos descritos em cada oscilação diminuem pela resistência do ar oposta ao movimento. Ora, encontramos (Artigo 9) que, quando uma agulha oscila em virtude da força magnética, se ela sofresse uma resistência cujo *torque* fosse uma quantidade constante A, teríamos a cada vibração, para a diferença dos ângulos descritos $(B - B') = 2A : \int \varphi\mu r$. Assim, se supusermos que, quando o fio de ferro ao oscilar não se afasta mais do que de $30'$ de seu meridiano, ele experimenta então uma resistência constante. Veremos que como, no primeiro teste, ainda percebemos 15 oscilações até ocorrer o repouso, temos 2 minutos de perda a cada oscilação. Assim, $A : \int \varphi\mu r = 1'$, quantidade essa que exprime (Artigo 6) o desvio que a grandeza A pode produzir.

Se compararmos agora o *torque* magnético dessa agulha que imantamos muito fracamente com o *torque* magnético de uma lâmina com 4 polegadas de comprimento, 3 linhas de largura e 100 grãos de peso, encontraremos que a grandeza A poderia produzir apenas, na orientação dessa agulha, um desvio de 5 a $6''$, quantidade essa que podemos desprezar.

Se quisermos obter a resistência experimentada pelo plano de papel quando ele está vertical, encontraremos, por raciocínios similares aos anteriores que, como ele realiza 11 ou 12 oscilações quando começou a vibrar afastado de $30'$ de seu meridiano, a resistência do ar ainda é imperceptível nesse caso. Parece mesmo seguir que, não interessando a maneira como o plano [do papel] seja colocado em relação à direção do movimento, a resistência constante é aproximadamente a mesma, e que a diferença que encontramos entre o primeiro e o segundo testes é devida à pequena velocidade nesses dois testes.

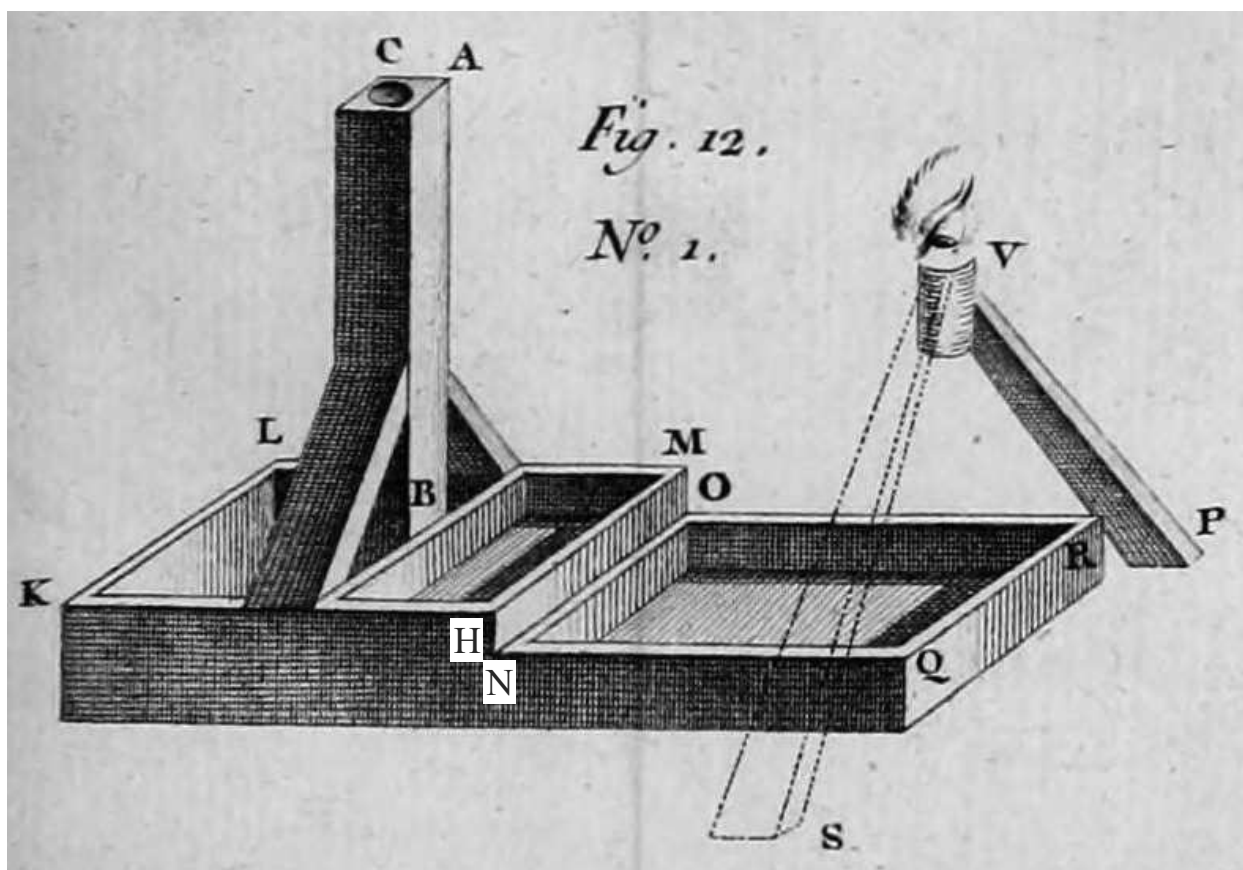
53. Ao fazer diferentes agulhas oscilar com planos pequenos de papel, como no Artigo anterior, e ao ampliar o movimento oscilatório até 10° ou 12° do meridiano magnético, obtive-

mos observações que, comparadas com as fórmulas do movimento oscilatório, nos pareceram apropriadas para desenvolver a teoria da resistência do ar quando o corpo se desloca com um movimento muito lento. Mas esse trabalho não tem relação com essa Memória.

Essas experiências também são muito delicadas e exigem muita atenção. A agulha e o fio que a sustenta devem estar contidos em uma caixa na qual o ar não possa penetrar. Fazemos as agulhas oscilarem ao lhes apresentar do lado de fora da caixa o polo [magnético] de um outra agulha. Observamos as pequenas oscilações com uma lupa.

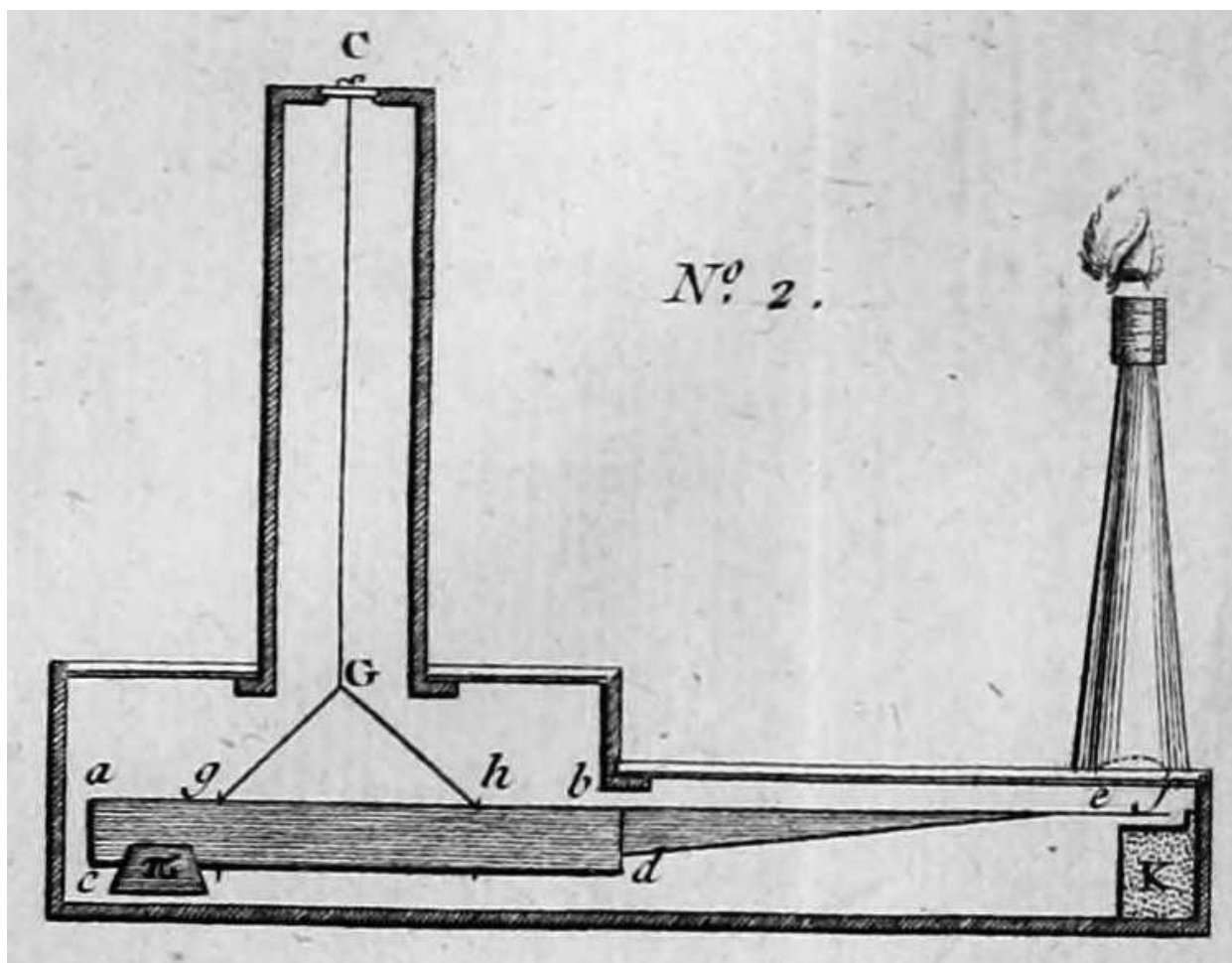
5.3.4 Construção de uma Bússola Apropriada para Observar as Variações Diurnas

54. Sabendo que a coesão do ar e que a torção dos fios de seda só podem influenciar de uma maneira imperceptível sobre a orientação das agulhas imantadas, preparei uma bússola quase sem a ajuda de qualquer artesão,[177] com a qual observo, há cinco meses, a variação diurna [do magnetismo terrestre] com uma precisão que jamais poderíamos esperar com as agulhas com capa[178] suspensas sobre pivôs.

A Figura 12, Número 1, representa em perspectiva todas as partes da caixa na qual a agulha está contida.[179]

[177] Uma discussão dessa nova bússola de Coulomb e suas melhorias posteriores encontra-se em [Heering and Osewold, 2005].
[178] Ver a Nota de rodapé 108 na página 54.
[179] Como as letras H e N não estavam aparecendo claramente nessa Figura, enfatizei essas letras.

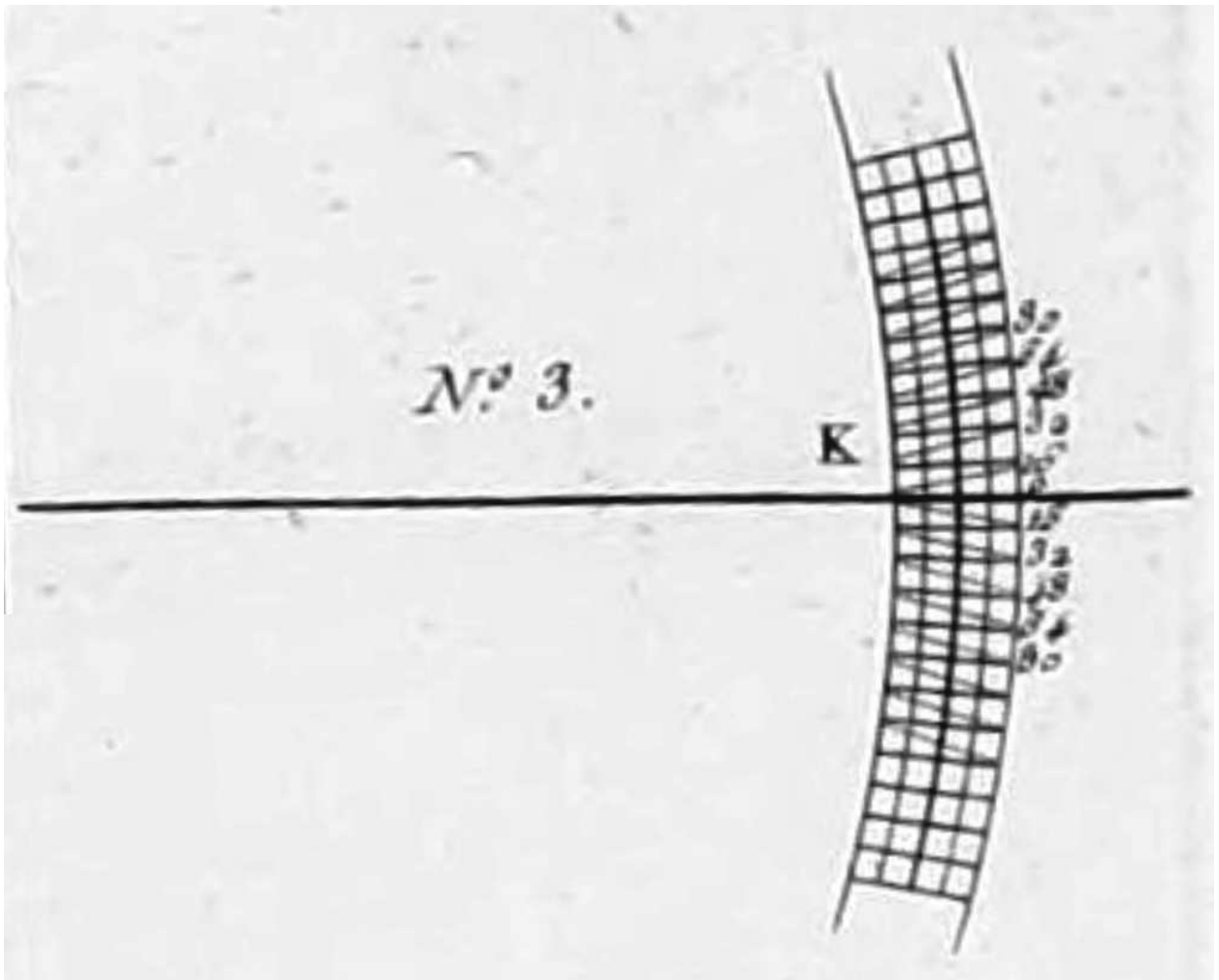
A parte AB é uma haste oca, que eleva-se de 20 polegadas [54,14 cm] acima da caixa $HKLM$, estando fixada no meio dela, por meio de uma travessa e de dois suportes oblíquos pequenos de madeira que a sustentam. Na extremidade dessa haste colocamos, em C, uma placa de cobre circular, móvel e perfurada em seu centro, para receber aí a extremidade de um fio de seda que sustenta a agulha. A parte $ONQR$ é uma prolongação da grande caixa $HKLM$ com uma altura menor. Essas caixas são fechadas por estruturas forradas de vidro que deixam ver tudo o que se passa no interior.

SVP é um suporte de madeira fixado sobre a mesa na qual a caixa da bússola está colocada. Esse suporte tem em seu vértice V um pequeno cilindro oco ou uma pequena luneta com um campo [de visão] bem amplo para que o observador coloque sempre seu olho no mesmo ponto.

A Figura 12, Número 2, representa uma seção vertical da caixa, feita ao longo de seu comprimento maior, que tivemos o cuidado de colocar aproximadamente paralelo ao meridiano magnético.

abcd representa a lâmina de aço ou agulha imantada suspensa de lado.[180] Ela possui 10 polegadas (27,07 cm) de comprimento, 3 linhas e meia (0,795 cm) de largura e pesa

[180][Nota de Coulomb:] Utilizamos sem escolha a primeira lâmina de aço que se apresentou. Poderíamos determinar as dimensões dessa lâmina pelas equações dos Artigos 37 e seguintes. Mas a resistência que deve ocasionar o tipo de suspensão que utilizamos aqui é tão pequena que esse grau de perfeição parece inútil.

250 gramas (13,3 g).[181] Na sua extremidade boreal b está soldada uma pequena lâmina de cobre $bdef$ muito leve, terminada por uma ponta extraordinariamente fina. Na extremidade austral há um pequeno contrapeso ao redor da lâmina e apoiado nela por atrito.[182] Ele serve para manter a agulha em uma posição horizontal. O fio CB[183] é uma seda com 12 filamentos, parecida com aquela que utilizamos para os cálculos nas experiências anteriores. Ela foi distorcida ou trazida de volta à sua orientação natural por uma agulha de cobre que havíamos suspendido inicialmente nela, e como o prendedor C está fixo em um círculo móvel ao redor de seu centro, foi fácil fazer coincidir a agulha de cobre, quando o fio de seda estava em seu estado natural, com o meridiano magnético, que conhecíamos aproximadamente.

Em K está a extremidade de um círculo que tem 15 polegadas de raio [40,61 cm] e cujo centro está ao longo da vertical CG. Esse círculo está dividido de 16 em 16′ ou preferivelmente de 4 em 4′, por meio das diagonais que atravessam sua extremidade, como vemos aparecer no Número 3 [da Figura 12].[184]

[181]Supondo uma lâmina de aço com uma densidade de massa de 8×10^3 kg/m^3, vem que sua espessura seria de 0,077 cm.

[182]Esse contrapeso é representado na Figura pela letra π.

[183]Na Figura 12, Número 2, este fio está representado pelas letras CG. As letras C e B aparecem na Figura 12, Número 1.

[184]Os números que aparecem nessa Figura 12, Número 3, de baixo para cima, são: 80, 64, 48, 32, 16, 0, 16, 32, 48, 64 e 80.

A distância da extremidade ef da agulha até a extremidade do círculo era tão pequena que ela só podia produzir, para o observador, em uma variação de 1 ou 2°, apenas erros insensíveis, mas que é fácil de calcular, pois essa distância é conhecida e pelo fato do olho estar sempre na mesma posição. Daremos, no último Capítulo dessa Memória, o resumo das observações feitas com essa agulha.

55. Essa espécie de suspensão não provoca, me parece, nenhum dos defeitos que são impossíveis de corrigir nas agulhas com capa suspensas por pivôs: todas as forças verticais se contrabalançam aqui necessariamente, e sua resultante passa pela direção vertical CG que é invariável. Todas as forças magnéticas que atuam sobre a bússola, sendo decompostas ao longo de uma linha horizontal, se encontram, devido à pouca espessura da lâmina que suspendemos de lado, no mesmo plano vertical e, consequentemente, esse plano se direciona ao longo do meridiano magnético. Se quisermos uma precisão maior, será fácil suspender essa mesma lâmina pelo outro lado de sua face, de tal forma que a superfície esteja sempre vertical. Observaremos se a superfície da lâmina conserva a mesma direção e, no caso em que houver alguma diferença, a metade do ângulo observado fornecerá, como veremos no próximo Capítulo, o verdadeiro meridiano magnético.[185]

56. A facilidade de construir bússolas do tipo daquelas que acabamos de propor, e de lhes fornecer sem inconveniente suportes maiores; [assim como] a exatidão que resulta disso para as observações das variações da declinação devem fazer, me parece, com que elas sejam preferidas, para todas as observações relativas à física, em relação às agulhas suspensas sobre as pontas dos pivôs.

Mas, por outro lado, como será muito difícil adaptar bússolas semelhantes para o serviço da marinha, não apenas devido ao movimento dos navios, mas também devido a que, por outro lado, a flexibilidade das suspensões as deixa oscilar por um tempo muito longo, por muito pouco que elas sejam afastadas de seu meridiano [magnético], o que não convém nas operações dos navegantes, as quais devem quase sempre ocorrer com rapidez, somos obrigados, pela utilidade da navegação, de tentar descobrir de onde provêm os inconvenientes das capas e dos pivôs e quais são os meios de conhecer os desvios que resultam desses inconvenientes.

5.4 Suplemento

Embora[186,187] a bússola da qual acabamos de falar forneça observações mais exatas do que as bússolas que tivemos até o momento, ainda assim ela é suscetível de um grau maior de precisão quando pudermos obter artífices mais hábeis do que aqueles que tive à minha disposição, na época em que trabalhava em minha Memória: estava então encarregado de alguns reparos nas Fortificações de la Hougue, pequeno Forte na Baixa Normandia, nas

[185] Isso vai ser visto especialmente no Artigo 63 na página 101.

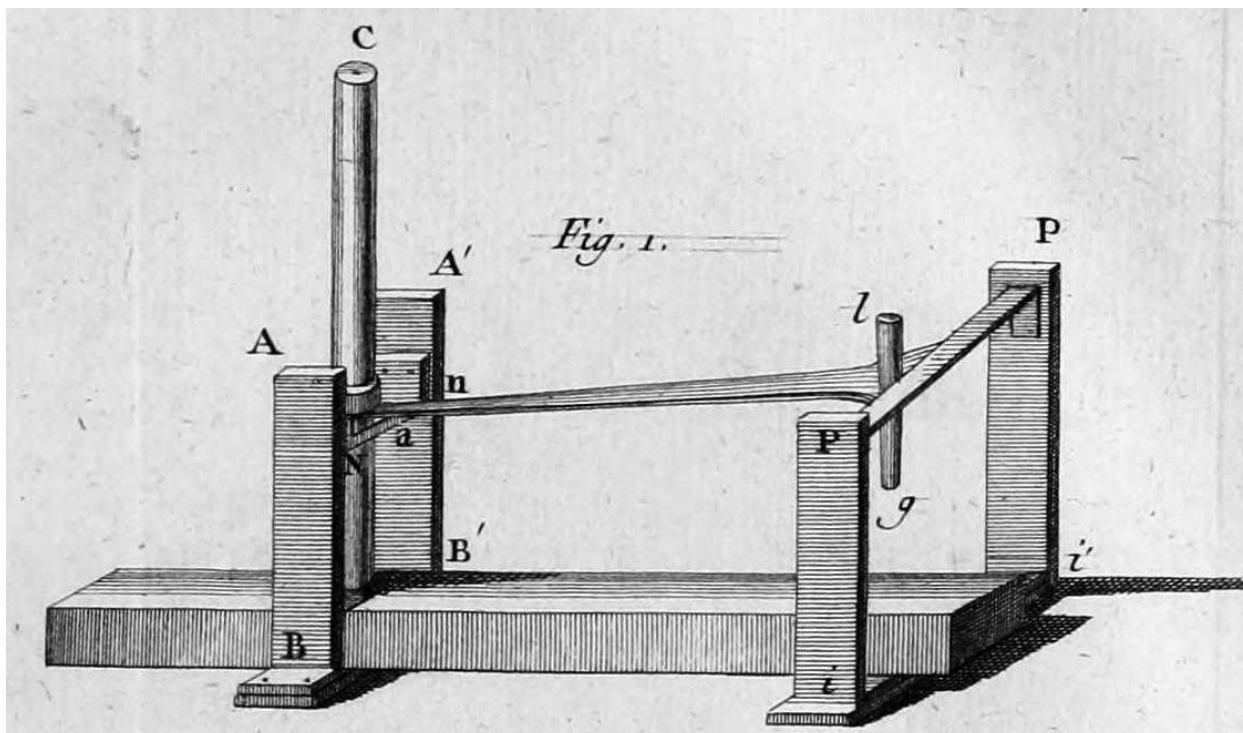
[186] [Nota de Coulomb:] Esse Suplemento só foi incluído após o julgamento da Academia.

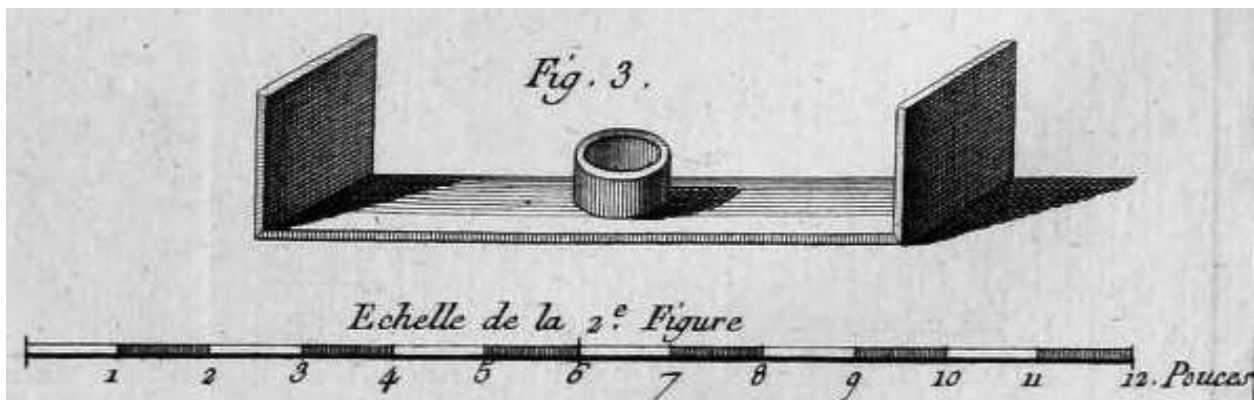
[187] Coulomb está referindo-se ao julgamento relativo ao prêmio de 1777 da Academia de Ciências, sendo que ele foi um dos vencedores com essa Memória.

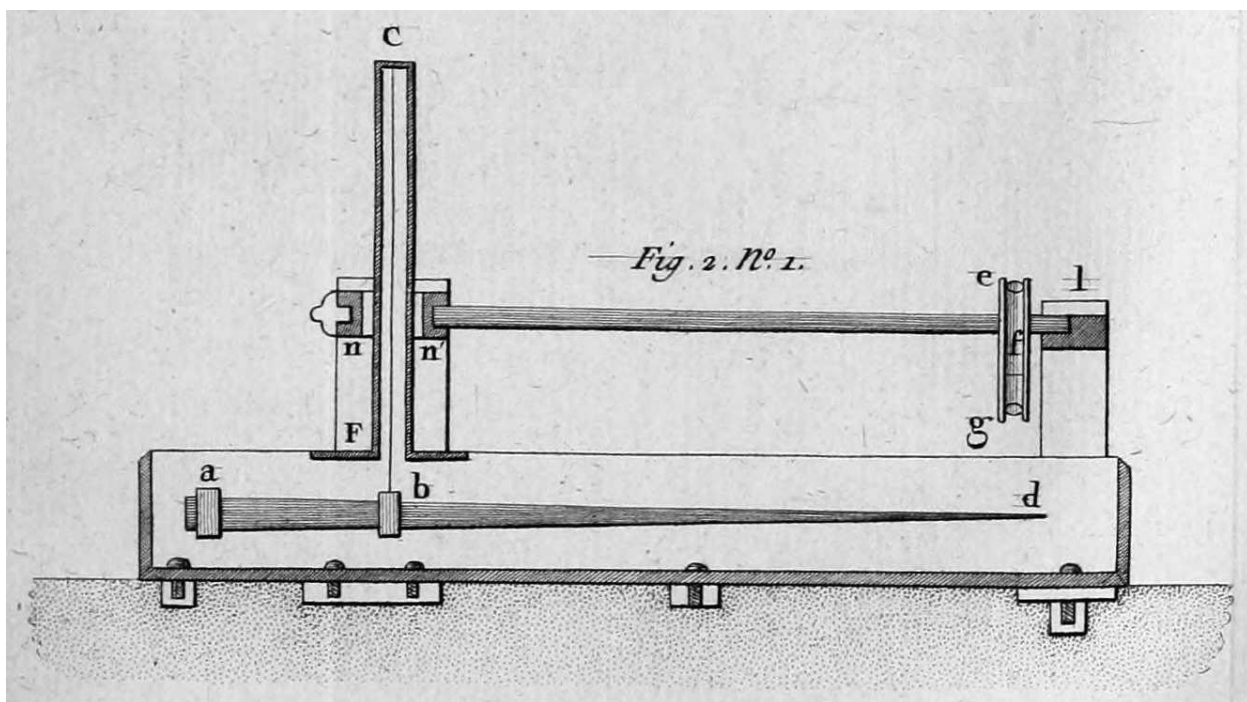
Deve ser observado que esse Suplemento não foi incluído na reimpressão parcial dessa Memória contida na edição de Potier, [Potier, 1884].

costas da península de Cotentin, e não tinha nesse local absolutamente qualquer assistência.

A bússola que vou descrever nesse Suplemento vai fornecer as variações [do magnetismo terrestre] com a precisão de alguns segundos [de arco].

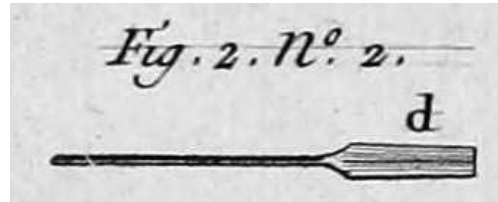
A primeira Figura [desse Suplemento] representa exteriormente, em perspectiva, todas as partes da nova bússola.

Ela é formada de uma caixa com dois ou três pés de comprimento [65 ou 97 cm], sobre a qual se eleva uma haste vertical oca, destinada a conter o fio que sustenta a agulha. Essa caixa é colocada sobre duas travessas de cobre BB' e ii'. Na extremidade dessas travessas, e sem tocar a caixa, elevam-se verticalmente os pilares AB, $A'B'$, iP e $i'P'$. Os dois primeiros são ligados, em suas partes superiores, por uma travessa Nn, perfurada perto do centro por um furo circular, que circunda, sem tocá-la, a haste oca CF. Sobre essa mesma travessa, e correspondendo ao mesmo buraco, fixamos um anel circular, tal como vemos representado na terceira Figura [desse Suplemento].[188]

[188]Abaixo da travessa da Figura 3 do Suplemento vemos a escala (*Echelle*) da Figura, em polegadas (*Pouces*), sendo cada polegada correspondente a 2,7 cm.

Esse anel, que tem seu centro no fio vertical que sustenta a agulha, serve de círculo de rotação a uma alidade horizontal *al*.[189] A alidade carrega, em sua extremidade *l*, uma pequena luneta microscópica, orientada verticalmente, [utilizada] para observar os movimentos da extremidade da agulha imantada.

A segunda Figura, Número 1 [desse Suplemento], representa uma seção dessa mesma bússola ao longo de seu comprimento.

A agulha *ad* é suspensa de lado por meio de um anel *b* ligado por sua parte superior ao fio de seda vertical *cb*.[190] Em uma extremidade *a* da bússola há um segundo anel *a* que serve de contra-peso para ajustar a agulha em uma posição horizontal. Na outra extremidade *d* soldamos uma pequena armação de cobre, representada na [Figura 2], Número 2, sobre a qual traçamos uma linha muito fina ao longo do comprimento da agulha que indica o meridiano

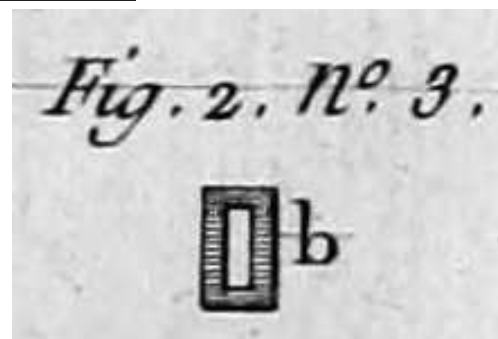
[189]Essa alidade aparece na Figura 1 do Suplemento. Alidade é um dispositivo destinado a medir ângulos mediante o alinhamento óptico. Ela pode ser uma régua de madeira ou metal que gira em torno de um de seus pontos e da qual uma das extremidades se move sobre uma escala.

[190]Esse anel *b* aparece na Figura 2, Número 3, desse Suplemento:

magnético.

Colocamos no foco da luneta eg, em f, um pequeno fio de seda, direcionado ao longo do raio da alidade, ou cujo centro de rotação, nos movimentos da alidade, é o mesmo que o centro de rotação da agulha. Em l temos o perímetro de um círculo que percorre a extremidade da alidade dividida de acordo com o método de *Nônio*:[191] a alidade executa pequenos movimentos de rotação por meio de um parafuso de ajuste, assim como é praticado em todos os instrumentos destinados a fornecer com precisão os [valores dos] ângulos.

É inútil entrar em maiores detalhes sobre a construção dessa bússola. A caixa é colocada de maneira que seu comprimento corresponda ao meridiano magnético, sendo as variações [das direções horizontais] da agulha medidas por meio da alidade, ao fazer como que o fio da luneta corresponda ao traço que divide a armação de cobre soldada na extremidade da agulha. Ao invés da linha que traçamos sobre a armação, talvez fosse mais cômodo furar essa armação ao longo de seu comprimento, substituindo a linha por um fio de seda, podendo assim verificar a direção da agulha por meio de sua inversão.

Se quiséssemos utilizar essa bússola para determinar a declinação absoluta, seria necessário colocar horizontalmente sobre a alidade, e paralelamente a seu raio, uma luneta comum com a qual observaríamos um ponto no horizonte.

A caixa, assim como as travessas, é fixada a alguns corpos maciços por vários parafusos de cobre, de maneira que todo o conjunto seja inabalável. Os pilares são separados da caixa. Entre o anel que serve de centro de rotação da alidade e a haste vertical que contém o fio de chumbo, há um espaço suficiente para que os movimentos da alidade não possam ocasionar qualquer trepidação à haste ou à caixa.

[191]No original: *Nonius*. O nônio ou nonius é um dispositivo de medição inventado pelo matemático português Pedro Nunes (1502-1578), também conhecido pelo nome latinizado Petrus Nonius.

5.5 Capítulo IV. Princípios Gerais sobre o Estado de Equilíbrio dos Corpos. — Suas Aplicações para as Lâminas Magnéticas Colocadas sobre Planos Equilibrados Horizontalmente. — O Que Resulta Disso para o Ponto de Suspensão, e para Traçar sobre as Lâminas o Verdadeiro Meridiano Magnético. — Sobre o Atrito dos Pivôs e das Capas. — Aplicação de Todos Esses Princípios para a Construção de Bússolas Marítimas

57.[192] Vamos supor que um corpo livre, solicitado por forças arbitrárias, atingiu seu estado de repouso. Caso todas as forças que atuam sobre esse corpo sejam decompostas ao longo de duas direções, sendo uma delas perpendicular a um plano arbitrário, e a outra [direção] paralela a esse plano, será nula a soma das forças decompostas ao longo da direção perpendicular ao plano. Se em seguida decompormos todas as forças paralelas ao plano em duas outras [direções] ainda paralelas a esse mesmo plano, mas perpendiculares entre si, ainda será nula a soma das forças decompostas ao longo de cada uma dessas direções.

58. Por outro lado, quando um corpo livre atingiu seu estado de repouso, se supormos uma linha qualquer, atravessando ou não esse corpo, podemos considerar essa linha como um eixo fixo ao redor do qual atuam todas as forças que solicitam o corpo para fazê-lo girar. Ora estando o corpo em repouso, é necessário que os *torques* de todas as forças estejam em equilíbrio ao redor desse eixo. Assim, se traçarmos no plano que foi suposto no Artigo anterior duas linhas perpendiculares entre si, e se elevarmos uma perpendicular a esse plano no ponto em que se encontram, essas três linhas podem ser consideradas como três eixos fixos de rotação e é necessário, para que haja equilíbrio, que seja nulo o *torque* de todas as forças ao redor desses três eixos.

Essas três condições de equilíbrio, juntamente com as outras três condições [de equilíbrio] explicadas no Artigo anterior, constituem seis condições a serem cumpridas para que um corpo solicitado por forças arbitrárias permaneça em seu estado de repouso.

Como as proposições da estática estão desenvolvidas em todos os livros de mecânica, pararei por aqui.

59. Se supormos agora que esse corpo, solicitado por forças arbitrárias, está além disso pressionado sobre um dos pontos de sua superfície pela ponta de um pivô; então nesse caso ao passar um plano que toca a superfície do corpo em seu ponto de pressão, e traçando no ponto de contato uma perpendicular a esse plano, teremos em consequência das duas proposições anteriores o seguinte:

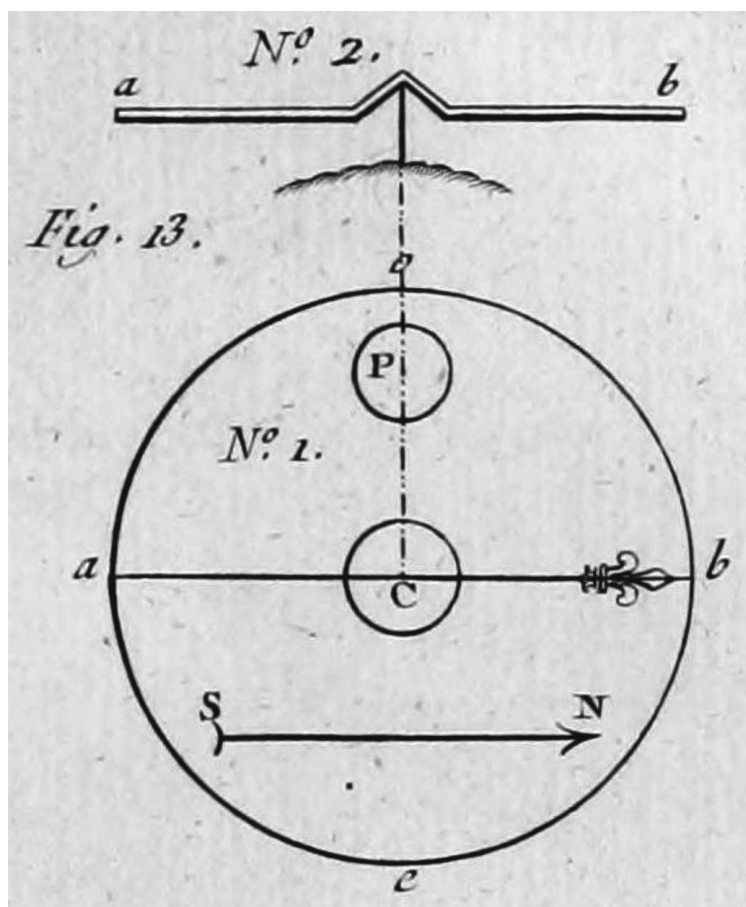
1. Será nula a soma das forças decompostas ao longo das duas direções perpendiculares entre si e paralelas ao plano de contato.

2. A soma das forças decompostas perpendicularmente a esse plano será igual à pressão sentida pelo ponto de contato.

[192] Os Artigos 57 a 73 não foram incluídos na reimpressão parcial dessa Memória na edição de Potier, [Potier, 1884].

Se tivéssemos levado em conta o atrito ocasionado pela pressão do ponto de contato, o equilíbrio poderia ser mantido todas as vezes em que o atrito fornecesse uma resistência maior do que a resultante de todas as forças que atuassem paralelamente ao plano de contato.

Estando satisfeitas as três primeiras condições de equilíbrio, satisfaremos facilmente às outras três [condições de equilíbrio] para o *torque*, ao passar três eixos fixos pelo ponto de contato, e o atrito só poderá influenciar nas condições de equilíbrio dos *torques* de todas as forças ao redor desses três eixos, quando a ponta do pivô pressionar uma superfície ou vários pontos ao mesmo tempo.

60. Apliquemos essas proposições gerais ao estado de equilíbrio das bússolas. Seja (*Figura* 13,) um plano pesado *aobe* equilibrado horizontalmente por meio de uma capa, cujo eixo é vertical,[193] de maneira que o fundo da capa, que se apoia sobre a ponta de um pivô, possa ser considerado como um plano horizontal bem pequeno.

Seja colocada sobre esse plano uma agulha imantada,[194] considerada como uma linha, e equilibrada pelo pequeno contra-peso P, de maneira que o plano sempre permaneça horizontal; o Número 1 [da Figura 13] representa o plano e o Número 2 sua seção[195] ao longo do meridiano magnético.

Se aplicarmos aqui os princípios anteriores, encontraremos que todas as partes do plano

[193]O eixo vertical passa pelo ponto C da Figura 13, Número 1, sendo a capa representada pelo pequeno círculo ao redor do ponto C. Essa capa tem o formato de um cone. A seção desse cone aparece no centro da Figura 13, Número 2.

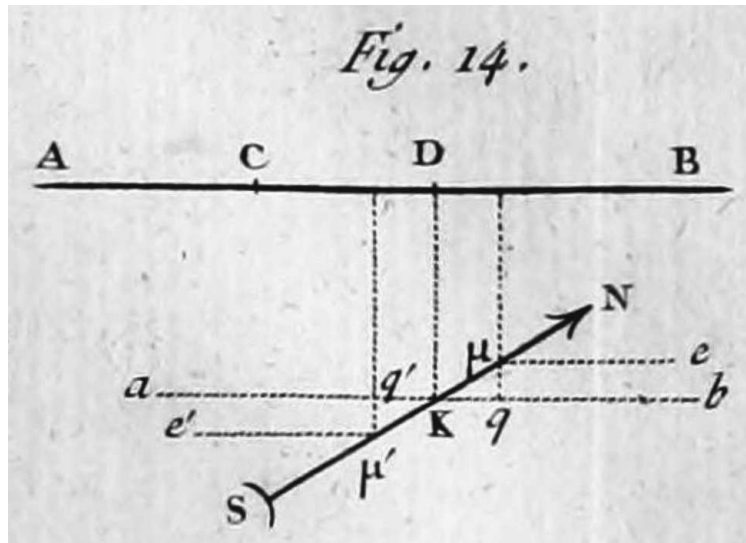
[194]Essa agulha imantada está representada na Figura 13 pelas letras SN.

[195]Isto é, a representação em corte por um plano vertical.

são solicitadas por forças gravitacionais. Encontraremos em segundo lugar que a agulha é solicitada pela gravidade e pela força magnética, que atua sobre cada ponto [da agulha] ao longo de uma direção constante. Ao decompor a força magnética ao longo de uma direção horizontal e ao longo de uma direção vertical, encontraremos que a força vertical aumenta o peso da parte boreal, e atua em sentido contrário, ou diminui o peso da parte austral.[196] Além disso, encontraremos que, devido ao segundo princípio, o aumento do peso da parte boreal é exatamente igual à diminuição do peso da parte austral; e que assim a pressão sentida pela ponta do pivô é igual ao peso de todo o sistema.

Em seguida observaremos que a ação do globo terrestre sobre a agulha, para todos os pontos dessa agulha, tem uma direção constante. Se decompormos essa ação, vai resultar, para cada ponto, uma força horizontal ao longo do meridiano magnético, e que devido à igualdade das somas das forças, nos dois sentidos opostos, a agulha, como já explicamos no segundo princípio, vai se orientar ao longo do meridiano magnético.

61. Resulta ainda dos princípios anteriores, que em algumas posições, e em alguma distância do centro de rotação que essa agulha se encontre sobre o plano horizontal, a força que a traz de volta a seu verdadeiro meridiano [magnético], quando ela for afastada dele de um ângulo arbitrário b, terá sempre o mesmo *torque*.

Para demonstrar isso, seja C (*Figura 14*)[197] o centro de rotação de uma agulha [imantada] SN colocada como no Artigo anterior, sobre um plano equilibrado horizontalmente; seja suposto que o centro magnético dessa agulha esteja em K;[198] por esse centro seja traçada a linha aKb, que representa o meridiano magnético; e pelo ponto de rotação C, seja traçada a linha AB paralela a esse meridiano; seja suposto como b o ângulo NKb entre a direção da agulha e seu meridiano.

Cada ponto μ dessa agulha é solicitado em virtude do primeiro princípio por uma força

[196]Ou seja, a força magnética terrestre sobre a parte boreal ou Norte da agulha tem uma componente para baixo em Paris, o que seria equivalente a um aumento de peso nesse lado. Já na parte austral ou Sul da agulha, a força magnética tem uma componente para cima em Paris, equivalente a uma diminuição de peso nesse lado. Ver a Seção 4.3 na página 35 e as Notas de rodapé 96 e 103 nas páginas 52 e 53.

[197]Deve se entender todos os pontos e linhas da Figura 14 como estando em um mesmo plano horizontal.

[198]No texto original a letra K aparece minúscula, k. Substituí pela letra K maiúscula pois não aparece na Figura 14 a letra k minúscula.

μe,[199] paralela ao meridiano magnético. Todas as forças da parte KN, estando direcionadas para o Norte; todas as forças da parte KS, estando direcionadas para o Sul, seja φ a força que atua sobre o ponto boreal μ, e [seja] φ' a força que atua sobre o ponto austral μ', do outro lado do centro magnético.[200] Teremos (ao traçar dos pontos μ, K, μ' as perpendiculares sobre o meridiano AB) para o *torque* da força que atua sobre o ponto μ, ao redor do ponto C, $(\varphi\mu)\cdot(DK - q\mu)$; e, para o *torque* da força que atua sobre o ponto austral[201] μ', [teremos] $\varphi'\mu'(DK + q'\mu')$. Estando as forças dirigidas ao longo de duas direções opostas, resulta disso, para o *torque* total ao redor do centro de suspensão C a fórmula

$$(\int \varphi'\mu' - \int \varphi\mu)DK + \int \varphi'\mu' \cdot q'\mu' + \int \varphi\mu \cdot q\mu \ ;$$

e, como a soma das forças austrais é igual à soma das forças boreais, resulta que o primeiro termo se anula, e que a fórmula seja reduzida a

$$\int \varphi\mu r \, (\operatorname{sen} b) \ ,$$

integrada ao longo de toda a agulha, com r representando aqui a distância $(K\mu)$.

Assim, uma agulha imantada, colocada sobre um plano equilibrado horizontalmente, irá sempre se restabelecer na direção de seu meridiano magnético; e quando ela for afastada dessa direção de um ângulo b qualquer, seu *torque*, ao redor do centro de rotação, será sempre proporcional a $\operatorname{sen} b$, e será independente da distância da agulha ao centro de rotação.

62. Observação. Se a soma das forças austrais não fosse igual à soma das forças boreais, nesse caso teríamos a posição da agulha, em relação a seu meridiano, no estado de equilíbrio, supondo a fórmula anterior,[202]

$$(\int \varphi'\mu' - \int \varphi\mu)DK + \left(\int \varphi\mu \cdot K\mu + \int \varphi'\mu' \cdot K\mu'\right) \operatorname{sen} b = 0 \ ;$$

porém, como demonstramos que a soma das forças austrais é igual à soma das forças boreais, não vamos parar para discutir esses novos resultados.

63. Acabamos de ver que não haveria dificuldade para determinar o meridiano magnético quando a agulha imantada pudesse ser considerada como uma linha; já que ela iria adquirir necessariamente a direção do meridiano magnético. Mas suponhamos agora que essa agulha seja uma lâmina imantada, que possui uma certa largura; e veremos qual ângulo a direção do meridiano magnético formará com um dos lados da lâmina, quando o plano, equilibrado horizontalmente, tenha chegado a seu estado de repouso.

Sobre um plano horizontal, semelhante àquele do Artigo anterior, seja colocada uma lâmina $ABDE$ (*Figura* 15);[203] [seja ainda suposto] que a extremidade BE dessa lâmina possua uma força boreal,[204] e a extremidade AD uma força austral.

---

[199] No texto original aparece aqui μE. Substituí a letra E maiúscula pela letra e minúscula para que o texto fique de acordo com a Figura 14.

[200] Na Figura 14 substituí o μ perto do polo S por μ'.

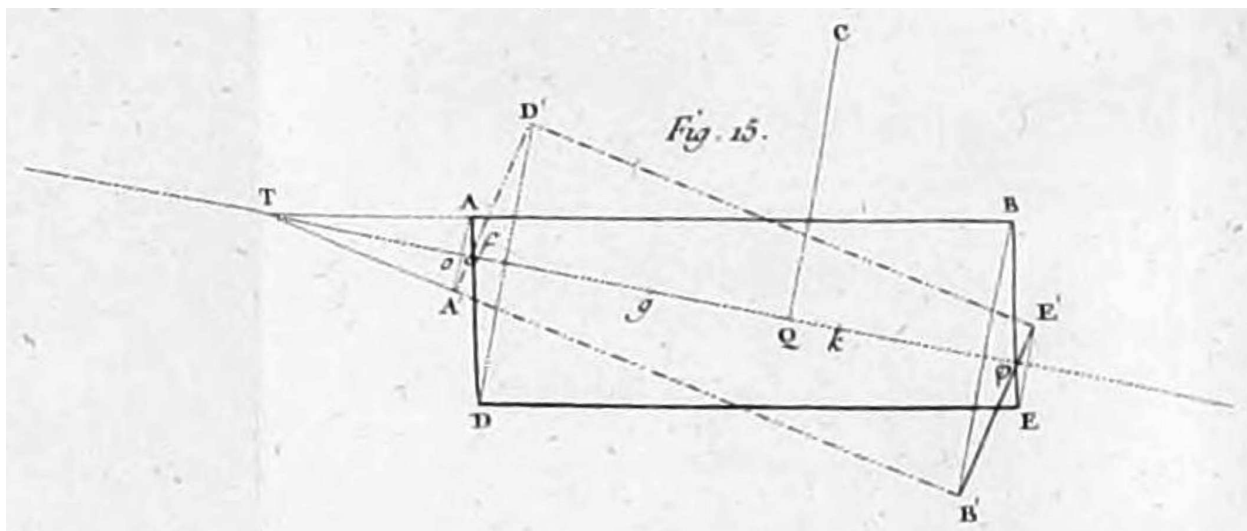
[201] No original aparece aqui $\mu'\mu$ em vez de μ'.

[202] No original a próxima equação aparece com a letra K minúscula, k:

$$(\int \varphi'\mu' - \int \varphi\mu)Dk + \left(\int \varphi\mu \cdot k\mu + \int \varphi'\mu' \cdot k\mu'\right) \frac{\operatorname{sen} b}{raio} = 0 \ .$$

Substituí-a pela letra K maiúscula.

[203] Todos os pontos da Figura 15 devem ser considerados no mesmo plano horizontal.

[204] Isto é, que ela seja do tipo boreal. Ou seja, um polo Norte, ver a Nota de rodapé 96 na página 52.

Se supormos que a resultante de todas as forças boreais é representada por $k\varphi$, e a resultante de todas as forças austrais por gf, as forças da parte boreal, assim como da parte austral, estando todas elas direcionadas devido ao primeiro princípio, ao longo do meridiano magnético, serão consequentemente todas paralelas entre si, e suas resultantes serão paralelas ao meridiano magnético. Assim, se quando a bússola tiver chegado a seu estado de repouso, traçarmos, do ponto de rotação C, uma perpendicular em relação ao meridiano magnético, ela será ao mesmo tempo perpendicular em relação à resultante das forças magnéticas. Ora, como a soma das forças boreais é igual à soma das forças austrais, é necessário que o braço da alavanca seja o mesmo para as duas resultantes, que consequentemente estarão em linha reta.[205]

Vemos facilmente que em qualquer lugar do plano, equilibrado horizontalmente, no qual a lâmina seja colocada, ela sempre assumirá a mesma direção, desde que ela seja colocada sobre a mesma face.

Se supormos agora que, na lâmina $ABDE$, a linha $f\varphi$ das [forças] resultantes permanecendo imóvel, façamos girar toda a lâmina ao redor dessa linha, até que ela esteja colocada sobre sua outra face, é evidente que quando essa lâmina fizer uma semi-revolução ao redor do eixo $f\varphi$, caso a lâmina estivesse em equilíbrio sobre a primeira face, ela ainda estará em equilíbrio quando tiver feito uma semi-revolução ao redor do eixo $f\varphi$, e que ela estará colocada sobre a outra face, representada aqui pelas linhas tracejadas $A'B'D'E'$; na qual DD' representa o diâmetro ou a projeção do semi-círculo, percorrido pelo ponto D, que encontra-se cortado em duas partes iguais pela resultante $f\varphi$; e na qual AA' representa o diâmetro do círculo percorrido pelo ponto A.

Se prolongarmos agora as linhas correspondentes AB e $A'B'$, assim como a resultante φf, veremos que essas três linhas devem se encontrar no mesmo ponto T, e que o ângulo ATf, formado entre a direção do lado AB da lâmina, e da resultante $f\varphi$, será a metade do ângulo ATA'.

Agora será bem fácil de traçarmos, sobre uma lâmina, uma linha que corresponda ao meridiano magnético: colocaremos essa lâmina sobre o plano equilibrado horizontalmente, e observaremos a direção de seu lado AB; invertemos essa lâmina sobre sua outra face: equilibraremos novamente o plano horizontalmente, e observaremos a nova direção do lado $A'B'$. A metade do ângulo, formado por essas duas direções, vai nos fornecer o meridiano

[205]Isto é, no equilíbrio as duas resultantes vão estar ao longo da mesma linha reta.

magnético: em vez de observar a direção de um dos lados da lâmina, podemos traçar uma linha sobre o centro dessa lâmina, e observar sua direção, o que vai dar no mesmo.

64. Observação. Quando a agulha [imantada] SN for colocada sobre um plano $ABDE$ (*Figura* 16), inclinado em relação ao horizonte, suspenso e móvel ao redor do ponto de suspensão i, ainda assim determinaremos facilmente todas as condições de equilíbrio.

Passemos três eixos pelo ponto de suspensão i, a saber: iF, eixo horizontal no plano do meridiano magnético; iO, eixo horizontal perpendicular ao meridiano magnético; if, eixo vertical. Todas as forças da gravidade e do magnetismo devem estar em equilíbrio ao redor desses três eixos.

Se decompormos todas as forças magnéticas μR, que atuam sobre cada ponto μ da agulha, em uma força horizontal μQ, e uma força vertical QR, ambas situadas no plano do meridiano magnético, veremos que todas as forças verticais não exercem *torque* ao redor do eixo if, já que elas são paralelas a ele. Portanto, só restam as forças horizontais. Porém, devido à igualdade entre as forças austrais e boreais, e devido ao paralelismo das forças horizontais com o meridiano magnético, a agulha necessariamente vai adquirir uma direção paralela ao plano desse meridiano.

Por outro lado, o eixo horizontal iF, sendo suposto no meridiano magnético, e sendo a agulha SN paralela a esse meridiano, as forças horizontais não terão qualquer *torque* ao redor do eixo iF, já que elas são paralelas a ele; e as forças verticais magnéticas terão todas o mesmo braço de alavanca ao redor desse eixo. Disso resulta, devido à igualdade entre a soma das forças magnéticas, nas direções opostas, que essas forças, decompostas verticalmente, vão se contrabalançar ao redor do eixo iF; assim, as forças da gravidade de todo o sistema devem também se contrabalançar; e se fizermos passar, pelo centro de gravidade p, uma vertical pk, ela encontrará necessariamente o eixo iF em um ponto qualquer k, afastado do ponto i pela

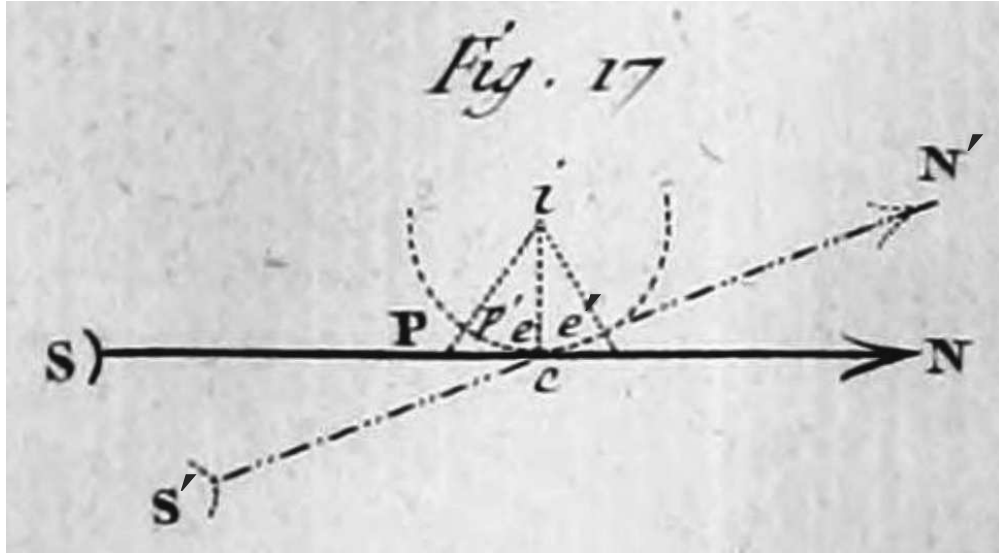
quantidade ki, que iremos determinar.

Para isto é necessário apenas buscar o *torque* de todas essas forças ao redor do eixo horizontal iO, perpendicular ao meridiano magnético. Acabamos de ver que a agulha sempre vai se direcionar ao longo do plano do meridiano magnético. Assim, as forças magnéticas μR de cada ponto μ, que acabamos de encontrar, pelo primeiro princípio, paralelas entre si, estão em um plano perpendicular ao eixo oi. Assim, se esse plano encontrar esse eixo no ponto O, e se C é o centro magnético da agulha SN, segue-se do Artigo 61, que o *torque* de todas as forças magnéticas ao redor desse eixo iO, será o mesmo que o *torque* de todas essas forças ao redor do centro magnético C. Assim, ao denominar de H ao ângulo $N\mu Q$, inclinação da agulha sobre a linha horizontal μQ, e de I ao ângulo $Q\mu R$, formado pela direção magnética μR, com essa mesma horizontal; teremos, como no Artigo 61, denominando ainda $\mu R = \varphi$, e $C\mu = r$,[206] a equação $\varphi\mu r \cdot \text{sen}\,(H + I) =$ *torque* magnético ao redor do eixo iO.

Se a é a distância do centro de gravidade p ao ponto de suspensão i; se, além disso, supormos o ângulo $pif = G$, o peso total $= P$, teremos, para o *torque* de todo o peso do sistema, ao redor do eixo io, a quantidade $aP \cdot \text{sen}\,G$; e, devido ao estado de equilíbrio, no qual supomos que o sistema tenha chegado, teremos, em geral

$$Pa \cdot \text{sen}\,G = \int (\varphi\mu \cdot c\mu) \cdot \text{sen}\,(H + I) \ .$$

65. Aqui vão várias conclusões que se podem tirar dessa observação. Quando equilibramos horizontalmente, por um lugar qualquer, uma rosa dos ventos[207] carregada com suas agulhas magnéticas, a força magnética, assim como a direção, vindo a mudar na medida em que mudamos de latitude e de longitude, ocorrerá que o plano da rosa [dos ventos] girará ao redor de seu centro de suspensão curvando-se no horizonte. Mas esse plano permanecerá sempre perpendicular ao plano do meridiano magnético do local onde chegamos. Ainda vai acontecer que o centro de gravidade de todo o sistema vai girar ao redor do ponto de suspensão i, aproximando-se ou afastando-se da perpendicular if, sem nunca sair do plano do meridiano magnético; e que o ângulo, percorrido pelo centro de gravidade, será igual à inclinação da rosa [dos ventos] sobre o plano horizontal. Isso é demonstrado pela *Figura* 17, na qual o centro de gravidade está em P quando a rosa é horizontal, sendo i o ponto de suspensão, e ie' uma perpendicular abaixada do ponto de suspensão sobre o plano da rosa.[208]

[206]No texto original a letra C aparece minúscula, a saber: $c\mu = r$.
[207]No original: *rose de boussole*.
[208]Substituí na Figura 17 as letras SN na agulha tracejada por $S'N'$.

Quando o ponto P chegar em P', a linha vertical ei chegará em ie', e a bússola NS [chegará] em $N'S'$, o ângulo $NCN' = eie' = PiP'$; assim, na equação do Artigo anterior,

$$a \operatorname{sen} G \cdot P = \int (\varphi\mu c\mu) \cdot \operatorname{sen}(H + I) \ ,$$

caso $\operatorname{sen} G = A$, quando a rosa é horizontal, teremos $A - G = H$ e, consequentemente,[209]

$$aP \cdot \operatorname{sen}(A - H) = \int \varphi\mu c\mu \cdot \operatorname{sen}(H + I) \ .$$

Caso fossem dadas a força magnética e sua direção, teríamos facilmente a inclinação H da bússola.

66. Para completar essa teoria, só falta determinar as forças coercitivas que dependem seja do atrito do pivô sobre o fundo da capa,[210] seja da imperfeição dessas capas. Porém, já percebemos que o atrito, ao aumentar necessariamente com o peso, e sendo a força magnética, guardadas as proporções, menor para uma lâmina pesada do que para uma lâmina leve, e que além disso o *torque* de uma lâmina, para voltar ao longo de seu meridiano magnético, sendo independente de sua posição no plano da rosa [dos ventos]; devemos sempre preferir as bússolas formadas com várias lâminas leves, cujas linhas do meridiano magnético são paralelas entre si, ao invés de uma única lâmina espessa e pesada. Porém, para nos colocar em condições de dizer algo mais preciso, vejamos o que a experiência e a teoria nos fornecem sobre o atrito dos pivôs.

5.5.1 Sobre o Atrito dos Pivôs

67. Todos os autores que escreveram sobre o atrito e todas as experiências que pudemos fazer sobre esse assunto, provam conjuntamente que a superfície influencia pouco sobre os atritos

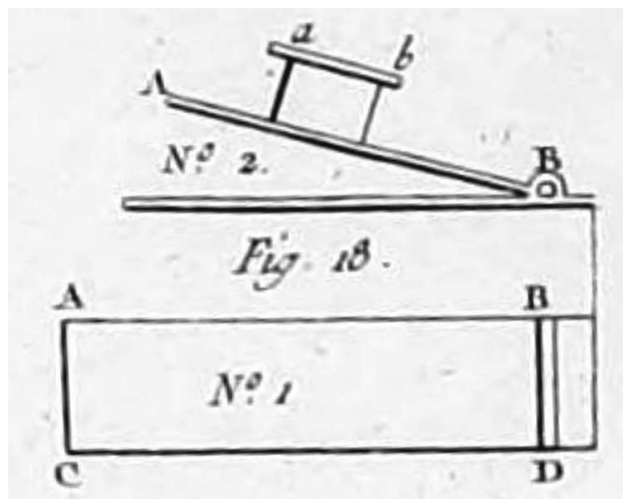
[209]No original essa equação aparece como:

$$aP \cdot \operatorname{sen}(A - H) = \int \varphi\mu c\mu \cdot (\operatorname{sen} H + I) \ .$$

[210]Ver a Nota de rodapé 108 na página 54.

dos corpos leves, e que eles seguem aproximadamente a razão das pressões.[211] Tentamos determinar se essa mesma lei ainda valeria, quando deslizássemos superfícies bem duras sobre as pontas da agulha.

5.5.2 Experiência

$ABCD$ (*Figura* 18, Números 1 e 2), é uma pequena placa, sobre a qual enfiamos três agulhas com a ponta para cima. Essa placa é móvel ao redor do eixo BD, fixado a uma mesa horizontal. Dessa maneira fornecíamos, à placa AB, [Figura 18], Número 2, a inclinação necessária, para que uma pequena lâmina ab, de vidro ou de cobre, colocada sobre a ponta de três agulhas, começasse a deslizar. Aqui vão os resultados de algumas experiências.

Ao utilizar uma lâmina de vidro pesando 1/2 onça [15,3 g], encontramos que, para que ela começasse a deslizar sobre as pontas de [agulhas de] aço, era necessário que o seno da inclinação fosse um sétimo do raio.[212] Carregamos sucessivamente essa placa com 1, 2, 3 e 4 onças [30,6 a 122,4 g], e sempre encontramos que ela começava a deslizar com a mesma inclinação. A lâmina de vidro, reduzida a 100 grãos [5,3 g], forneceu perceptivelmente o mesmo resultado.

Para uma lâmina de cobre amarelo,[213] aplainada no martelo e muito bem polida, ainda encontramos resultados análogos aos anteriores: apenas encontramos que o atrito era maior entre as pontas de aço e de cobre, do que entre o aço e o vidro. A placa de cobre só começa a deslizar sobre as pontas de aço, quando o seno da inclinação estava para o raio $:: 1 : 5\frac{1}{2}$.[214]

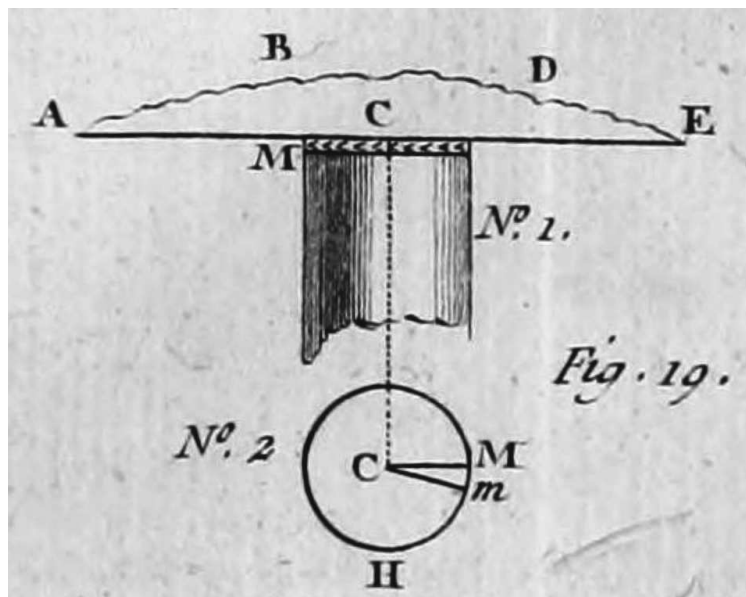
Segue-se dessas duas experiências que o atrito das pontas de pivô é aproximadamente proporcional às pressões.

68. Supomos agora um corpo $ABDE$ (*Figura* 19, Número 1), apoiado sobre a seção horizontal de uma coluna, cujo plano circular está representado na [Figura 19,] Número 2.

[211]Isto é, as forças de atrito são aproximadamente proporcionais às pressões ou às forças normais atuando sobre as superfícies.

[212]Isto é, que o seno de inclinação da lâmina com o horizonte fosse de 1/7.

[213]No original: *cuivre jaune*. Essa expressão pode ser traduzida como "latão", "bronze" ou "cobre amarelo". Nos casos em que Coulomb utiliza a palavra *laiton* optei por traduzi-la como *latão*. Quando ele utiliza a palavra *cuivre* optei por traduzi-la como *cobre*.

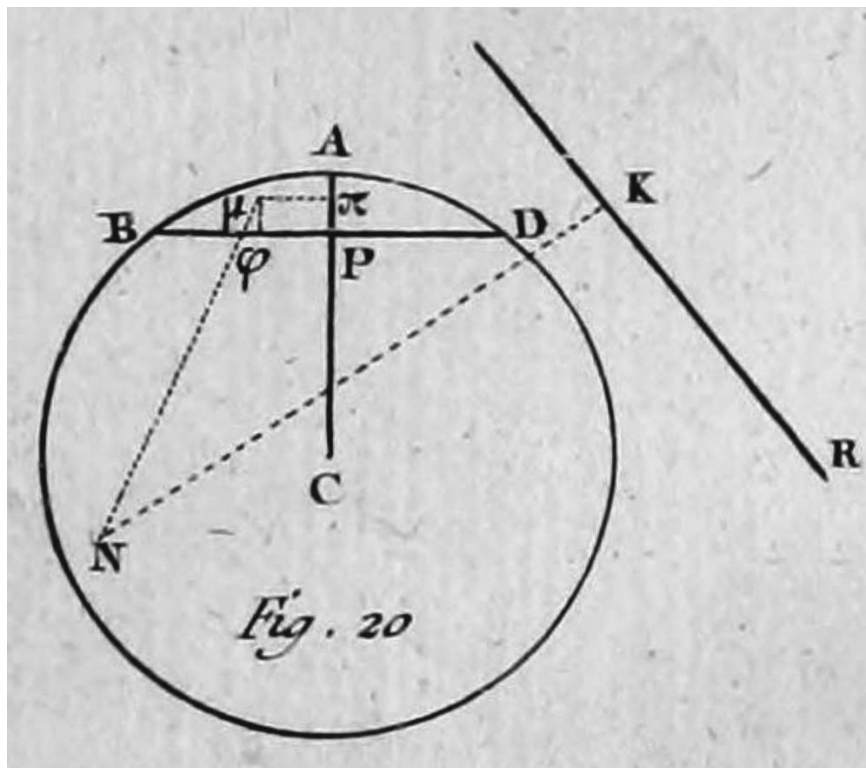
[214]Isto é, quando o seno de inclinação da lâmina de cobre com o horizonte fosse de 1/5,5.

Se supormos além disso que o centro de gravidade desse corpo corresponda ao ponto C, e que as forças horizontais agem para fazê-lo girar ao redor desse centro, é evidente que esse corpo será mantido pelo atrito de seu plano AE sobre o círculo CMH; atrito esse que dependerá da pressão experimentada por todos os pontos do círculo. Mas a pressão de todos os pontos do círculo deve ser aqui uma quantidade constante; ao menos é o que pareceria mais provável, ao supor toda a superfície desse círculo coberta de uma infinidade de pequenas molas iguais que, devido ao centro de gravidade colocado em C, se comprimiriam igualmente entre os dois planos de contato. Assim, como encontramos o atrito proporcional à pressão, o *torque*, devido à resistência de cada ponto do círculo, será proporcional à distância desse ponto ao centro C.

Seja δ/n o atrito de um ponto do círculo, sendo δ a pressão desse ponto,[215] o *torque* total do atrito ao redor do ponto C, será igual a[216] $\frac{\delta(CM)^3}{3\cdot n}\cdot 2\pi$; e como o peso do corpo iguala a pressão total do círculo de contato, teremos, ao denominar P ao peso do corpo, $P=\frac{\delta(CM)^2}{2}\cdot 2\pi$. Assim, o *torque* total do atrito ao redor do ponto C, será $\frac{2P}{3n}CM$, na qual $1/n$ exprime a razão da pressão para o atrito: dessa forma, o *torque* do atrito de um corpo, que gira sobre um círculo, está em razão composta de seu peso e do diâmetro do círculo de contato.[217]

69. Observação. Caso a vertical, passando pelo centro de gravidade do corpo, encontrasse (*Figura* 20), o círculo de contato $ABDE$ em um ponto P, diferente de seu centro C, encontraríamos da seguinte maneira as condições de equilíbrio.

[215] Ou seja, se a força normal sobre esse ponto é representada por δ, então a força de atrito estático é dada por δ/n, sendo $1/n$ o coeficiente de atrito estático.

[216] No original essa fórmula foi escrita como $\frac{\delta(CM)^3}{3\cdot n}\cdot 360°$.

[217] Ou seja, nesse caso o torque devido ao atrito é proporcional ao peso e ao diâmetro do círculo de contato.

Em primeiro lugar, a soma das pressões de todos os pontos do círculo deve ser igual ao peso do corpo. Em segundo lugar, se fizermos passar pelo ponto P dois eixos BD e AC perpendiculares entre si, no plano do círculo de contato, veremos que, como o ponto P está suposto na vertical que corresponde ao centro de gravidade, os *torques* do peso de todas as partes do corpo, estão em equilíbrio ao redor desses dois eixos; e que, consequentemente, é necessário que os *torques* da reação de pressão experimentada por todos os pontos μ, estejam em equilíbrio ao redor desses mesmos dois eixos. Assim, se traçarmos de todos os pontos μ do círculo, duas perpendiculares $\mu\varphi$ e $\mu\pi$ em relação a esses dois eixos; se δ representar a pressão do ponto μ, e P o peso do corpo, as três equações que exprimem o estado de equilíbrio, fornecerão, em primeiro lugar, $\int \delta \cdot \mu = P$, em segundo lugar, $\int \delta \cdot \mu\varphi = 0$; $\int \delta \cdot \mu\pi = 0$.

Se quiséssemos agora determinar a resistência que o atrito opõe a uma força horizontal KR,[218] suponhamos por um momento que o corpo só possa girar ao redor de um eixo vertical fixo, passando pelo ponto N; a partir do ponto N seja traçada a perpendicular NK sobre a direção da força KR, a resistência que o atrito oporá ao movimento de rotação horizontal, ao redor do eixo vertical N, será $\int \frac{\delta}{n} \cdot N\mu$, e o *torque* total, ao redor desse mesmo eixo, será, ao denominar k à força RK,

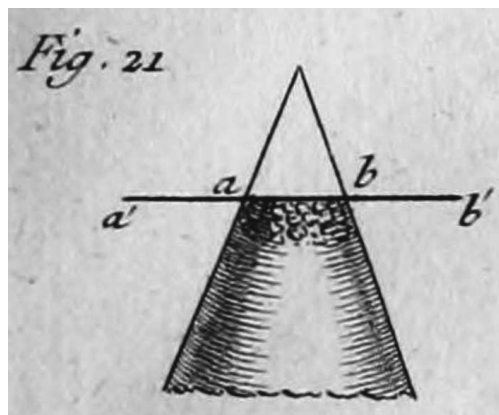
$$\left(k \cdot NK - \int \frac{\delta}{n} \cdot N\mu\right) \; ;$$

é claro que, desde que essa quantidade seja positiva, o corpo girará ao redor de seu eixo N; assim, se o corpo é livre, e se não houver qualquer eixo fixo, para obter o eixo verdadeiro ao redor do qual o corpo começará a girar, é necessário, ao variar o ponto N, determinar

[218][Nota de Coulomb:] Essa força KR é uma resultante, que é considerada aqui apenas em relação a seu *torque*; é necessário supô-la formada de diferentes forças iguais e opostas, que, abstraindo o atrito, fariam girar o corpo horizontalmente ao redor de seu centro de gravidade, que corresponde ao ponto P.

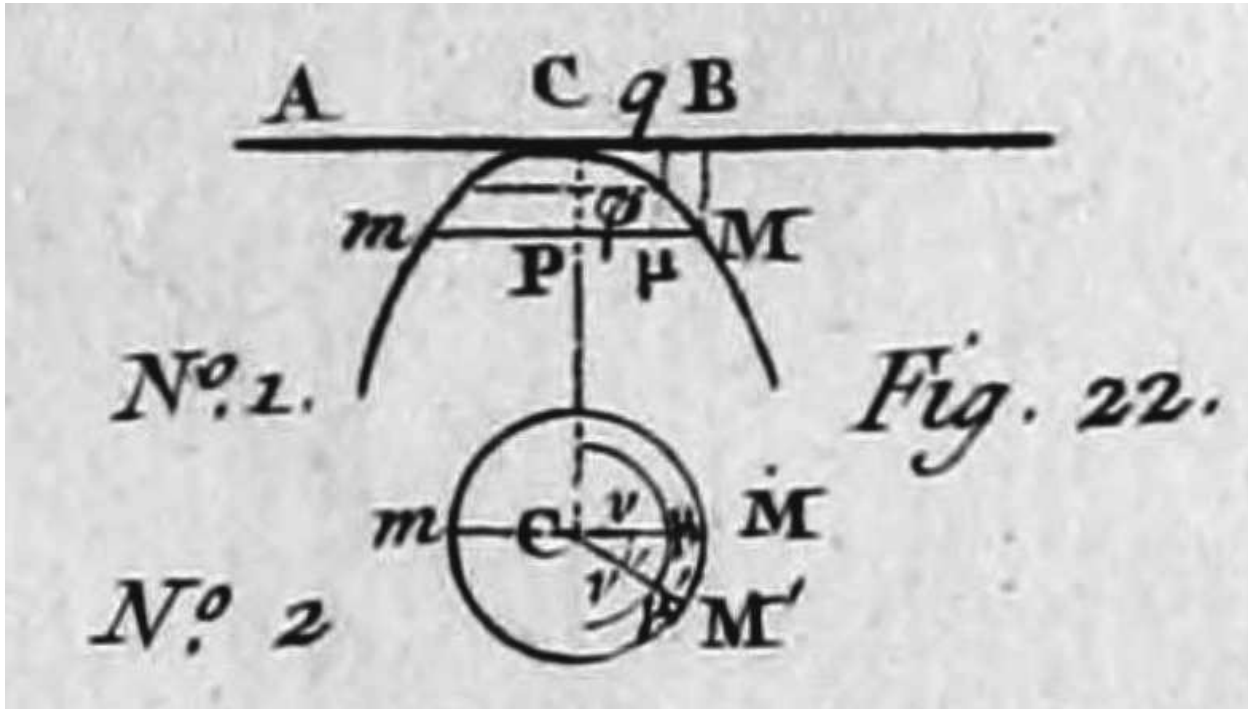
sua posição, supondo que a quantidade $(k \cdot NK - \int \frac{\delta}{n} N\mu)$, seja um *máximo*; pois, por essa operação, veremos facilmente que, para esse ponto N, assim encontrado, a quantidade $k \cdot NK - \int \frac{\delta}{n} N\mu$, começará a ter um valor positivo, durante o tempo no qual ela ainda é nula, ou negativa para todos os outros pontos; assim, desde que seja suposto dado o valor de δ, o restante será apenas um problema bem simples de geometria.

Não vamos parar muito tempo nessa observação; já que, no caso em relação ao qual temos necessidade, em que a ponta de um pivô é cercada pelo fundo cônico de uma capa [de bússola], ou penetra naturalmente ao afundar um pouco no interior de um plano horizontal, o eixo do pivô torna-se naturalmente o eixo de rotação; ainda mais que o plano de contato sempre é menor que todas as medidas perceptíveis, como veremos no Artigo 81.

70. Caso a natureza nos fornecesse corpos que fossem perfeitamente duros, ou cujas partes fossem reunidas por uma coesão infinita, esses seriam, indiscutivelmente, aqueles [corpos] que seria necessário escolher para fabricar as capas [de bússola] e os pivôs; já que pivôs semelhantes teriam os diâmetros de seus pontos infinitamente pequenos sem se romper, e sem penetrar no interior das capas. Mas todos os meios que podemos empregar, o aço mais rígido e mais bem temperado, todas as vitrificações, o próprio diamante, possuem apenas um certo grau de coesão, que cede por uma superfície dada a um peso dado. Assim, quando uma superfície pesada é equilibrada sobre a ponta de um pivô, é necessário que a superfície de contato seja bem considerável para que a coesão de todas as partes dessa superfície possa resistir sem ruptura ao peso que a pressiona. Consequentemente, é necessário, para um peso finito, que essa superfície seja finita. Para entender melhor de onde pode surgir o atrito de um pivô, suponhamos que os corpos sólidos sejam formados de uma infinidade de pequenos glóbulos ocos, preenchidos de uma matéria fluida elástica; que todos esses glóbulos se juntam entre si, assim como as partes sólidas que formam a superfície desses glóbulos, por uma adesão cuja causa nos é desconhecida; veremos que cada um desses pequenos glóbulos só poderia suportar um certo peso sem se romper. Assim, desde que a ponta de um pivô seja carregada por um plano pesado, é necessário, (*Figura* 21), que a superfície do círculo de contato, cujo diâmetro é ab, seja bem grande para que o número desses glóbulos, que formam essa superfície, possa suportar um peso dado; de onde resulta que quando carregamos a ponta de um pivô com pesos diferentes, a superfície de contato será proporcional aos pesos.

Se, ao invés de supor o corpo formado de uma infinidade de pequenos glóbulos, o supormos formado de uma infinidade de pequenas molas, encontraríamos da mesma forma que cada uma dessas pequenas molas só poderia suportar, sem se romper, um pequeno peso, e ainda concluiríamos disso que a superfície de contato é proporcional à pressão.

Portanto, parece provável que quando uma superfície bem dura é apoiada sobre a ponta de um pivô, a superfície de contato é proporcional à pressão total: assim, essa pressão é como o quadrado do diâmetro.

Mas encontramos, Artigo 68, que o *torque* do atrito de um plano pesado, sobre uma superfície circular, está em uma razão composta do diâmetro e da pressão. Assim, como esse diâmetro é aqui como a raiz [quadrada] do peso, encontraremos o *torque* do atrito dos pivôs proporcional a $P^{3/2}$.[219]

71. Se quisermos ter uma fórmula do *torque* dos atritos, baseada sobre hipóteses ainda mais gerais, suponhamos que a ponta do pivô em C, sobre a qual está apoiada a superfície AB, que vamos considerar como inflexível, seja um sólido de revolução, (*Figura* 22, Número 1), se a ponta desse pivô Mcm é comprimida até Mm, que é o diâmetro do círculo de contato, cada ponto φ da superfície do pivô chegará em μ, e a pressão experimentada pelo ponto μ, será como uma função da ordenada $\varphi\mu$, distância do ponto φ na situação natural até a situação forçada no estado de compressão. O Número 2 [da Figura 22] representa o círculo de contato, cujo diâmetro é Mm.

Seja no Número 2 [da Figura 22] o ângulo $MCM' = b$, $c\mu = x$, teremos, para a pressão da pequena superfície elementar, $\mu\mu'\nu\nu'$,

$$\textit{função}\ (\varphi\mu) \cdot dxbx = \textit{função}\ (CP - q\varphi)bxdx\ ;$$

[219]Em 1699 Guillaume Amontons (1663-1705) chegou nas leis de atrito, [Amontons, 1732], [Amontons, 1742], [Gillmor, 1971a, pág. 119] e [Heyman, 1997, pág. 76]. Ele concluiu que a força de atrito é proporcional à força normal e não depende da área de contato entre as superfícies. Afirmou que o coeficiente de atrito era aproximadamente o mesmo para todos os materiais testados e que a força de atrito vale aproximadamente 1/3 da força normal.

Coulomb encontrou que no caso das agulhas apoiadas sobre pivôs, o torque de atrito não era proporcional ao peso, como seria de se esperar pelos resultados de Amontons, sendo proporcional à 3/2 potência do peso.

porém, como CM é apenas uma pequena porção da superfície,[220] teremos, sem erro perceptível, φq proporcional a $(Cq)^2$, e CP proporcional a $(CB)^2 = (CM)^2$; assim, teremos, para a pressão elementar, *função* $(n'((CM)^2 - x^2))bxdx$, na qual n' é uma quantidade constante, dependente da curvatura do ponto C. Se, para simplificar, assumirmos que a pressão do ponto μ possa ser representada por uma potência m de $(\varphi\mu)$, teremos, para a pressão elementar, $n'^m(cM^2 - x^2)^m bxdx$; essa quantidade, integrada de maneira que se anule quando $x = 0$, fornecerá, para a totalidade do círculo,

$$\frac{n'^m 2\pi}{2(m+1)} CM^{2(m+1)} \ ;$$

quantidade essa que deve ser igual à pressão total P.

Da mesma forma, teremos para o *torque* da pressão elementar, $n'^m(CM^2 - x^2)^m bx^2dx$; quantidade essa que se integrará, ou exatamente, ou por quadraturas, de acordo com o valor de m. Porém, sem entrar no detalhe dessa integração, segue-se, das propriedades do cálculo integral, e da lei de homogeneidade, que deve ser observada entre as quantidades integrais e suas diferenciais, que teremos sempre o *torque* da pressão do círculo inteiro, proporcional a[221] $(CM)^{2(m+1)+1}$, e P proporcional a $(CM)^{2(m+1)}$. Assim, o *torque* do atrito será proporcional a $PP^{\frac{1}{2(m+1)}}$. Caso $m = 0$, nesse caso a pressão será constante para todos os pontos μ, e o *torque* do atrito será proporcional a $P^{3/2}$.

Caso $m = 1$, teremos o *torque* da pressão proporcional a $P^{5/4}$.

5.5.3 Fórmula Geral do Atrito de Pivôs e de Capas Flexíveis

72. Enfim, essa teoria terá todo o âmbito do qual ela parece suscetível, e ela será aplicável em todas as partes das artes, se continuarmos a supor que a ponta do pivô é formada por um sólido de revolução, e que esse pivô apoia uma capa [de bússola], cuja superfície interior também é uma superfície de revolução; se supormos além disso que o fundo da capa é compressível, da mesma forma que a extremidade do pivô; e que o peso com a qual a capa é carregada, é equilibrado de maneira que o eixo do pivô e o eixo da capa estejam na linha vertical, que passa pelo centro de gravidade do peso.

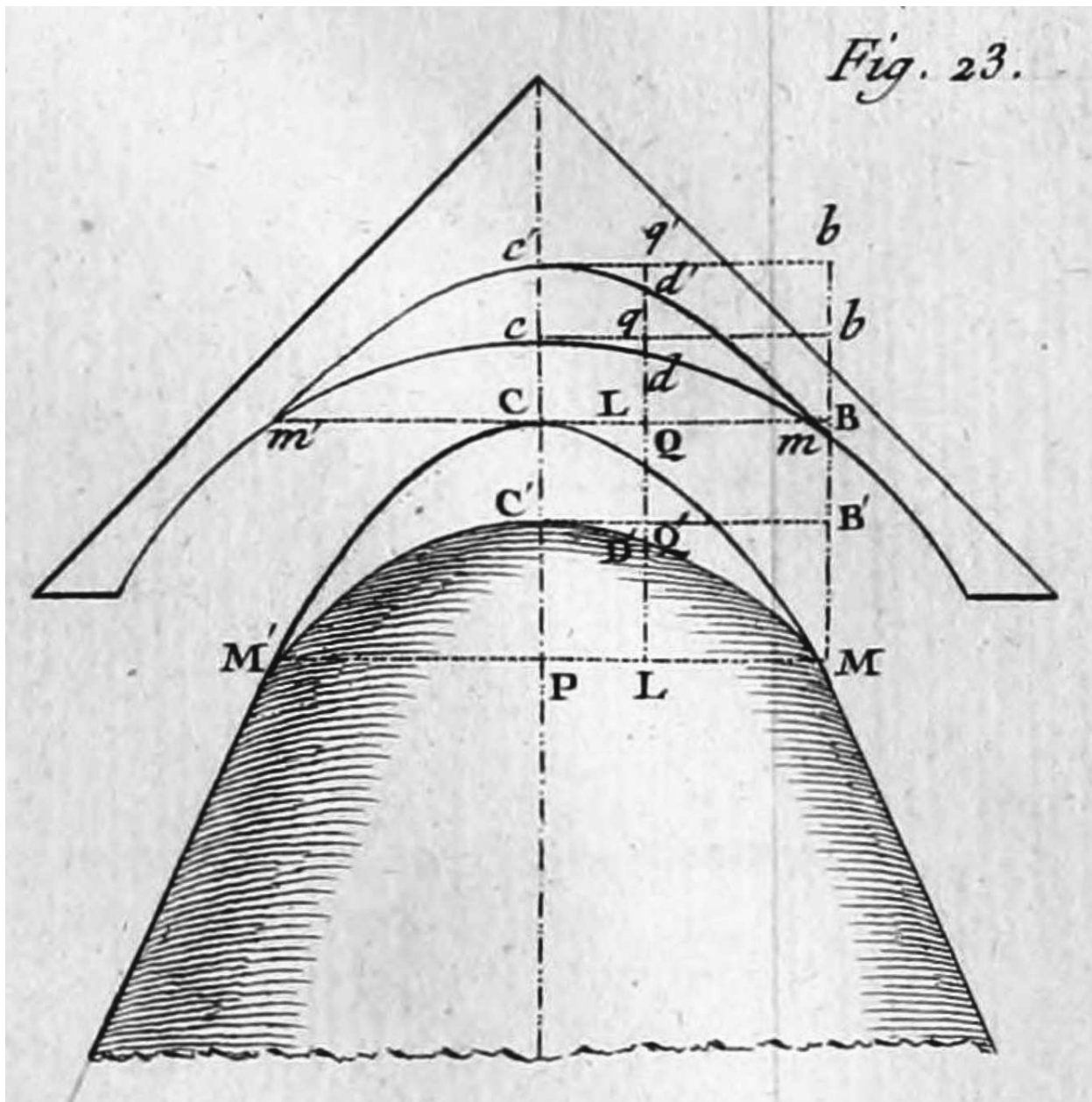
Na *Figura* 23, MCM' representa a cabeça do pivô antes de sua compressão; $MC'M'$ representa a cabeça desse mesmo pivô após sua compressão; mcm' representa o fundo da capa [de bússola] antes da compressão; $mc'm'$ representa o fundo dessa mesma capa após a compressão.

---

[220][Nota de Coulomb:] Ver o Artigo 81.

[221][Nota de Coulomb:] A observação que fazemos aqui sobre a homogeneidade das quantidades integrais e de suas diferenciais, frequentemente evita muitos cálculos nos problemas relacionados à física. Assim, a integral de

$$(x^m dx(a^\mu + na^{\mu-1}x + n'a^{\mu-2}x^2 + x)^q) \ ,$$

considerada quando $x = a$, nos fornece $Ga^{m+1+\mu q}$, na qual G é uma quantidade constante, independente do valor de a, e na qual n e n' são coeficientes constantes de dimensão nula.

É necessário que a ponta do pivô, assim como o fundo da capa, seja de uma matéria bem dura, para que possamos simplificar o problema, e supor que as partes comprimidas $CC'M$ e $cc'm$ sejam terminadas por pequenas linhas curvas, que podem sem erro perceptível, ser consideradas como arcos de círculo.

Traçamos as tangentes CB e $C'B'$, cb e $c'b'$ no vértice de todas as superfícies curvas, e consideramos a linha Lq' paralela ao eixo Pc', que corta as tangentes nos pontos Q, Q', q, q', e as curvas nos pontos correspondentes D, D', d, d'.

É claro que CM e $C'M'$, assim como cm e $c'm'$, sendo supostas, devido à dureza do pivô e da capa, porções muito pequenas de curva, CC' e DD', cc' e dd' representarão as compressões dos pontos correspondentes C e D, c e d.

Façamos agora $PM = a$, $PL = x$, o raio de curvatura em C, do pivô, tendo a compressão, $= D/2$; o raio de curvatura em C', do pivô, após a compressão, $= D'/2$; o raio de curvatura do fundo da capa, em C, antes de sua compressão, $= d/2$; o raio de curvatura da mesma

capa, após sua compressão, $= d'/2$.

Vemos inicialmente que após a compressão, o fundo da capa deve tocar a extremidade do pivô sobre todos os pontos de uma parte de sua superfície, a curva $M'C'M$ é exatamente a mesma que a curva $m'c'm$, e que assim $D' = d'$.

Vemos ainda que, como as pequenas porções das curvas que se tocam após a compressão podem, devido à dureza do pivô e da capa, ser consideradas como um surgimento de curva, teríamos, sem erro perceptível,[222] $BM = a^2/D$, $B'M = a^2/D'$, $b'm = a^2/D'$, $bm = a^2/d$, $QD = x^2/D$, $Q'D' = x^2/D'$, $q'd' = x^2/D'$, $qd = x^2/d$; porém a compressão do ponto D é

$$DD' = BM - QD - D'L = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'}\right)(a^2 - x^2) \ .$$

A compressão do ponto correspondente d, do fundo da capa, é

$$dd' = b'm - q'd' - dL' = \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d}\right)(a^2 - x^2) \ .$$

Agora a pressão experimentada por um ponto qualquer D' depende do estado de compressão e, consequentemente, pode se exprimir por uma função da compressão: para simplificar essa hipótese, suponhamos a pressão do pivô como uma potência m da compressão, e a pressão de um ponto da capa, como uma potência m' da compressão, teremos, para a pressão do ponto D', a quantidade

$$\left(\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'}\right)\left(a^2 - x^2\right)\right)^m \ ;$$

e, para a pressão do ponto correspondente d' da capa, teremos

$$g^{m'}\left(\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d}\right)\left(a^2 - x^2\right)\right)^{m'} \ ,$$

na qual g é uma quantidade que depende da razão da flexibilidade da capa para aquela do pivô.

Ora, devido ao fato que a pressão é comum aos pontos correspondentes D' e d', essas duas quantidades devem ser iguais, e fornecerão a equação

$$\left(\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'}\right)\left(a^2 - x^2\right)\right)^m = g^{m'}\left(\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d}\right)\left(a^2 - x^2\right)\right)^{m'} \ .$$

Essa primeira igualdade nos ensina uma verdade interessante, a saber, para que ela aconteça, é necessário que $m = m'$, já que ela deve ocorrer para todos os pontos de contato; assim, quando a pressão não for expressa, para a capa e para o pivô, pela mesma potência m, a capa tocará o pivô apenas em partes, e o contato não será contínuo.

Porém, desde que utilizemos duas matérias homogêneas, para as quais $m = m'$, temos imediatamente

$$\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'}\right) = g\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d}\right) \ ,$$

[222][Nota de Coulomb:] Na Figura 23, representamos a capa separada verticalmente acima da cabeça do pivô, de maneira que a linha mm', extremidade do contato, que devia se confundir com a linha MM', quando a capa é apoiada sobre a cabeça do pivô, encontra-se aqui fazendo uma mesma linha com a tangente CB do pivô, antes de sua compressão.

de onde obtemos

$$\frac{1}{D'} = \frac{\left(\frac{1}{D} + \frac{g}{d}\right)}{g+1} \ ;$$

de onde segue que a curvatura, produzida pela compressão, é independente da potência m.

Se substituirmos esse valor $1/D'$, na fórmula

$$\left(\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'}\right)\left(a^2 - x^2\right)\right)^m \ ,$$

que exprime a pressão do ponto D', teremos

$$\left(\frac{\left(\frac{g}{D} - \frac{g}{d}\right)}{g+1}\left(a^2 - x^2\right)\right)^m \ .$$

Estamos agora em condições de determinar a pressão total, e o *torque* dos atritos, que é a parte interessante de nossa pesquisa.

Como fizemos a suposição aqui de que a parte $M'C'M$ comprimida é apenas uma pequena porção da curva, podemos, sem erro perceptível, supor que a superfície gerada pela revolução de CDM ao redor do eixo CP, ou, o que dá no mesmo, que a superfície do pivô, é igual à superfície do círculo, do qual MM' é o diâmetro. Após essa suposição, teremos, para a pressão de uma zona, cujo raio é $x = CQ$, e dx a largura, a quantidade

$$2\pi\left(\frac{\left(\frac{g}{D} - \frac{g}{d}\right)}{g+1}\left(a^2 - x^2\right)\right)^m xdx \ ;$$

ao integrar teremos para toda a superfície do círculo cujo raio é $PM = a$ [o seguinte valor:]

$$2\pi\left(\frac{\left(\frac{g}{D} - \frac{g}{d}\right)}{g+1}\right)^m \frac{a^{2(m+1)}}{2(m+1)} \ ;$$

quantidade que deve ser igual à pressão total, ou ao peso P, com o qual supomos que a capa está carregada. Para ter o *torque* da pressão, será necessário multiplicar a pressão elementar por x, o que fornecerá

$$2\pi\left(\frac{\frac{g}{D} - \frac{g}{d}}{g+1}\right)^m \left(a^2 - x^2\right)^m x^2 dx \ .$$

Essa equação é integrável exatamente todas as vezes nas quais m é um número inteiro. Assim, no caso da elasticidade perfeita, na qual suporíamos a pressão proporcional à compressão, teríamos $m = 1$; o que forneceria, para o *torque* da pressão total,

$$\frac{2}{15}(2\pi)\left(\frac{g}{g+1}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)a^5 \ ;$$

porém, nessa suposição,

$$P = \frac{1}{4}(2\pi)\frac{g}{g+1}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)a^4 \ ,$$

de onde tiramos o *torque* da pressão

$$= \frac{2}{15}\frac{(4P)^{1/4}}{\left(2\pi\frac{g}{g+1}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\right)^{1/4}}\ ;$$

e, caso $1/f$ expresse a razão do atrito para a pressão, será suficiente dividir essa quantidade por f, para ter o *torque* do atrito. Ao seguir os passos do Artigo anterior, encontraremos, sem entrar no detalhe da integração, denominando

$$N = 2\pi\left(\frac{g}{g+1}\right)^m\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)^m\ ,$$

que como a pressão da zona é $N(a^2-x^2)^m xdx$, e o *torque* elementar da pressão dessa mesma zona, é $N(a^2-x^2)^m x^2dx$, teremos, para a integral da pressão, quando $x = a$, a quantidade $GNa^{2(m+1)}$; e, para a integral do *torque*, [teremos] $G'Na^{2(m+1)+1}$, nas quais G e G' são funções de m, independentes de a e de N. Assim, como $GNa^{2(m+1)} = P$, teremos $\frac{G'}{G}Pa$ para o *torque* total da pressão, ou

$$\frac{G'}{G}P\left(\frac{P}{GN}\right)^{\frac{1}{2(m+1)}}\ ;$$

assim, ao substituir o valor de N, teremos o *torque* da pressão e, consequentemente, o *torque* do atrito, proporcional a

$$\frac{P^{\frac{(2m+3)}{(2m+2)}}}{\left(\left(\frac{g}{g+1}\right)\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\right)^{\frac{m}{2(m+1)}}}\ .$$

Caso $m = 0$, reobtemos essa quantidade $= P^{3/2}$, como no Artigo 70.

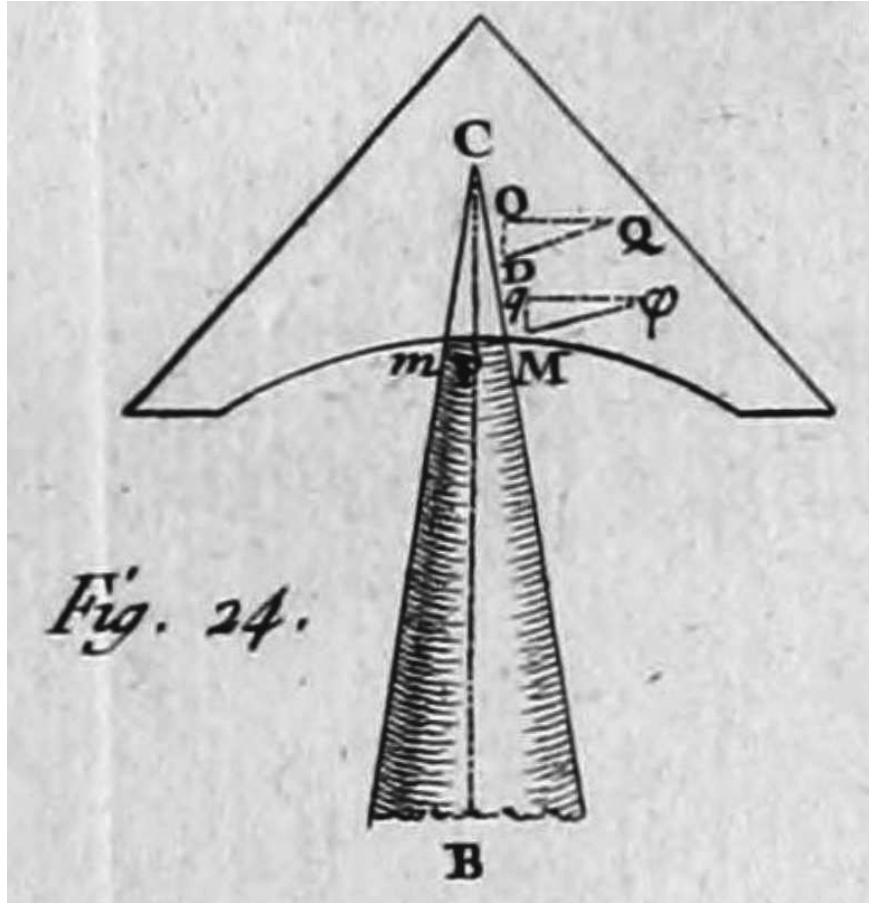
Quando utilizamos as mesmas capas e os mesmos pivôs, devemos encontrar o *torque* do atrito aumentando com o peso, e proporcional a $P^{\frac{2m+3}{2m+2}}$.

Essa quantidade vai diminuir, permanecendo tudo o mais igual, na medida em que $\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)$ aumentar; ou seja, na medida em que aumentarmos a curvatura da extremidade do pivô, e [na medida em que] aplainarmos, ou que diminuirmos a curvatura do fundo da capa. Disso resulta essa prática comum, quando temos necessidade de fazer girar massas muito grandes ao redor de um eixo vertical, de apresentar uma superfície convexa à extremidade convexa do pivô, já que então $\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)$ torna-se $\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{d}\right)$.

Enfim, o *torque* de atrito vai diminuir na medida em que aumentar a quantidade g; ou seja, na medida em que aumentar a dureza do fundo da capa, sendo dada a dureza do pivô. Caso, ao invés de supor a pressão de um ponto D do pivô $= (DD')^m$, tivéssemos suposto essa pressão $= (\delta\cdot DD')^m\delta$ aumentando com a dureza do pivô, teríamos, na fórmula que exprime o *torque* do atrito, $\left(\frac{g\delta}{\delta+g}\right)$, no lugar de $g : (g+1)$. Ora, como o *torque* do atrito diminui na medida em que essa quantidade aumenta, e como essa quantidade aumenta na medida em que g e δ são maiores, segue que quanto maiores forem a dureza, ou a inflexibilidade do pivô e da capa, mais vai diminuir o *torque* do atrito; ele vai se tornar nulo quando g e δ forem infinitos.

73. Observação. Quando a capa é apoiada por uma agulha muito fina, caso a ponta dessa agulha seja fortemente temperada, e que ela seja muito mais dura do que o fundo da

capa, nesse caso poderá acontecer que ela penetrará no interior da capa, da qual ela dividirá as partes; a teoria anterior não pode ser aplicada a esse caso.

Na Figura 24, MCm representa a ponta do pivô que dividiu as partes da capa; seja o pequeno ângulo $mCM = 2A$; seja $PM = a$ o afastamento do ponto M, desde sua situação natural, quando ele está em P, até sua situação comprimida, quando ele chegou a m; seja $P'D = x$, que exprime a compressão do ponto D.

A pressão sobre a parte CM dependerá das compressões PM e pD dos pontos D e M. Suponhamos que essa pressão seja como uma potência m da compressão, teremos, para a pressão DQ que o ponto D experimenta perpendicularmente a CM o valor $(gP'D)^m$, ou $(gx)^m$. Vamos decompor essa força em outras duas, uma vertical DO e a outra horizontal OQ. A semelhança dos triângulos nos fornecerá a força vertical

$$DO = (gx)^m \operatorname{sen} A \ .$$

Caso a ponta do pivô possa penetrar no interior da capa, sem sofrer atrito, seria necessário, em consequência dos princípios da estática, os quais mencionamos no início desse Capítulo, que a soma das forças verticais $(gx)^m \operatorname{sen} A$ fosse igual ao peso da capa e ao peso com o qual ela estaria carregada.

Mas a pressão DQ gera um atrito, e o pivô não pode furar o sólido da capa, sem vencer esse atrito, que será proporcional a DQ, e impedirá o pivô de deslizar ao longo de CM.

Caso $(1/f)$ exprima a razão da pressão para o atrito, $\frac{(gx)^m}{f}$ será o atrito que atua, em D, ao longo de CM, para impedir a ponta do pivô de penetrar na solidez da capa. Vamos

decompor essa nova força em uma força vertical e uma força horizontal, assim teremos, para a força vertical,

$$\left(\frac{(gx)^m}{f} \cdot \cos A \right) .$$

Portanto, a reação do atrito e da pressão, para sustentar o peso da capa, será, em D,

$$(gx)^m \left(\operatorname{sen} A + \frac{\cos A}{f} \right) .$$

Essa reação, sendo multiplicada pela pequena zona circular da superfície do pivô, cujo raio é pD ou x, e cuja largura é $\frac{dx}{\operatorname{sen} A}$, fornece, para a pressão vertical dessa pequena zona,

$$g^m 2\pi \frac{1}{\operatorname{sen} A} \left(\operatorname{sen} A + \frac{\cos A}{f} \right) x^{m+1} dx .$$

Essa quantidade, integrada por toda a superfície do pivô, fornece, ao fazer $x = a$,

$$g^m (2\pi) \frac{1}{\operatorname{sen} A} \left(\operatorname{sen} A + \frac{\cos A}{f} \right) \frac{a^{m+2}}{m+2} = P .$$

Por outro lado, se a pressão do ponto D, que encontramos [igual a] $(gx)^m$, for multiplicada por $\frac{dx}{\operatorname{sen} A}$, largura da zona, e por sua circunferência $2\pi x$,[223] teremos

$$\frac{g^m}{f} 2\pi \frac{1}{\operatorname{sen} A} x^{m+2} dx$$

para o *torque* do atrito dessa zona. Integrando essa quantidade, supondo $x = a$, teremos ainda

$$\frac{g^m}{f} 2\pi \frac{1}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{a^{m+3}}{m+3} ;$$

e, como acabamos de ver que

$$P = g^m 2\pi \frac{1}{\operatorname{sen} A} \left(\operatorname{sen} A + \frac{\cos A}{f} \right) \frac{a^{m+2}}{m+2} ,$$

resulta, para o *torque* total do atrito,

$$\frac{1}{f(m+3)} \left(\frac{\operatorname{sen} A}{2\pi g^m} \right)^{1/(m+2)} \left(\frac{(m+2)P}{\operatorname{sen} A + \frac{\cos A}{f}} \right)^{\frac{m+3}{m+2}} .$$

Quando o pivô for muito pontudo, nesse caso sendo muito pequeno o ângulo A, teremos para o *torque* do atrito,

$$\frac{1}{m+3} \left(\frac{\operatorname{sen} A \cdot f}{2\pi g^m} \right)^{1/(m+2)} ((m+2) P)^{\frac{m+3}{m+2}} .$$

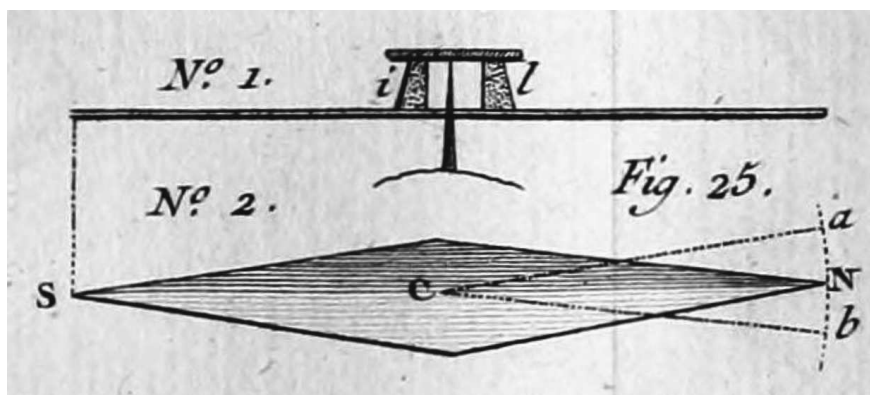
[223] No original, [Coulomb, 1780, pág. 239]: "*par sa circonférence* $360°x$." Estou aqui escrevendo a circunferência do círculo de raio x como sendo dada por $2\pi x$. Essa substituição também é feita nas outras fórmulas desse trabalho.

Essa quantidade, diminuindo na medida em que diminui $\operatorname{sen} A$, segue que os pivôs mais pontudos seriam melhores, o que seria efetivamente verdade, se pudéssemos lhes fornecer uma força suficiente para suportar o peso da capa, sem se dobrar.

É fácil de prever todos os inconvenientes que resultam, na prática, de um pivô muito fino, que fura a parte sólida da capa. Pois, embora suponhamos inicialmente essa capa suspensa pela pressão lateral de suas partes divididas, o menor movimento oscilatório seria imediatamente utilizado pelo atrito, as partes laterais seriam comprimidas, e nesse caso é necessário que a cabeça do pivô, ou se arredonde ou se dobre, para suportar sozinho todo o peso. O caso no qual a cabeça do pivô vem a se arredondar, cai no caso do Artigo anterior. O caso no qual as extremidades do pivô se curvam, fornece um atrito bem grande, já que nesse caso a capa se apoia, não sobre um ponto, mas sobre uma pequena linha e, consequentemente, o atrito aumentará na medida em que aumentar o comprimento dessa linha. Se existirem quaisquer desigualdades no fundo da capa, a extremidade curva do pivô penetrará nelas, ou obliquamente, ou horizontalmente, e não poderemos mais confiar de forma alguma na direção da bússola.

Porém, antes de entrar nas dificuldades relativas à prática sobre a força e sobre a forma dos pivôs, vamos apresentar algumas experiências que iremos comparar com a teoria.

5.5.4 Experiência sobre o Atrito dos Pivôs

74. Pegamos, Figura 25, Números 1 e 2, uma agulha de bússola, perfurada com um buraco C em seu centro de gravidade, Figura 25 Número 2. Colamos, Figura 25 Número 1, a 3 ou 4 linhas [0,68 ou 0,90 cm] acima desse buraco, uma pequena lâmina de vidro bem polida. Essa lâmina encontrava-se separada da agulha por meio de dois pequenos bastões de madeira i e l, colados na bússola e na lâmina. Essa bússola pesava, com tudo incluído, 150 grãos (8,97 g), a lâmina de vidro e os pequenos pedaços de madeira pesavam em conjunto 9 grãos. A agulha tinha 10 polegadas (27,07 cm) de comprimento e fazia 10 oscilações em 60 s.

Colocávamos essa agulha horizontalmente sobre a ponta de um pivô de aço muito rígido, Figura 25 Número 1.[224] Era necessário tatear para encontrar o ponto de equilíbrio. Porém, como o centro de gravidade é muito mais baixo do que o ponto de suspensão, foi fácil chegar a esse objetivo. Quando a agulha encontrava-se um pouco inclinada, a restabelecíamos rapidamente na posição horizontal com areia espalhada sobre a extremidade mais leve.

[224]O pivô passava pelo buraco no centro da agulha imantada e a lâmina de vidro ficava encostada em sua ponta. O pivô suportava o peso conjunto da lâmina de vidro, dos dois pequenos bastões de madeira e da agulha imantada.

Estando essa agulha bem fechada em uma caixa, procurávamos, ao lhe apresentar de longe o polo de uma outra agulha [imantada], os limites de seu campo de indiferença[225] ou o ângulo formado entre todas as direções *ca* que ela podia assumir, sem que sua força magnética e diretriz a levasse a seu meridiano [magnético] verdadeiro. É evidente que o ângulo de indiferença *acb* era proporcional ao atrito.

Primeiro teste. A bússola suspensa livremente sobre seu pivô forneceu um ângulo *acb* de 8 ou $10'$.

Segundo teste. A bússola carregada de duas pequenas placas de cobre, pesando juntas 300 grãos [15,93 g], forneceu um ângulo *acb* de $30'$.

Terceiro teste. A bússola carregada de 600 grãos forneceu um ângulo *acb* de $60'$.

Quarto teste. A bússola carregada de 1200 grãos forneceu um ângulo *acb* de $3°\ 15'$.

Quinto teste. A bússola carregada de 1800 grãos forneceu um ângulo *acb* de $5°$.

Resultado Dessa Experiência

Em todos os testes, a agulha estava sempre suspensa horizontalmente colocada sobre a ponta do mesmo pivô, sustentada por um plano bem polido o qual podemos considerar, devido à sua grande rigidez, como impenetrável ao aço. O fundo de uma capa,[226] suas desigualdades e suas curvaturas não podiam influenciar em nada aqui sobre o aumento do atrito. Assim, os desvios da bússola medidos pelo campo de indiferença só podiam ser ocasionados pelo atrito horizontal da placa de vidro sobre a ponta de um pivô. Se supusermos agora que o *torque* do atrito seja como uma potência n do peso, ou melhor da compressão, encontraremos, ao desprezar o primeiro teste, pois é difícil, devido ao pequeno valor do ângulo *acb*, ter uma medida justa, e ao comparar em seguida o segundo teste com todos os outros, que resulta do segundo e do terceiro teste

$$(450)^n : (750)^n :: 30' : 60' \ ,$$

de onde

$$n = 1,357 \ .$$

O segundo e o quarto teste fornecem

$$n = 1,703 \ .$$

O segundo e o quinto teste fornecem

$$n = 1,571 \ .$$

Ao pegar um valor médio, obtemos

$$n = 1,544 \ ,$$

de onde parece resultar que o *torque* do atrito é aproximadamente proporcional a $P^{3/2}$, como a teoria (Artigo 70) nos parece indicar. De onde resulta consequentemente que, quando a

[225]No original: *champ d'indifférence*.

[226]Ver a Nota de rodapé 108 na página 54.

ponta de um pivô é comprimida por um plano impenetrável, todos os pontos do círculo de contato sofrem aproximadamente uma pressão igual.

Realizamos um grande número de experiências ao suspender, como nos testes anteriores, as agulhas imantadas por meio de placas de vidro, de ágata, de cobre amarelo e de diferentes composições, e sempre encontramos resultados análogos a esses que acabamos de detalhar.

Quando os pivôs foram utilizados por muito tempo e quando suas pontas estão gastas, encontramos bem exatamente que o *torque* dos atritos era proporcional às pressões.

As melhores capas que conseguimos obter nos forneceram atritos proporcionais a $P^{3/2}$. Contudo, a menor inclinação na posição da bússola e as pequenas curvaturas que se encontram no fundo dessas capas produzem frequentemente no resultado das experiências desigualdades que nenhuma hipótese pode justificar.

5.5.5 Comparação do *Torque* das Forças Magnéticas com o *Torque* do Atrito dos Pivôs

75. Nos incumbimos até aqui de desenvolver todos os elementos que causam o direcionamento das agulhas. Também nos ocupamos de determinar as forças coercitivas que podem produzir desvios nesse direcionamento. Ao comparar agora as forças coercitivas com a força magnética, nos será fácil determinar sobre a escolha das lâminas que devemos empregar para fazer bússolas de acordo com os vários usos que podemos destinar para elas.

Encontramos (Artigo 6) que $(B-S)$ ou o ângulo do desvio da agulha magnética, podia ser representado por $R/(\int \varphi\mu r)$ e que, consequentemente, para diminuir esse desvio tanto quanto possível, era necessário que essa quantidade fosse um *mínimo*.

Mas encontramos (Artigo 37) que[227]

$$\int \varphi\mu r = \frac{KLEl^3}{(mL^{1/2}E + nl)^2} \ .$$

Encontramos, pelos Artigos anteriores, que o *torque* do atrito de um pivô deve ser proporcional a uma potência da pressão e, se denominarmos essa potência de λ, a experiência nos mostrou que ela era aproximadamente igual a $3/2$.

Assim, se supusermos, ao conservar as mesmas letras, que uma rosa dos ventos marítima, cujo peso é $(2gA)$, seja equilibrada horizontalmente sobre a ponta de um pivô e direcionada por uma lâmina imantada que tenha uma espessura e uma largura uniformes ao longo de todo o seu comprimento, encontraremos, ao denominar $LEl = M$,[228] que

$$\frac{R}{\int \varphi\mu r} = B\frac{2g(A+M)^\lambda}{kMl^2}\left(mL^{1/2}E + nl\right)^2 \ .$$

Sendo B um coeficiente constante, ao substituir no lugar de $L^{1/2}E$ seu valor $M : L^{1/2}l$, teremos, para o *mínimo*...,[229]

$$d\left[\frac{(A+M)^\lambda}{M}\left(\frac{mM}{L^{1/2}l^2} + n\right)^2\right] = 0 \ .$$

[227] Coulomb está considerando aqui uma agulha imantada de comprimento l, Largura L e espessura E.

[228] Ou seja, M é o volume da agulha.

[229] Ou seja, o mínimo dessa grandeza é obtido quando sua derivada se anula, como expresso na próxima equação.

O que fornece, ao variar M:

$$\frac{\lambda dM}{A+M} - \frac{dM}{M} + \frac{\frac{2m}{L^{1/2}l^2}dM}{\frac{m}{L^{1/2}l^2}M+n} = 0 \ ,$$

equação de segundo grau de onde é fácil obter o valor de M.

É inútil variar L e l, já que vemos imediatamente que, permanecendo M constante, é necessário aumentar essas quantidades até o infinito ou ao menos até que a natureza da solidez do aço o possa permitir.

Sendo dadas as grandezas L e l, a equação anterior fornece a espessura da lâmina.

76. Podemos determinar facilmente, pelo mesmo procedimento, o comprimento de uma lâmina quando são dadas suas outras dimensões. Ao substituir, no lugar de M, o valor δl, onde $\delta = LE$, grandeza considerada aqui constante por hipótese,[230] teremos

$$d\frac{(A+\delta l)^\lambda}{\delta l^3}\left(\frac{m\delta}{L^{1/2}}+nl\right)^2 = 0 \ ,$$

ou

$$\frac{\lambda\delta}{A+\delta l} - \frac{3}{l} + \frac{2n}{\frac{m\delta}{L^{1/2}}+nl} = 0 \ ,$$

equação de segundo grau, de onde podemos obter o valor de l.

77. Se supusermos, na fórmula do Artigo anterior, que a agulha não está sobrecarregada de qualquer peso, teremos por hora $A = 0$, e a equação se reduz a:

$$(\lambda - 3) + \frac{2nl}{\frac{m\delta}{L^{1/2}}+nl} = 0 \ ,$$

de onde

$$l = \frac{3-\lambda}{\lambda-1}\frac{mEL^{1/2}}{n} \ .$$

5.5.6 Exemplo

Encontramos, na primeira experiência (Artigo 26), que uma lâmina de 12 polegadas de comprimento e pesando 288 grãos fazia, quando estava reduzida a quatro polegadas de comprimento, 20 oscilações em 80 s. Vimos que uma diminuição de 4 polegadas no comprimento dessa lâmina produzia uma diminuição de 49 s no tempo das oscilações. Ora, como $T = (mEL^{1/2} + nl)$, temos, para uma agulha de 4 polegadas de comprimento:

$$nl = 49 \text{ s} \ ;$$

e, como $T = 80$ s, temos ainda

[230] A grandeza $\delta = LE$ representa a área de seção reta da agulha com comprimento l.

$$mEL^{1/2} = 31 \text{ s} \; ;$$

substituindo esses valores na fórmula $l = \frac{3-\lambda}{\lambda-1}\frac{m}{n}EL^{1/2}$, encontramos

$$l = \frac{3-\lambda}{\lambda-1}\frac{31 \text{ s}}{49 \text{ s}} 4 \text{ polegadas}$$

e, se supusermos $\lambda = 3/2$, como nos ensina a experiência, teremos

$$l = \frac{31 \text{ s}}{49 \text{ s}} \times 3 \cdot 4 \text{ polegadas} = 7,59 \text{ polegadas} \qquad (20,57 \; cm) \; .$$

Observação. Da fórmula $l = \frac{3-\lambda}{\lambda-1}\frac{m}{n}EL^{1/2}$, concluímos que l diminui na medida em que $EL^{1/2}$ diminui, isto é, que o comprimento das agulhas deve ser diminuído na medida em que são mais leves. É o que a prática já havia indicado.

78. As questões[231] que poderíamos ter necessidade do tipo dos dois Artigos anteriores são muito fáceis de resolver para que seja necessário pararmos aí por muito tempo. Vamos terminar essa teoria com dois problemas pequenos, que serão frequentemente úteis na composição de bússolas formadas com várias agulhas imantadas.

Vimos, na teoria do magnetismo, que as lâminas mais leves eram aquelas que, considerada a proporção, se imantavam mais fortemente. Vimos (Artigos 61 e 62) que uma agulha equilibrada sobre um plano horizontal tinha sempre o mesmo *torque* para se restabelecer na direção de seu meridiano magnético. De onde é fácil ver que uma bússola, formada de várias lâminas paralelas e separadas, tem mais força para se dirigir ao longo de seu meridiano do que uma única lâmina que tivesse o mesmo peso que todas as lâminas reunidas. Essas considerações nos apresentam dois problemas.

79. Problema. *Sendo dado o peso da rosa dos ventos marítima, assim como todas as dimensões das lâminas magnéticas que queremos empregar, de quantas lâminas a bússola deve ser composta para que ela se aproxime o mais possível de seu meridiano magnético.*

Seja $2gA$, como acima, o peso da rosa [dos ventos] e $2gM$ o peso de uma das agulhas dadas, seja k o número das agulhas, o *torque* da pressão e, consequentemente, do atrito será como $(A + kM)^\lambda$. Mas o *torque* da força magnética expresso para cada lâmina por $\int \varphi\mu r$ fornecerá, devido à igualdade das lâminas, para o *torque* da força magnética, $k \int \varphi\mu r$. Assim, o ângulo de desvio será

$$(A + kM)^\lambda : k \int \varphi\mu r \; .$$

[231] No trabalho original esse Artigo saiu com o número 77, assim como o Artigo anterior. Alteramos a numeração para 78, seguindo desse número em diante nos próximos Artigos desse trabalho.

É necessário diferenciar essa grandeza fazendo variar apenas k. Isso fornece, para a condição do problema:

$$k = \frac{A}{(\lambda - 1)M} \ .$$

E, caso $\lambda = 3/2$, como nos mostrou a experiência, $k = 2A/M$. Assim, seriam necessárias, por exemplo, 4 lâminas de 100 grãos para uma rosa [dos ventos] que pesasse 200 grãos.

80. Problema. *Sendo dado o número k de lâminas, assim como seus comprimentos e larguras, determinar a espessura ou o peso dessas lâminas.*

Temos ainda aqui a equação geral

$$(A + kM)^{\lambda} : k \int \varphi \mu r$$

ou

$$\frac{(A + kM)^{\lambda}}{kM} \left(\frac{m}{L^{1/2} l^2} M + n \right)^2 \ .$$

Ao diferenciar essa equação, fazendo apenas M variar, obtemos

$$\frac{\lambda k}{A + kM} - \frac{1}{M} + \frac{\frac{2m}{L^{1/2} l^2}}{\frac{m}{L^{1/2} l^2} M + n} = 0 \ ,$$

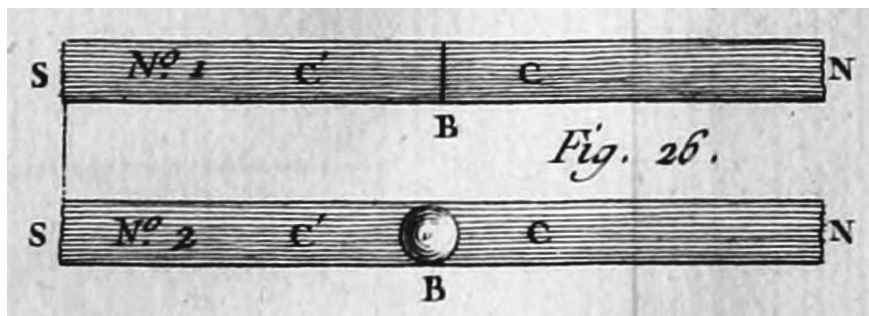
equação de segundo grau, de onde resulta, ao fazer

$$\frac{2m}{L^{1/2} l^2} = m' \ ,$$

a fórmula reduzida

$$M = -\left[\frac{(\lambda - 1)nk + m'A}{2(\lambda + 1)m'k} \right] + \left[\left(\frac{(\lambda - 1)nk + m'A}{2(\lambda + 1)m'k} \right)^2 + \frac{nA}{(\lambda - 1)m'k} \right]^{1/2} \ .$$

Acreditamos ter reunido, nesse Capítulo, a maior parte dos princípios que podem nos direcionar na construção de bússolas apropriadas ao serviço da marinha. Vamos terminá-lo por algumas observações relativas, seja à teoria, seja à prática, que ainda não puderam encontrar seu lugar.

81. *Primeira observação.* Se dividirmos em duas partes, no ponto B, uma lâmina NS (Figura 26, Número 1) imantada até a saturação, na qual N é a extremidade boreal e S a extremidade austral, e cujo centro magnético está localizado aproximadamente no centro da lâmina, após a separação, a extremidade B da parte NB será o polo austral e a extremidade N conservará sua força boreal: a extremidade B da parte SB terá uma força boreal, a extremidade S conservará sua força austral. Cada uma de suas partes terá um centro magnético em C e C'.

Caso, em vez de ser dividida em duas partes, essa mesma lâmina seja apenas perfurada de um buraco B (Figura 26, Número 2), para que então as duas extremidades estejam em partes separadas, essa lâmina deverá ter dois centros magnéticos, como a [lâmina] anterior.

Essa multiplicação de polos nos faz acreditar que uma lâmina assim perfurada deveria perder em parte sua força diretriz[232] e que ela seria pouco apropriada para indicar as declinações [magnéticas]. Aqui vai o que a experiência fornece sobre esse assunto.

Quando uma lâmina foi perfurada em seu centro de um buraco cujo diâmetro não excedia a metade da largura da lâmina, ela manteve sensivelmente a mesma força diretriz[233] que possuía antes de ser perfurada. É fácil de se convencer disso ao oscilar essa lâmina imantada até a saturação e suspensa horizontalmente. Encontraremos que, nos dois casos, ela realiza perceptivelmente o mesmo número de oscilações no mesmo tempo.

Quando o buraco da lâmina é quase igual à sua largura, encontramos em seguida que o *momento* magnético dessa lâmina é igual à soma dos *momentos* magnéticos de duas outras lâminas que possuíam apenas a metade do comprimento da primeira lâmina. Isso também está de acordo com a teoria que explicamos (Artigos 61 e 62). Assim, quando a lâmina é muito leve, como no caso desta última, seu *momento* magnético é aproximadamente igual a uma quantidade constante, multiplicada por seu comprimento, quer a lâmina, nesse caso, seja perfurada ou que ela não o seja, teremos sempre aproximadamente o mesmo *momento*.

82. *Segunda observação.* Após tudo o que dissemos sobre a comunicação do magnetismo, não acreditamos que seja necessário fazer pesquisas sobre os formatos diferentes, sejam retilíneos, sejam curvos, que podemos dar às lâminas imantadas. É fácil de prever tudo o que podemos esperar dessas variações.

As agulhas em formato de seta, do formato indicado na Figura 25, fornecem, para peso e espessura iguais, a mesma razão entre o *torque* magnético e o *torque* do atrito e produzem, consequentemente, aproximadamente os mesmos desvios que as lâminas com uma largura uniforme. Contudo, observamos que as lâminas leves com uma largura uniforme são mais vantajosas que as lâminas com formato de seta e que, quando as lâminas são pesadas, essas são mais vantajosas que as primeiras. A teoria prevê esse resultado, confirmado pela experiência.

As agulhas, tais como na Figura 25, que devemos nos servir bastante na prática para as observações que fazemos sobre a Terra são na maioria dos casos mais espessas nas extremidades do que nas outras partes. Essa prática parece ser desfavorável. Percebemos facilmente que é melhor, ao conservar o mesmo peso, alargar a extremidade e diminuir a espessura para que as partes exerçam, umas sobre as outras, sua ação magnética a uma distância maior e

[232]No original: *force directrice*.
[233]No original: *force de direction*.

conservem, consequentemente, uma maior grau de magnetismo.

83. *Terceira observação*.[234] Dissemos anteriormente que sempre havia vantagens em compor bússolas com várias lâminas leves: a teoria do magnetismo não deixa qualquer dúvida sobre esse Artigo. Quanto mais multiplicarmos as lâminas, deixando-as proporcionalmente mais leves, maior será a vantagem da força diretriz da bússola em relação ao atrito. Na construção das bússolas de navegação, nas quais dificilmente podemos dar mais de seis polegadas de comprimento [16,2 cm] às agulhas magnéticas, as lâminas com 50 a 60 grãos [2,7 a 3,2 g] satisfazem muito bem a todos os usos aos quais são destinadas essas bússolas: determinamos o número das lâminas pela fórmula do Artigo 81.[235] Essas lâminas calibradas exatamente seguindo as mesmas dimensões, são colocadas de lado, a distâncias iguais do ponto de suspensão, espaçadas de quatro ou cinco linhas [0,9 ou 1,1 cm] de distância uma da outra, para que a ação recíproca entre elas não destrua o magnetismo.[236] Elas devem ser bem retas e devem ser fixadas de maneira rígida à rosa [dos ventos] que elas direcionam: a rosa e a capa [de bússola] serão assim [tão] leves quanto for possível. As capas [de bússola] bem centradas e giradas com cuidado, devem formar em sua concavidade um cone mais obtuso do que agudo. A maior parte das capas, embora elas pareçam visualmente bem centradas e polidas exatamente, possui, em sua concavidade, desigualdades e pequenas depressões causadas pela ponta do pivô; de maneira que existem posições nas quais o centro de gravidade do peso encontra-se mais baixo do que em outras [posições]: quando a capa chega nessa situação, ela não pode girar horizontalmente, com seu eixo permanecendo vertical, sem que essas desigualdades sendo liberadas, não levantem o centro de gravidade dessa capa e da massa que está fixada nela.

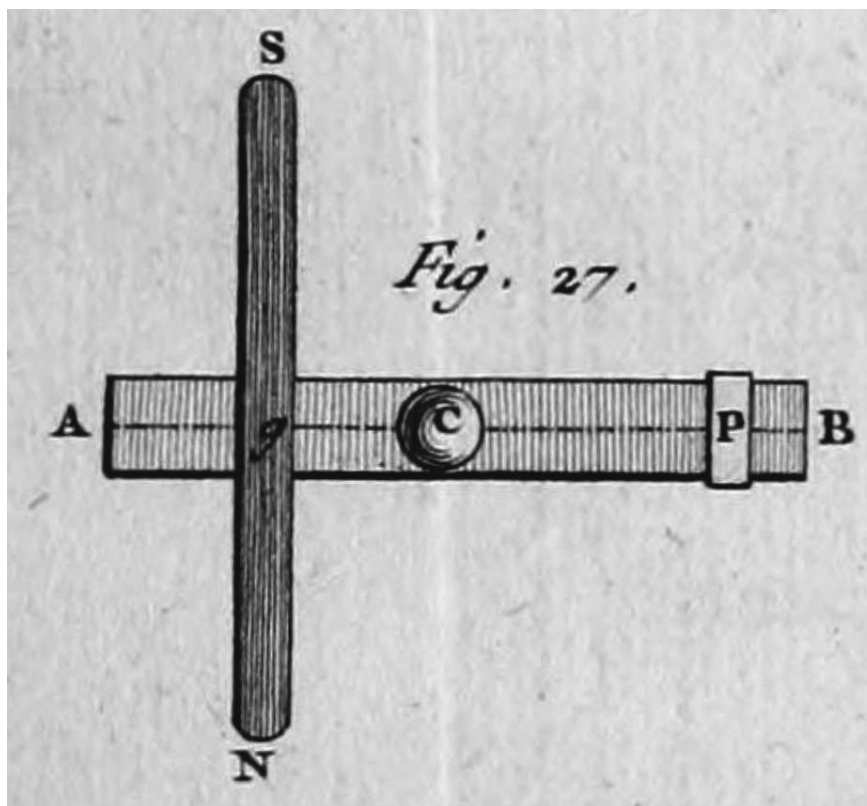
Assim, uma bússola suportada por uma capa semelhante e equilibrada horizontalmente sobre a ponta de um pivô, encontra-se ao mesmo tempo solicitada pela força magnética e por seu peso, que causa as desigualdades do fundo da capa com as desigualdades da ponta do pivô, tendendo a lhe fazer assumir a posição na qual o centro de gravidade está mais embaixo: somente a paciência e a habilidade do artífice podem nos fornecer capas exatas; porém o observador também pode, por meio de diferentes testes, reconhecer os defeitos [das capas]. Aqui vai um método que funcionou muito bem para mim.

Suspendemos de lado uma lâmina imantada por meio de [fios de] seda, como indicamos anteriormente; dessa maneira, determinamos facilmente o meridiano magnético. Traçamos igualmente esse meridiano sobre a largura da lâmina, suspendendo-a de maneira que sua largura esteja em um plano horizontal, e em seguida invertendo-a sobre a outra face, como explicamos no Artigo 63.

Pegamos agora, (*Figura* 27,) uma pequena régua de madeira AB bem leve, guarnecida em C com a capa [de bússola] que queremos testar.

[234] O texto daqui para a frente não foi incluído na reimpressão parcial desse artigo na obra de Potier, [Potier, 1884].

[235] No texto original aparece aqui "Artigo 78". Alterei essa expressão para "Artigo 81" devido à renumeração que introduzi anteriormente, ver a Nota de rodapé 231 na página 122.

[236] [Nota de Coulomb:] Quando várias lâminas são fixadas ao plano da rosa [dos ventos], a ação recíproca entre elas não pode influenciar na posição do plano dessa rosa, devido à igualdade entre a ação e a reação. Contudo, essa ação recíproca, podendo diminuir mais ou menos o magnetismo das partes de cada lâmina, pode ocasionar uma mudança de posição na resultante das forças magnéticas de cada lâmina; porém sempre será fácil de encontrar a resultante comum de todas as agulhas fixadas à rosa, ao inverter essa rosa, e praticando as mesmas operações que indicamos (Artigo 63) para uma única lâmina.

Colocamos em um ponto qualquer g, uma lâmina SN imantada até a saturação, da qual conhecemos o meridiano magnético: equilibramos o conjunto horizontalmente, por meio do contrapeso P, que pode deslizar ao longo de CB, e com um pouco de areia que espalhamos levemente sobre as partes que parecem se levantar.

Se a capa é perfeitamente centrada e se seu eixo encontra-se na vertical, o pequeno plano de contato do pivô e do fundo da capa, será um pequeno círculo horizontal, e a direção da agulha será unicamente determinada pela força magnética: faremos desaparecer o desvio que o atrito pode ocasionar, ao bater levemente e rapidamente sobre a mesa na qual o pivô está fixado; o que produz, nas partes elásticas dessa mesa, um rápido movimento de oscilação, que faz com que o pivô suba e desça. Durante o tempo em que o pivô desce, concebemos que ele se solta em parte do fundo da capa, e que durante esse tempo, a pressão e, consequentemente, o atrito é pequeno. Segue-se agora de tudo o que dissemos anteriormente, que em qualquer posição que a agulha magnética seja colocada em relação a seu centro de rotação, ela deve assumir a direção do meridiano magnético: ora, como essa direção nos é conhecida, o ângulo que ela vai fazer com essa direção, será o desvio devido aos defeitos da capa e do pivô.[237]

Ao colocar sucessivamente essa lâmina, de maneira que seu meridiano magnético SN, faça diferentes ângulos com a linha pontilhada AB da balança; reconheceremos todas as imperfeições da capa, cujos diferentes pontos viciosos são encontrados em cada teste, colocados diferentemente em relação à direção magnética, e fornecendo desvios diferentes.[238]

Podemos utilizar vários outros meios. Se, por exemplo, suspendermos, com essa capa, uma agulha perfurada em seu centro e se, pelo ponto de suspensão, fizermos passar o meridi-

[237]Ou seja, o ângulo que a agulha vai fazer com o meridiano magnético será o desvio da declinação devido apenas aos defeitos da capa e do pivô.

[238]Isto é, com cada defeito produzindo um diferente desvio angular da bússola em relação ao verdadeiro meridiano magnético.

ano magnético; essa agulha deve não apenas se orientar ao longo de seu meridiano magnético; mas quando ela for colocada em oscilação, ela deve realizar percursos iguais à direita e à esquerda desse meridiano, ou ao menos [oscilações] que diminuam igualmente a cada percurso.

Se não temos o auxílio de um bom artífice, e se pudermos obter um furador obtuso, bem polido e um pouco arredondado em sua ponta, podemos formar uma capa muito boa, ao afundar esse furador perpendicularmente de um quarto de linha [0,06 cm], com um pequeno golpe de martelo, no centro de uma pequena placa de cobre.

Os pivôs devem ser mais ou menos pontudos, dependendo das cargas que são destinados a sustentar. Nas bússolas, para o serviço das embarcações, os pivôs gastam bastante, não apenas devido ao peso da rosa [dos ventos] de cartão onde são carregadas as agulhas [imantadas], mas ainda devido ao movimento contínuo onde estão as bússolas. Temos o costume e com razão de fazer esses pivôs mais reforçados, menos pontudos do que aqueles que devem sustentar as agulhas destinadas a realizar suas operações em um local fixo.

A dureza das capas e dos pivôs é a condição mais essencial para a perfeição desses instrumentos; jamais o pivô deve ser tão pontudo a ponto de penetrar na parte sólida da capa, nem para poder se curvar sob seu peso.

84. *Quarta observação.* O ponto de suspensão ou de contato da extremidade do pivô e do fundo da capa é uma pequena superfície circular, como vimos (Artigo 70). Parece interessante para o assunto que tratamos, e para as artes em geral, tentar determinar o diâmetro desse círculo. Vai aqui como podemos chegar a esse fim de acordo com a teoria e com as experiências anteriores.

Vimos (Artigo 74,) que resultou da experiência, que o pequeno círculo de contato, formado pela compressão da extremidade do pivô, era igualmente pressionado em todos os seus pontos. Encontramos (Artigo 68,) que o *torque* do atrito sobre o pequeno círculo de contato, era expresso pela grandeza $\frac{2P}{3n} \cdot CM$, na qual CM é o raio do círculo de contato, e P/n o atrito do peso P, que escorregaria ao longo de uma superfície; quantidade essa que encontramos para [o contato entre] o vidro e o aço, igual e $(P/7)$, Artigo 67.

Vimos, Artigo 6, que o ângulo de desvio da agulha imantada[239] era $(B-S) = R/(\int \varphi\mu c\mu)$, e encontramos (Artigo 12), que

$$\int \varphi\mu c\mu = \frac{g \cdot \int \mu r^2}{\lambda} \ ,$$

na qual λ é o comprimento de um pêndulo que realizaria oscilações isócronas às oscilações da agulha. Assim, temos

$$(B-S) = \frac{2\lambda P}{3gn \int \mu r^2} CM \ ;$$

e sendo $B-S$ dado pela experiência, da mesma forma que λ, encontraremos facilmente o valor de CM para uma agulha dada.

5.5.7 Exemplo

Encontramos (*Artigo 74, Experiência, primeiro Teste,*) que uma agulha no formato de flecha, com 10 polegadas de comprimento e com 150 grãos de peso, realizou 10 oscilações em 60″, e

[239] Desvio em relação ao meridiano magnético.

que seu ângulo de desvio devido ao atrito, era de $5'$. Ora para uma agulha dessa forma temos $\int \mu r^2 = \frac{P \cdot l^2}{6g}$, na qual l é igual aqui a 5 polegadas. Assim, $CM = \frac{(B-S)nl^2}{4\lambda}$. Ao substituir os valores numéricos, $n = 7$, $\lambda = 1321$ polegadas, $(B - S) = 5'$, $l = 5$ polegadas, teremos o diâmetro do círculo de contato, $2CM = 1/862$ de linha.[240]

Me parece que podemos concluir, da pequenez do diâmetro do círculo de contato, encontrado nesse exemplo, que o plano de contato pode ser considerado como um ponto fixo.

5.5.8 Bússolas de Inclinação

85. *Quinta observação.* As agulhas de inclinação sempre apresentaram dificuldades muito grandes durante seu desempenho, seja porque é difícil de fazer o centro de gravidade cair no eixo de sustentação, seja porque a curvatura dessas agulhas, mudando de acordo com sua inclinação, torna variável a posição desse centro de gravidade em relação ao eixo do suporte giratório.[241] Não podemos acrescentar nada às pesquisas acadêmicas que o Sr. Daniel Bernoulli forneceu a esse assunto.[242] Porém, quando não podemos dispor de um artífice tão hábil e tão exato quanto aqueles que seriam necessários; aqui vai como me pareceu que poderíamos resolver esse problema para preencher os pontos de vista desse autor.

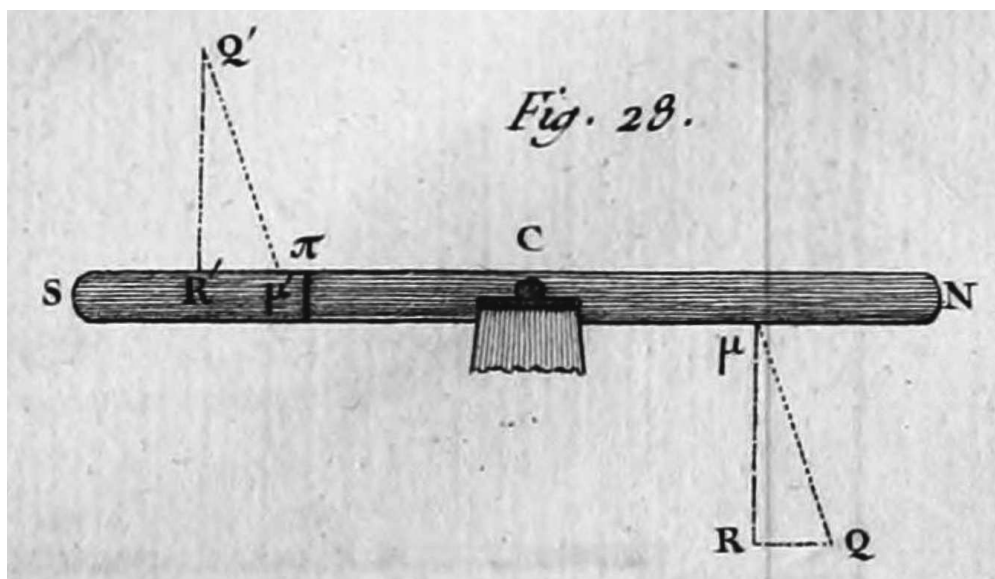
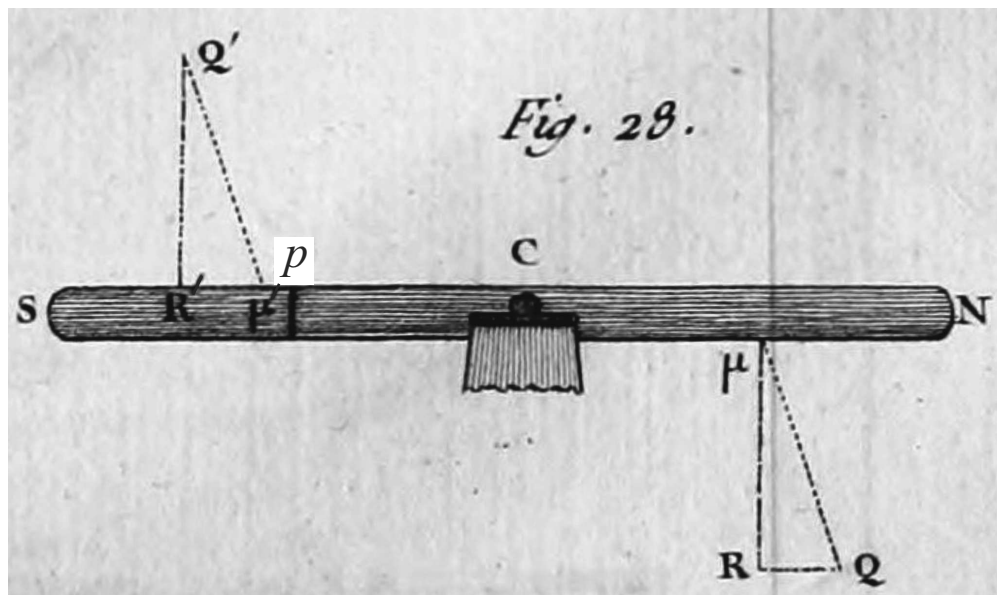
A agulha SN (*Figura* 28,) é equilibrada sobre seu suporte giratório C, apoiado sobre duas lâminas de vidro. Um fio de cobre p pesando um ou dois grãos [0,05 ou 0,10 g], mas cujo peso é determinado exatamente, pode deslizar ao longo da parte austral, desde C até S, seu *torque* é medido pela distância (Cp).[243]

---

[240] Isto é, diâmetro = (1 *linha*)/862 = (0, 226 *cm*)/862 = $2,6 \times 10^{-4}$ *cm*.

[241] No original: *tourillons*. O suporte giratório ou munhão é uma peça cilíndrica que serve de eixo de sustentação. Pode ser também a extremidade cilíndrica do eixo de rotação.

[242] Daniel Bernoulli (1700-1782) foi um matemático e cientista suíço. Ver, em particular, [Bernoulli, 1752].

[243] No artigo original Coulomb representou o fio de cobre pela letra π, ver [Coulomb, 1787, pág. 254] e a Figura nessa Nota de rodapé:

Estou aqui seguindo Potier e representando o fio de cobre pela letra p na Figura 28 que coloquei no meio do texto, para evitar confusão com o número $\pi = 3,14159...$, ver [Potier, 1884, pág. x] e a página 28 dessa tradução em português. Esse fio de cobre pode ser pensado como tendo a forma da letra U invertida, podendo deslizar ao longo do eixo da agulha imantada.

Antes de imantar essa lâmina, ela será equilibrada bem exatamente sobre esse eixo do suporte giratório, em uma posição horizontal, com o pequeno peso p correspondendo nesse caso em C ao eixo do suporte giratório, ou não exercendo qualquer *torque*. Em seguida, imantamos a lâmina até a saturação. Se ela for de um aço bem puro, o centro magnético ficará aproximadamente em C, as forças μQ que atuarão sobre cada ponto μ da parte boreal CN, serão paralelas entre si e à direção magnética. As forças $\mu' Q'$ que atuarão sobre a parte austral, terão a mesma direção em um sentido oposto. Portanto, para manter a agulha na posição horizontal, será necessário levar o pequeno peso p à distância Cp do ponto C.[244]

Se decompormos agora todas as forças magnéticas μQ em duas outras forças, uma horizontal RQ, e outra vertical $R\mu$, e se denominarmos φ à força ao longo de μQ, e B ao ângulo μQR, inclinação da direção magnética com o horizonte, teremos, para o *torque* magnético de todas as forças verticais,

$$\int \varphi \mu c \mu \operatorname{sen} B \ ,$$

que deve ser igual a $p \cdot pC$.[245]

Se em seguida suspendermos essa agulha horizontalmente, por meio de um [fio de] seda,

[244]Ver a Nota de rodapé 103 na página 53.
[245]Uma ilustração dessa experiência aparece na Figura dessa Nota de rodapé:

como fizemos anteriormente, e se fizermos a agulha oscilar,[246] o tempo das oscilações nos fornecerá, de acordo com o Artigo 13, um peso Q, tal que, multiplicado pela metade do comprimento da agulha, terá um *torque* igual a todas as forças magnéticas RQ que atuam ao longo de uma direção horizontal; de onde obteremos

$$Q \cdot CN = \int \varphi\mu c\mu \cos B \ .$$

Ao dividirmos agora o *torque* das forças verticais pelo *torque* das forças horizontais, teremos a equação

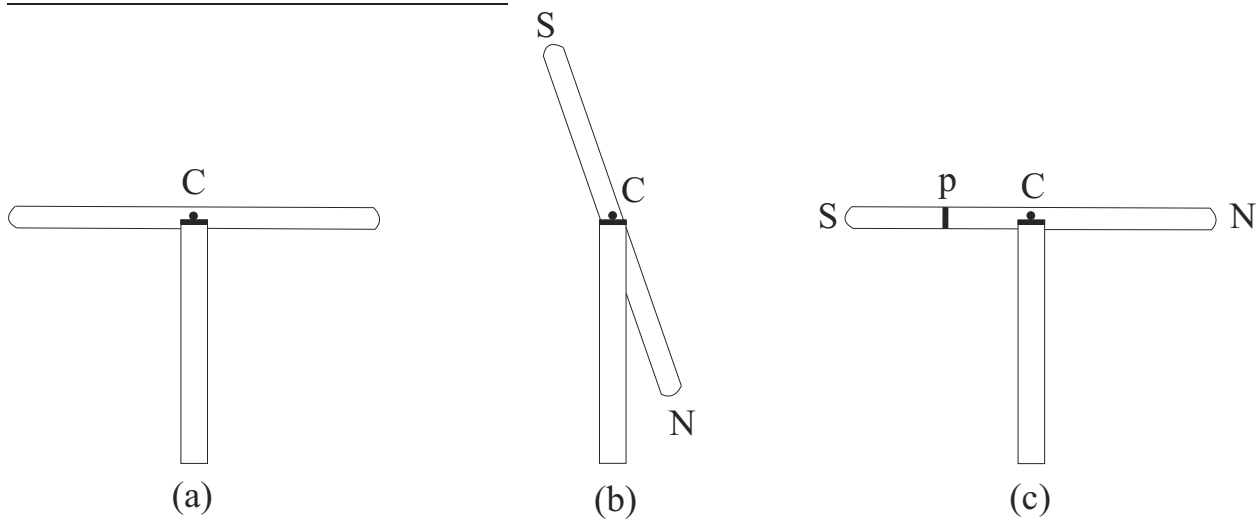
$$\frac{p \cdot pC}{Q \cdot CN} = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \tan B \ ;$$

o que fornecerá o ângulo B que buscamos.

Ao substituir o valor de B assim determinado na equação

$$\frac{Q \cdot CN}{\cos B} = \int \varphi\mu c\mu \ ,$$

obteremos o *torque* das forças magnéticas, tão interessante de conhecer nas diferentes partes da Terra.

Observamos que, para que esse método seja praticável, é necessário ter cuidado de aproximar bastante o eixo do suporte giratório do centro de gravidade da lâmina, já que nesse caso a menor variação na posição do peso p, fornecerá um ângulo de inclinação perceptível.

Temos uma agulha não imantada que pode girar em um plano vertical ao redor de um eixo horizontal que passa por seu centro de gravidade. Essa agulha é colocada inicialmente em uma orientação horizontal, como mostrado na letra (a) dessa Figura. Quando ela é imantada, o polo Norte da agulha fica abaixo do horizonte se ela estiver localizada em Paris, enquanto que o polo Sul fica acima do horizonte, como mostrado na letra (b). Se houver pouco atrito no eixo e se esse eixo passar exatamente pelo centro de gravidade da agulha, ela vai se orientar ao longo da direção da força magnética terrestre, ver a Seção 4.3. Coulomb coloca então um fio de cobre de peso p que pode deslizar ao redor do lado CS da agulha. Ele vai deslizando esse peso a partir do centro da agulha em direção à extremidade S, até encontrar um certo ponto no qual a agulha volte a ficar horizontal, como ilustrado na letra (c). Nessa situação o torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha deve ser igual ao torque gravitacional. Esse torque gravitacional é dado pelo peso p da linha de cobre multiplicado pelo braço da alavanca, ou seja, multiplicado pela distância pC.

[246] Isto é, oscilar em um plano horizontal ao redor do eixo vertical dado pelo fio de seda.

5.6 Capítulo V. Sobre as Variações Diurnas Regulares da Declinação das Agulhas

86. Até aqui sempre apresentamos a teoria antes das experiências, e não fizemos nenhuma hipótese sobre a natureza do fluido magnético. Porém, como nesse Capítulo se trata de fixar uma causa, e como nos faltam observações feitas durante uma sequência de anos, e sobre a precisão das quais poderíamos confiar, não poderemos seguir uma rota tão certa.

O sistema geral dos físicos foi durante longo tempo o de que a causa do magnetismo era devido a um turbilhão de matéria fluida, que faria sua revolução ao redor dos ímãs, sejam artificiais, sejam naturais, entrando por um polo e saindo pelo outro. Diz-se que esse fluido agiria sobre o ferro devido à configuração de seus poros, mas ele não exerceria nenhuma ação sobre qualquer outra espécie de corpo. Nessa hipótese, na medida em que se encontrassem dificuldades para explicar novos fenômenos magnéticos, ou [para explicar] as variações de declinação das agulhas, faríamos quaisquer novas suposições, seja ao imaginar vários turbilhões ou vários polos magnéticos, seja ao imaginar um ímã no centro da Terra, ao qual daríamos um movimento particular.

Foi baseado nesses princípios que foram estabelecidas as três Memórias sobre a causa do magnetismo que foram premiadas em 1746.[247] Contudo, a dificuldade de explicar todos os fenômenos magnéticos com turbilhões, fez vários físicos suspeitarem, depois de vários anos, que a causa do magnetismo poderia vir da atração.

Creio ter provado, no começo dessa Memória, que as causas da orientação da agulha magnética, não poderiam ser explicadas pelo impulso.[248] Adiciono aqui, que quando imantamos uma barra de aço com um ímã artificial, não parece que a barra que serviu para imantar tenha perdido seu magnetismo após o procedimento. Contudo, na hipótese do impulso, o turbilhão da barra que imanta produziu um movimento em toda a massa do fluido magnético da barra que foi imantada. Esse movimento não poderia ser produzido sem um impulso que, por reação, deveria destruir uma parte do movimento, ou mudar a direção do fluido magnético da barra que foi utilizada para imantar. Consequentemente, caso o magnetismo fosse devido ao impulso, um ímã deveria perder sua força ao imantar, o que é contrário à experiência.

87. Entre os diferentes autores que utilizaram a atração para explicar os fenômenos magnéticos, a maioria, como os Srs. Brugman e Wilke,[249] utilizaram dois fluidos elásticos;

[247] Coulomb está se referindo aqui aos trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783); Étienne François Dutour de Salvert (1711-1789); Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jean Bernoulli (ver a Seção 4.4): [Euler, 1752], [Du Tour, 1752] e [Bernoulli and Bernoulli, 1752]. Esses autores seguiam as ideias de René Descartes (1596-1650) de que o magnetismo seria devido a um vórtice de um fluido material que circularia ao redor dos ímãs, entrando nos ímãs por uma extremidade e saindo por outra. A interação entre um ímã e um pedaço de ferro, por exemplo, seria ocasionada pela pressão ocasionada por esse fluido ao empurrar ou colidir com os poros ou canais que existiriam no ferro. A interação entre dois ímãs ocasionando a orientação mútua, por exemplo, seria devida à ação dos turbilhões de fluido magnético de um ímã ao interagirem com os poros ou canais do outro ímã, e vice-versa. Já os materiais não magnéticos não teriam esses poros e, portanto, não sofreriam a ação de ímãs próximos. Ver, por exemplo, [Gillmor, 1971a, pág. 176].

[248] Ou seja, a orientação das bússolas não poderia ser explicada pelo impulso de um fluido colidindo com as partes da agulha imantada.

[249] Anton Brugmans (1732-1789) e Johan Carl Wilcke (1732-1796). Ver [Brugmans, 1765], [Wilcke, 1766], [Gillmor, 1971a, págs. 180 e 215-216] e [Aepinus, 1979, págs. 200, 209-210 e 216-217].

eles supuseram que, quando uma lâmina de aço estava em seu estado natural, esses dois fluidos estariam reunidos e espalhados uniformemente por toda a lâmina; mas que, quando ela estivesse imantada, os dois fluidos estariam separados. De acordo com esses autores, os dois fluidos exercem um sobre o outro uma ação atrativa; mas eles exercem sobre suas próprias partes uma força repulsiva,[250] assim como o ar e todos os fluidos elásticos. Eles denominaram de positivo a um desses fluidos, e o outro de negativo.

O Sr. Aepinus adaptou para o magnetismo o sistema do Sr. Franklin para a eletricidade.[251] Como causa do magnetismo, ele pensa que existe um único fluido elástico, que age sobre suas próprias partes com uma força repulsiva, atuando sobre as partes do aço com uma força atrativa. Esse fluido, uma vez estabelecido nos poros do aço, só é liberado com dificuldade. Esse sistema conduz a uma conclusão singular; [a saber,] que resulta dos fenômenos magnéticos, que as partes sólidas do aço exercem umas sobre as outras uma força repulsiva. O Sr. Aepinus denomina de *polo positivo* à parte da lâmina de aço na qual o fluido é abundante, e de *polo negativo* à parte que foi esvaziada,[252] ou [à parte] que não conserva sua porção natural de fluido magnético.

Essas duas hipóteses explicam igualmente bem, e da mesma maneira, todos os fenômenos magnéticos: contudo, restam algumas dificuldades a resolver; aqui vai uma das principais. Suponha que uma lâmina de aço seja imantada até a saturação. Se considerarmos a hipótese de dois fluidos magnéticos, esses dois fluidos serão separados, o fluido boreal[253] será levado para a parte boreal; o fluido austral[254] será levado para a parte austral da lâmina; o centro magnético, se a lâmina é homogênea, estará aproximadamente no meio [da lâmina]. Se cortarmos essa lâmina em duas partes iguais, se os dois fluidos são separados, cada parte da lâmina terá apenas uma espécie de fluido e, consequentemente, não será suscetível do mesmo grau de magnetismo,[255] que uma lâmina de mesmo tamanho, que estivesse em seu estado natural. Contudo, a experiência prova o contrário. Essa mesma dificuldade ocorre com o sistema do Sr. Aepinus. Como, por exemplo, a parte da lâmina, vazia de fluido magnético, pode ela mesma ser suscetível do mesmo grau de magnetismo, que uma lâmina semelhante em seu estado natural?

Parece, de acordo com essa experiência, que é necessário admitir que a quantidade de fluido transportada pelo magnetismo de uma extremidade de uma lâmina de aço até a outra [extremidade], é muito menor do que a quantidade total de fluido que cada parte dessa lâmina contém. Talvez, além do mais, a maior parte do fluido elástico magnético encontre-se nas lâminas em um estado de fixidez, e sem qualquer tipo de ação; como a experiência nos ensinou que o ar fixo[256] estava espalhado em todos os corpos em uma quantidade muito maior do que o ar elástico que esses corpos podem conter? Parece, com efeito, provável que exista, em todos os corpos e em suas atmosferas, partes que exercem forças atrativas, e outras que exercem forças repulsivas, cujas diferentes combinações com outros corpos,

---

[250]Isto é, dois fluidos de mesmo tipo se repelem, enquanto que fluidos de tipos opostos se atraem.

[251]Ver a Seção 4.4 na página 38, assim como as Notas de rodapé 51 e 147 nas páginas 32 e 69, respectivamente.

[252]Isto é, à parte que foi esvaziada de fluido magnético, ou à parte que foi deixada para trás pelo fluido magnético quando ele se deslocou para a parte positiva do aço.

[253]No original: *fluide boréal*.

[254]No original: *fluide austral*.

[255]Ou seja, não poderia ser imantada com a mesma intensidade.

[256]No original: *air fixe*. Joseph Black (1728-1799) foi um médico e químico escocês. Ele descobriu o dióxido de carbono em 1754, substância que denominou de ar fixo, já que pode ser absorvido ou fixado por bases fortes.

modificam e desenvolvem a ação: talvez a evaporação dos fluidos, a elasticidade e a coesão dos sólidos, a eletricidade, enfim, todas as análises químicas sejam apenas o resultado de diferentes propriedades análogas ao magnetismo. Porém, ainda estamos bem longe de ter levantado o véu que nos esconde essa parte da física.

88. Após ter explicado essas diferentes hipóteses, vamos apresentar algumas probabilidades sobre a causa das variações diurnas:[257] recordemos alguns fatos.

Vimos, na teoria do magnetismo, que a ação de cada ponto de uma lâmina imantada, tende a destruir o magnetismo das partes vizinhas: a partir daí parece que o estado magnético é um estado forçado, e que o fluido magnético realiza um esforço para se espalhar uniformemente; é o que prova a experiência, já que somos obrigados de tempos em tempos de renovar o magnetismo das agulhas.[258]

O globo terrestre é um ímã natural, que, entregue a si mesmo, parece conservar sua força magnética. Contudo, a variação da declinação nos informa que a matéria magnética está em um movimento contínuo na Terra: assim, raciocinando por analogia, a matéria magnética deveria se espalhar uniformemente [sobre a Terra], e o magnetismo terrestre deveria ter sido aniquilado há muito tempo.

Portanto, existe alguma causa que conserva ou que renova o magnetismo da Terra.

É provável que a mesma causa que mantém o magnetismo da Terra, produz os movimentos da matéria magnética, [e] produz nas declinações, as variações anuais e as variações diurnas.

A variação diurna é aproximadamente regular. Atualmente a agulha em nossos climas está em sua maior declinação à uma hora da tarde: essa declinação diminui até as sete ou oito horas da noite; ela é quase estacionária até as oito horas da manhã; ela cresce com mais rapidez, quando o Sol se aproxima de seu meridiano... Essas variações não são sempre iguais. Encontrei, em 1776, desde o mês de março até o fim de julho, que elas eram algumas vezes de 18 ou 20 minutos, porém mais frequentemente entre 8 e 12′. Não encontrei os percursos diários regularmente maiores durante um mês do que durante um outro [mês]: as maiores variações foram observadas durante o equinócio, e durante o calor do mês de julho: durante esses cinco meses, houveram três variações irregulares perceptíveis. A primeira, em 28 de março, começou a ser percebida próximo das seis horas da tarde; às dez horas a agulha estava em seu maior percurso, e sua declinação de 61′ menor do que à uma hora da tarde. A segunda foi perceptível em 5 de abril; começamos a observar a direção da agulha às sete horas da manhã; a declinação era de 41′ maior do que o comum; à 1 hora, ela havia diminuído de 30′, e a agulha encontrava-se aproximadamente na mesma direção na qual a observamos comumente na mesma hora. A terceira variação foi perceptível em 8 de abril, ela começou a ser observada às 5 horas da tarde, ela marcou seu maior percurso às 9 horas [da noite] e nesse caso a declinação era menor em 44′ do que à 1 hora da tarde; à meia noite, a agulha aparecia em sua direção usual; percebemos nesse mesmo dia uma aurora boreal na direção do noroeste. Durante as duas primeiras observações, o tempo estava coberto e com trovoadas. Nas variações irregulares, a agulha está constantemente em movimento, suas oscilações duram algumas vezes meia hora, e são de um quarto de grau.

A influência das auroras boreais sobre a direção da bússola tem sido observada há muito

[257] Variações diurnas da declinação magnética de uma bússola.

[258] Ou seja, uma agulha imantada vai perdendo seu magnetismo na medida em que o tempo passa. Se quisermos manter sua intensidade magnética, devemos magnetizá-la novamente periodicamente.

tempo; é até mesmo muito provável que o fluido, que forma esse meteoro, seja o mesmo que o fluido magnético:[259] encontramos, sobre esse assunto, as ideias mais engenhosas na [obra] *Loix du Magnétisme* do Sr. le Monnier;[260] será fácil de adaptar a elas a seguinte teoria.

89. Se examinarmos as variações regulares diurnas da agulha, veremos que elas possuem uma revolução regrada como a revolução do Sol. Portanto, é uma ação devida a esse astro que produz essas variações periódicas. Alguns autores alegaram que essas variações eram o efeito do calor solar, que destruiria o magnetismo da parte da Terra que estivesse oposta a ele. Eles se basearam no fato de que uma lâmina imantada perde no fogo sua virtude magnética: porém, mesmo que essa opinião explicasse a variação diurna, ela não seria admissível; já que uma causa que tendesse continuamente a destruir o magnetismo terrestre, não lhe deixaria depois de um longo tempo qualquer qualidade magnética.[261]

Se não é o calor do Sol que produz as variações diurnas: se, contudo, esse efeito é devido a esse astro, é necessário que o Sol atue sobre o globo terrestre, assim como um ímã age sobre um outro ímã.

Vai aqui, de acordo com essa ideia, como parece que podemos explicar todos os fenômenos magnéticos: a atmosfera solar, conhecida sob o nome de luz zodiacal, não será nada mais que um fluido magnético; esse fluido, ao aceitar o sistema do Sr. Aepinus, e será fácil de adaptar os mesmos raciocínios a qualquer outro sistema, agirá sobre as partes da Terra para afugentar o fluido magnético contido nela, assim como o polo positivo de um ímã tende a expulsar o fluido magnético do ponto de uma lâmina de aço onde ele é aplicado.

Mas a ação desse fluido será tanto maior, quanto maior for sua densidade e quanto menor for seu afastamento; agora diminuindo essa densidade na medida em que nos afastamos do Sol, resulta que esse fluido atuará mais fortemente sobre a parte do hemisfério [terrestre] iluminada pelo Sol, do que sobre o hemisfério oposto; que sua ação será maior no perigeu do que no apogeu: assim, durante o inverno, a parte austral da Terra deve se esvaziar de matéria magnética: durante o verão, a atmosfera solar produzirá um efeito contrário: mas estando o Sol nesse caso em seu apogeu, essa ação será menor do que durante o inverno: de onde deve resultar que a Terra será imantada positivamente na parte boreal, e negativamente na parte austral: na medida em que o apogeu mudar, ocorrerá uma revolução na posição do fluido magnético: mas esse movimento é muito lento, para que o efeito seja bem perceptível, desde que observemos com exatidão a declinação da agulha imantada.

Agora é fácil de explicar as variações diurnas. O fluido magnético, espalhado sobre a superfície terrestre, age por sua força atrativa sobre os pontos da agulha imantados negativamente, e [atua] por uma força repulsiva sobre as partes da agulha imantados positivamente. Assim, a direção da agulha será determinada por todas essas forças, e essa ação seguirá uma lei da densidade do fluido em cada ponto da Terra,[262] e de seu afastamento em relação à agulha, sobre os diferentes pontos nos quais ele atua.

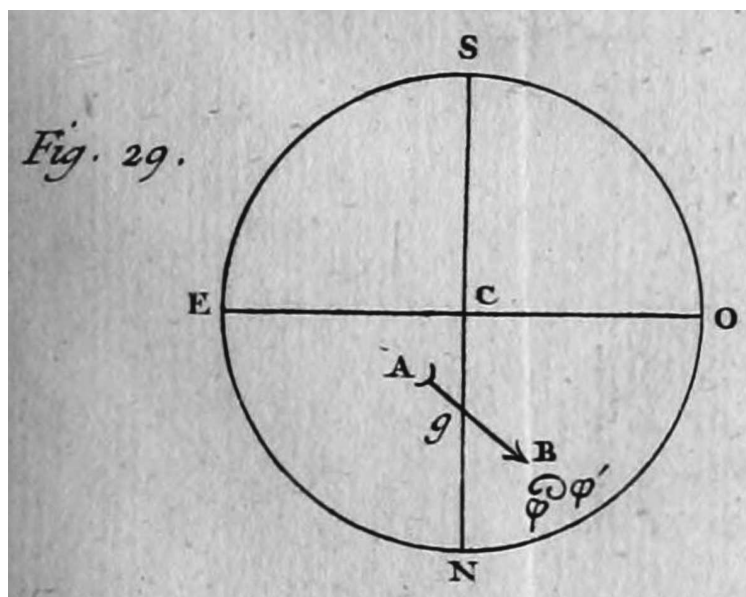
Na Figura 29, o círculo $ESON$ representa o globo terrestre, EO o equador e SN o meridiano do local onde se faz a observação em g.

---

[259] No original: *fluide aimantaire*.

[260] Ver a Nota de rodapé 136 na página 64.

[261] Ou seja, a Terra já teria perdido há muito tempo suas propriedades magnéticas devido a essa causa.

[262] Isto é, a força magnética exercida por cada ponto da superfície da Terra é proporcional à densidade de fluido magnético desse ponto.

A direção da agulha AB, colocada aqui sobre o hemisfério boreal, será determinada pela ação magnética de todas as partes da Terra: assim, se a ação conjunta de todas essas forças faz com que a bússola forme um ângulo BgN com o meridiano, isso ocorrerá porque o fluido magnético será mais denso na parte OCN, do que no quarto de hemisfério ECN: podemos fazer, vice-versa, um raciocínio semelhante em relação à parte austral ESO da Terra.

Se E representa o Leste[263] e O [representa] o Oeste, na medida em que o Sol se aproximar do meridiano do local onde a bússola está colocada, ele expulsará o fluido magnético da parte ECN para a parte OCN: assim, a densidade do fluido aumentará na parte Oeste, e diminuirá na parte Leste. Logo, se φ fosse o centro de todas as forças que solicitassem a agulha quando o Sol estava em E, esse centro φ será transportado para Oeste em φ', e aumentará a declinação, até que o Sol esteja colocado no mesmo meridiano que esse centro φ'; e como a declinação leva agora em nossos climas a agulha para Oeste, deve ocorrer que a declinação aumentará ainda por algum tempo após a passagem do Sol pelo meridiano do local onde se faz a observação. Quando o Sol se encontrar a oeste do meridiano onde está colocado o centro φ, é claro que nesse caso a declinação deve diminuir; de onde deve surgir o movimento periódico das variações diurnas.

Se o fluido magnético estivesse espalhado simetricamente ao redor do polo do mundo: se o Sol percorresse sempre o mesmo círculo, e a uma mesma distância da Terra, o movimento diurno da declinação da agulha poderia ser perfeitamente regular, e o centro φ percorreria uma oval exatamente fechada. Porém, a diferente densidade desse fluido nas partes Leste e Oeste; a mudança de posição do Sol deve fazer, ou que esse centro não venha para o ponto φ após uma revolução diurna, ou que ele poderá ser levado mais longe; de maneira que esse centro percorrerá todo dia, não uma oval exatamente fechada, mas uma linha espiral; isso produzirá o movimento anual, observado na declinação por mais de um século.

[263]A palavra Leste em francês se escreve como *Est*. Sua inicial é a letra E, sendo este o motivo pelo qual Coulomb escolheu essa letra para representar a direção Leste.

Capítulo 6

Observações sobre o Trabalho de 1777 de Coulomb

Discuto aqui mais detalhadamente alguns aspectos desse trabalho fundamental que Coulomb apresentou em 1777 à Academia de Ciências da França e que foi publicado em 1780.

6.1 Primeiro Princípio Fundamental de Coulomb

Na Subseção 5.0.2 Coulomb descreveu seu primeiro princípio fundamental com as seguintes palavras:

> Caso, após haver suspendido uma agulha por seu centro de gravidade, a afastarmos da direção que ela assume naturalmente, ela retorna sempre para essa direção por meio de forças que agem paralelamente a essa direção, que são diferentes para os pontos diferentes da agulha, mas que são as mesmas para cada um desses pontos em particular, em qualquer orientação que essa agulha seja colocada, relativamente à sua direção natural; de maneira que uma agulha imantada sofre sempre a mesma ação, qualquer que seja a orientação em que esteja, por parte das forças magnéticas da Terra.

Ilustro esse princípio na Figura 6.1 supondo um caso particular no qual a agulha pode girar em um plano horizontal quando está apoiada por um eixo vertical passando por seu centro. Seja NS uma agulha de comprimento ℓ uniformemente imantada que pode girar ao redor de um eixo vertical passando pelo seu ponto de apoio C no meio da agulha. A linha tracejada AB indica o meridiano magnético local, ou seja, a direção apontada naturalmente pela agulha naquele local, Figura 6.1 (a). Vamos supor que o polo Norte da agulha aponta para B. O ponto m indica um ponto qualquer da agulha.

Na Figura 6.1 (b) vemos a agulha girada ao redor do ponto C de um ângulo θ_1 em relação ao meridiano magnético. Pelo primeiro princípio fundamental, a força magnética exercida pela Terra sobre o ponto m da agulha é indicada pela seta F_m, paralela à direção AB.

Também pelo primeiro princípio fundamental, como mostrado na Figura 6.1 (c), quando a agulha é girada de um outro ângulo θ_2 em direção ao meridiano magnético, a força sobre o ponto m continua com a mesma intensidade e direção que no caso da Figura 6.1 (b).

Vamos agora supor um outro ponto ponto q da agulha, como mostrado na Figura 6.2 (a). Quando a agulha é afastada de um ângulo θ_1 em relação ao meridiano magnético, a

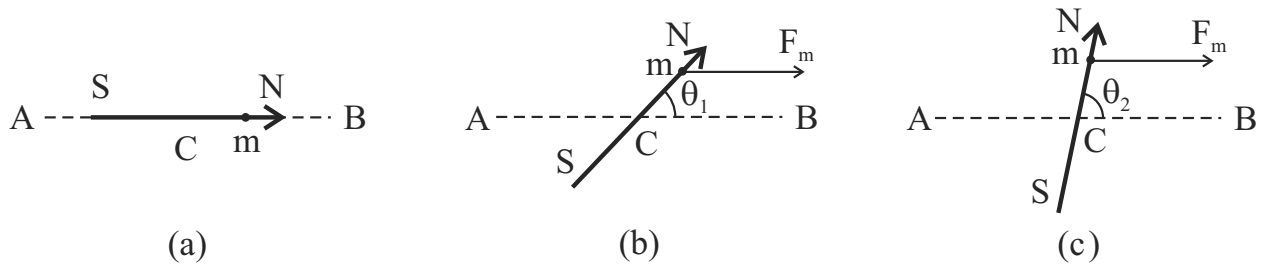



Figura 6.1: (a) A direção AB indica o meridiano magnético. (b) A força F_m sobre um ponto m é paralela à direção AB. (c) A intensidade dessa força F_m não depende do ângulo θ da agulha em relação ao meridiano.

força F_q sobre o ponto q ainda é paralela à direção AB do meridiano magnético, porém sua intensidade pode ser diferente da força sobre o ponto m. Isso pode ser visto ao comparar as Figuras 6.1 (b) e 6.2 (b).

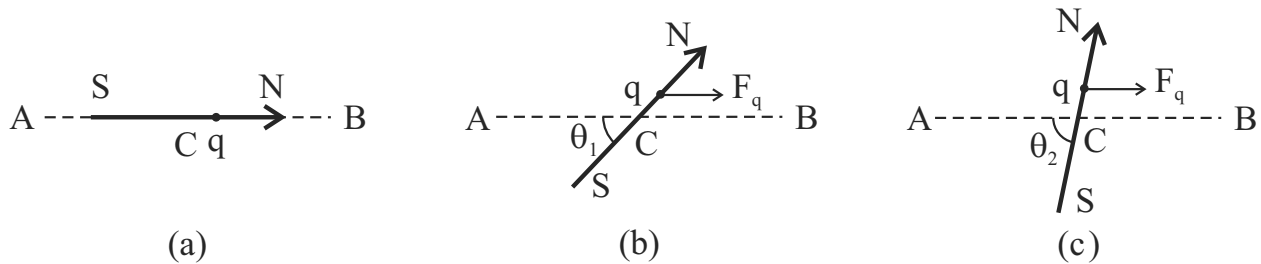



Figura 6.2: (a) Outro ponto q da agulha. (b) A força F_q também é paralela ao meridiano magnético, mas pode ter uma intensidade diferente de F_m. (c) A força F_q também não depende do ângulo θ.

Quando a agulha é girada de um outro ângulo θ_2 em relação ao meridiano magnético, a intensidade e a direção de F_q continuam as mesmas, como pode ser visto ao comparar os casos (b) e (c) da Figura 6.2.

6.2 Segundo Princípio Fundamental de Coulomb

O segundo princípio fundamental de Coulomb foi apresentado na Subseção 5.0.3:

> As forças magnéticas do globo terrestre que atuam sobre os diferentes pontos de uma bússola agem em sentidos opostos. A parte boreal da bússola é atraída para o polo boreal do meridiano magnético.[264] A parte austral da agulha é solicitada na direção oposta. Qualquer que seja a lei de acordo com a qual atuam essas forças, a soma das forças que atuam sobre a agulha em direção ao polo boreal é exatamente igual à soma das forças que atuam sobre o polo austral da agulha na direção oposta.

Uma ilustração desse segundo princípio encontra-se na Figura 6.3 supondo um caso particular no qual a agulha pode girar em um plano horizontal quando está apoiada por um eixo vertical passando por seu centro. Em (a) temos uma agulha uniformemente imantada

[264] Isto é, a extremidade boreal de uma bússola (ou seja, seu polo Norte, seguindo a denominação de Coulomb) é a que aponta no equilíbrio para o polo Sul magnético terrestre, que fica próximo do polo Norte geográfico terrestre.

NS apontando ao longo do meridiano magnético AB. Os pontos 1 e 2 estão igualmente afastados de seu centro C, sendo o ponto 1 na parte austral ou Sul da agulha, enquanto que o ponto 2 está na parte boreal ou Norte da agulha.

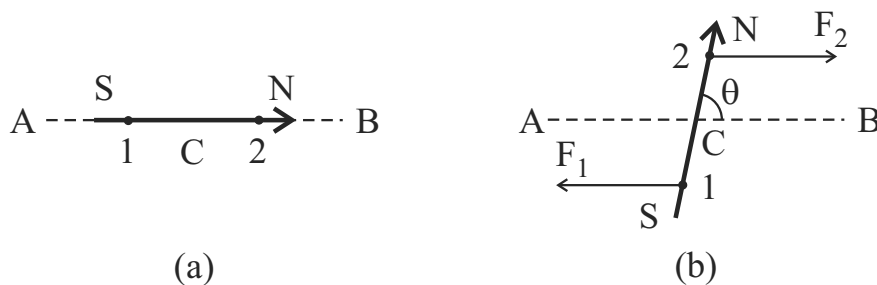



Figura 6.3: (a) A direção AB representa o meridiano magnético. Os pontos 1 e 2 estão igualmente afastados do centro C da agulha uniformemente imantada. (b) Forças F_1 e F_2 atuando sobre os pontos 1 e 2.

Ao afastar a agulha no plano horizontal de um ângulo θ em relação ao meridiano magnético, o ponto 1 recebe uma força F_1 paralela ao meridiano (pelo primeiro princípio) apontando para o lado Sul do meridiano magnético (ou seja, de B para A), enquanto que o ponto 2 recebe uma força F_2 também paralela ao meridiano magnético, mas apontando para o lado Norte do meridiano magnético (ou seja, apontando de A para B), como mostrado na Figura 6.3. Além disso, essas duas forças têm a mesma intensidade, embora atuem em sentidos opostos.

É possível também pensar na força F_1 como sendo a resultante atuando na parte Sul CS da agulha, enquanto que F_2 seria a resultante atuando na parte Norte CN da agulha. Essas forças são paralelas ao meridiano magnético AB, têm mesma intensidade e sentidos opostos, atuando ao longo de retas paralelas separadas entre si. As duas em conjunto não exercem uma força resultante sobre a agulha, já que constituem um par de forças. Elas exercem apenas um torque resultante sobre a agulha.

6.3 Significado Dado por Coulomb ao Tempo de uma Oscilação Total

O Artigo 11 desse trabalho de 1777 de coulomb aparece na página 60 dessa tradução em português. Para entender esse Artigo começo citando-o integralmente no original:[265]

> 11. Lorsque, dans l'équation précédente, l'on suppose $R = 0$, l'on a l'équation approchée $uu = \frac{\int \phi\mu r}{\int \mu r^2}(2BS - SS)$; d'où $\left(\frac{\int \phi\mu r}{\int \mu r^2}\right)^{1/2} dt = dS : (2BS - SS)^{1/2}$; or $\int dS : (2BS - SS)^{1/2}$ est l'angle dont le rayon est B; & S le sinus-verse; quantité égale à $90°$, losque $S = B$; ainsi, en nommant T le temps d'une oscillation totale, l'on aura $T\left(\frac{\int \phi\mu r}{\int \mu r^2}\right)^{1/2} = (180)°$.

Vou colocar aqui alguns comentários que ajudam a entender essa frase. Também mostro como obter o resultado da integração da função apresentada por Coulomb.

[265] [Coulomb, 1780, pág. 176].

Em primeiro lugar, o que Coulomb denomina aqui de (180)° é a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.[266] Hoje em dia essa razão é representada pela letra $\pi = 3,14159...$. Logo vou substituir 180° por π e 90° por $\pi/2$.

A letra ϕ usada por Coulomb foi substituída por Potier na reimpressão das obras de Coulomb em 1884 pela letra φ. Nessa tradução em português estou adotando essa nomenclatura de Potier.

Aqui vem a tradução que adotei para esse parágrafo:

> 11. Quando, na equação anterior, supomos $R = 0$, chegamos na equação aproximada $u^2 = \frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2}(2BS - S^2)$, de onde: $\left(\frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2}\right)^{1/2} dt = \frac{dS}{\sqrt{2BS-S^2}}$. Contudo, $\int \frac{dS}{\sqrt{2BS-S^2}}$ é o ângulo cujo raio é B, e S o seno verso; grandeza que é igual a $\pi/2$ quando $S = B$; assim, denominando T o tempo de uma oscilação total, teremos $T\left(\frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2}\right)^{1/2} = \pi$.

Nesse Artigo 11 Coulomb denominou de T ao "tempo de uma oscilação total". O que ele chama de tempo de uma oscilação total é quando o polo n da agulha imantada ns vai de N para N' na Figura 6.4:

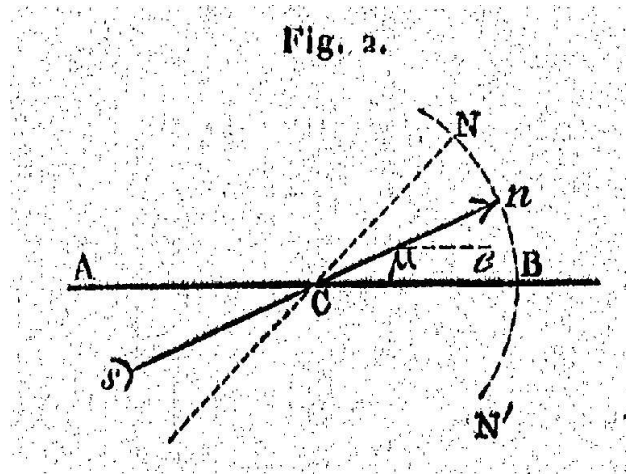



Figura 6.4: Figura 2 do trabalho de 1777 de Coulomb.

A linha ACB nessa Figura representa o meridiano magnético. O polo n da agulha imantada ns é deslocado até o ponto N, solto do repouso e então fica oscilando entre os pontos N e N'. Coulomb denomina o ângulo NCn nessa figura pela letra maiúscula S, enquanto que o ângulo NCB é denominado pela letra B. Vou chamar de $T_{1/4}$ ao intervalo de tempo para a agulha sair do repouso de seu ângulo inicial $S = 0$ até chegar ao longo do meridiano magnético com $S = B$, ou seja, para a extremidade n da agulha partir do ponto N e chegar no ponto B nessa Figura. A equação que vamos integrar foi fornecida por Coulomb nesse Artigo 11, a saber (substituindo a letra ϕ de Coulomb pela letra φ):

$$\left(\frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2}\right)^{1/2} dt = \frac{dS}{\sqrt{2BS - S^2}} . \tag{6.1}$$

[266] Ver a Introdução de Alfred Potier às obras de Coulomb, [Potier, 1884, págs. x e 13], assim como a página 28 dessa tradução em português.

Integrando essa equação com o tempo t indo de 0 até $T_{1/4}$ e com o ângulo S indo de 0 até B obtém-se:

$$\int_{t=0}^{T_{1/4}} \left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} dt = \int_{S=0}^{B} \frac{dS}{\sqrt{2BS - S^2}} \ . \tag{6.2}$$

O lado esquerdo é dado por:

$$\int_{t=0}^{T_{1/4}} \left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} dt = \left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} \int_{t=0}^{T_{1/4}} dt = \left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} T_{1/4} \ . \tag{6.3}$$

Já o lado direito é dado por:

$$\int_{S=0}^{B} \frac{dS}{\sqrt{2BS - S^2}} = \int_{S=0}^{B} \frac{dS}{\sqrt{B^2 - (S-B)^2}} = \int_{S=0}^{B} \frac{\frac{dS}{B}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S-B}{B}\right)^2}} \ . \tag{6.4}$$

Definindo a grandeza $\gamma = (S-B)/B$ obtém-se $d\gamma = dS/B$ e:

$$\int_{S=0}^{B} \frac{dS}{\sqrt{B^2 - (B-S)^2}} = \int_{S=0}^{B} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = [\,\text{arcsen}\,\gamma]_{S=0}^{B} = \left[\text{arcsen}\, \frac{S-B}{B} \right]_{S=0}^{B}$$

$$= \ [\,\text{arcsen}\, 0 - \ \text{arcsen}\,(-1)] = \left(0 - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \ . \tag{6.5}$$

Igualando as Equações (6.3) e (6.5) obtem-se:

$$\left(\frac{\int \varphi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} T_{1/4} = \frac{\pi}{2} \ . \tag{6.6}$$

O dobro de $T_{1/4}$ fornece o intervalo de tempo para que ocorra o que Coulomb denomina de "tempo de uma oscilação total" da agulha e que vai representar a seguir pela letra T:

$$T_{Coulomb} = 2T_{1/4} = \pi \sqrt{\frac{\int \mu r^2}{\int \varphi \mu r}} \ . \tag{6.7}$$

Esse resultado da integração da Equação (6.1) foi escrito por Coulomb no Artigo 11 da seguinte maneira:

$$T \left(\frac{\int \phi \mu r}{\int \mu r^2} \right)^{1/2} = (180)^\circ \ . \tag{6.8}$$

Já hoje em dia chama-se de período completo de oscilação ao intervalo de tempo entre a partida e a volta até o mesmo ponto, ou seja, para o polo n da agulha partir do ponto N, chegar ao ponto N' e voltar ao ponto N. Esse intervalo de tempo é dado pelo quádruplo de $T_{1/4}$. Esse período completo de oscilação também é representado hoje em dia pela letra T:

$$T_{moderno} = 4T_{1/4} = 2\pi \sqrt{\frac{\int \mu r^2}{\int \varphi \mu r}} \ . \tag{6.9}$$

Gillmor expressou-se da seguinte maneira:[267]

[267][Gillmor, 1971a, pág. 154].

> Coulomb utiliza a definição francesa do período igual a π radianos (isto é, igual à metade do período inglês).

Em outro ponto de seu livro Gillmor afirmou que:[268]

> No sistema francês utilizado por Coulomb, o período de uma oscilação é definido como π radianos ou $180°$, ao invés de $360°$.

Apesar dessas palavras de Gillmor, deve-se enfatizar que em suas obras Coulomb não utiliza a palavra *período* (em francês: *période*). Os termos que Coulomb utiliza em seus trabalhos são "tempo de oscilação", "tempo de uma oscilação total," "tempo de uma oscilação inteira," etc.

[268] [Gillmor, 1971a, pág. 180].

Capítulo 7

Pesquisas Teóricas e Experimentais sobre a Força de Torção e sobre a Elasticidade dos Fios de Metal

Por Coulomb[269]

Aplicação dessa teoria na utilização de metais nas artes e nas diferentes experiências de física. Construção de diferentes balanças de torção para medir os menores graus de força. Observações sobre as leis da elasticidade e da coesão.

Lido em 1784.

7.1 I

Essa Memória tem dois objetivos: o primeiro, determinar a força elástica de torção de fios de ferro e de latão,[270] em relação aos seus comprimentos, às suas espessuras, e aos seus graus de tensão. Já tive necessidade, em uma Memória sobre as agulhas imantadas, impressa no nono Volume dos *Savants étrangers*,[271] de determinar a força de torção de [fios de] cabelo e de seda; mas não tinha me ocupado dos fios de metal, pois a natureza das minhas pesquisas era apenas de escolher, para forças iguais, as suspensões mais flexíveis, e encontrei que os fios de seda tinham uma flexibilidade incomparavelmente maior que os fios de metal. O segundo objetivo dessa Memória é o de avaliar a imperfeição da reação elástica dos fios de metal e de examinar quais são as consequências que se pode tirar em relação às leis de coesão[272] e da elasticidade dos corpos.

[269] Esse trabalho foi lido em 1784 na Academia de Ciências da França e publicado em 1787, [Coulomb, 1787], com tradução para o inglês das Seções I e II em [Coulomb, 2012b] e [Coulomb, 2012c]. Recentemente Heering replicou algumas experiências de Coulomb sobre a torção de fios metálicos, [Heering, 2006].

[270] No original: *laiton*. Essa palavra pode ser traduzida por latão ou bronze. É uma liga metálica de cobre e zinco.

[271] [Coulomb, 1780]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 5.

[272] No original: *cohérence*. Nesse contexto essa palavra deve ser traduzida como “coesão”, [Gillmor, 1971a, págs. 126 e 150]. Uma tradução alternativa é como “coerência”.

7.2 II

O método para determinar a força de torção, através da experiência, consiste em suspender um peso cilíndrico por um fio de metal, de maneira que seu eixo esteja vertical ou na direção do fio de suspensão. Contanto que o fio de suspensão não esteja torcido, o peso permanecerá em repouso; mas caso esse peso seja girado ao redor de seu eixo, o fio ficará torcido e fará um esforço para se restabelecer na sua situação natural; se soltarmos o peso, ele oscilará por um tempo maior ou menor, de acordo com a maior ou menor perfeição da reação elástica de torção. Caso, nesse tipo de experiências, observarmos com cuidado a duração de um certo número de oscilações, será fácil determinar, pelas fórmulas do movimento oscilatório, a força de reação de torção que produz essas oscilações. Assim, ao variar o peso do corpo suspenso, o comprimento dos fios de suspensão e suas espessuras, espera-se determinar as leis de reação da torção em relação à tensão, ao comprimento, à espessura e à natureza desses fios.

7.3 III

Caso o fio de metal seja perfeitamente elástico e caso a resistência do ar não altere a amplitude das oscilações, o peso suspenso pelo fio de metal, uma vez colocado em movimento, vai oscilar até que o paremos.[273] Logo, a diminuição das amplitudes de oscilação só pode ser atribuída à resistência do ar e à imperfeição da elasticidade de torção; assim, ao observar a diminuição sucessiva da amplitude de cada oscilação e ao retirar a parte da alteração que é preciso atribuir à resistência do ar, podemos, por meio das fórmulas do movimento oscilatório aplicadas a essas experiências, determinar de acordo com quais leis é alterada essa força elástica de torção.

7.4 IV

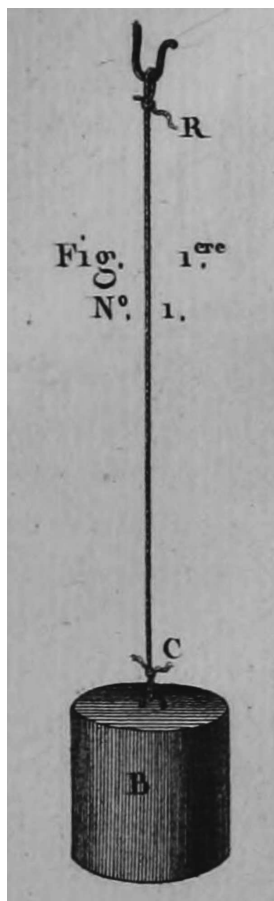
Essa Memória será dividida em duas Seções: na primeira determinaremos a lei das forças de torção, ao supor as forças de torção proporcionais ao ângulo de torção, uma suposição que está de acordo com a experiência, quando não damos uma amplitude [inicial] muito grande ao ângulo de torção; daremos várias aplicações dessa teoria à prática.

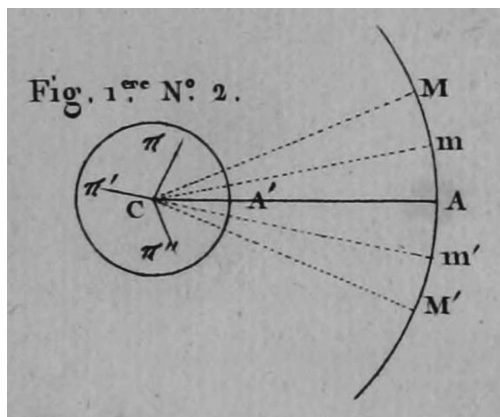
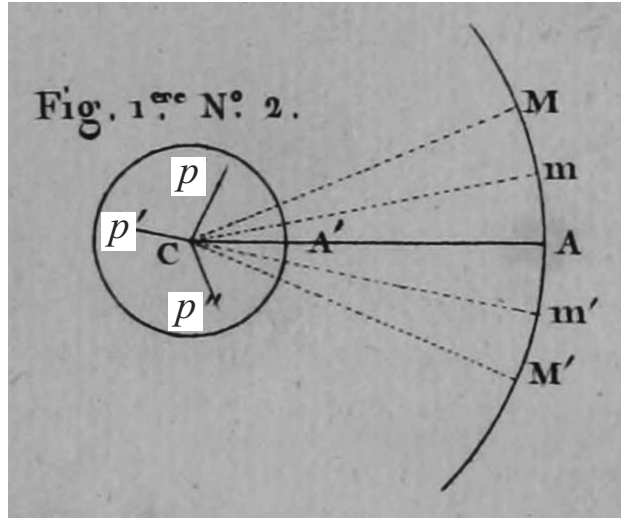
Procuraremos na Segunda Seção, através da experiência, de acordo com quais leis a força elástica de torção é alterada nas grandes oscilações, [então] usaremos essa pesquisa para determinar as leis de coesão e da elasticidade dos metais e de todos os corpos sólidos.

7.5 V. Primeira Seção — Fórmulas do Movimento Oscilatório, ao Supor a Reação da Força de Torção Proporcional ao Ângulo de Torção ou Alterada por um Termo Muito Pequeno

Um corpo cilíndrico B (Figura 1, Número 1) é suspenso por um fio RC, de maneira que o eixo do cilindro seja vertical, ou se encontre ao longo do prolongamento do fio de suspensão.

[273] Ou seja, o peso vai continuar oscilando indefinidamente com frequência e amplitude constantes, até que seja parado de maneira externa ou forçada.

Giramos esse cilindro ao redor de seu eixo sem retirar esse eixo da vertical; é necessário determinar, com a suposição de forças de torção proporcionais ao ângulo de torção, as fórmulas do movimento oscilatório.

A Figura 1, Número 2, mostra uma seção horizontal do cilindro; todos os elementos [de massa] do cilindro estão projetados sobre essa seção circular em p, p', p'', ...[274]

[274]No artigo original Coulomb representou esses elementos materiais pelas letras π, π' e π'', ver [Coulomb, 1787, pág. 231] e a Figura nessa Nota de rodapé:

Estou aqui seguindo Potier e representando esses pontos por p, p' e p'' para assim evitar confusão com o ângulo de π radianos, ver [Potier, 1884, pág. x] e a página 28 dessa tradução em português.

Supomos que o ângulo inicial de torção [no qual o corpo é solto do repouso] seja $ACM = A$, e que após o tempo t esse ângulo seja ACm ou que ele tenha sido diminuído pelo ângulo $MCm = S$, tal que

$$ACm = (A - S) \ .$$

Como supomos que a força de torção seja proporcional ao ângulo de torção, o *torque*[275] dessa força será representado por $n(A - S)$, sendo n um coeficiente constante cujo valor dependerá da natureza do fio de metal, de seu comprimento e de sua espessura.[276] Se denominarmos v à velocidade de um ponto qualquer p, após um tempo t, quando o ângulo de torção é ACm, teremos, pelos princípios da dinâmica:[277]

$$n(A - S)dt = \int prdv \ ,$$

[275]No original: *momentum*. Essa expressão também pode ser traduzida por momento, momento de força, ou momento de alavanca. Ver a Nota de rodapé 116 na página 57.

[276]Essa grandeza n é chamada de rigidez de torção do fio. Quando o fio está preso pela extremidade superior e sua extremidade inferior é girada em relação a um referencial inercial de um ângulo θ ao redor do eixo vertical, ele exerce um torque τ de reação dado por dado por $\tau = -n\theta$, sendo $\theta = 0$ a situação em que o fio não está torcido.

[277]No artigo original a próxima equação aparece da seguinte forma, [Coulomb, 1787, pág. 232]:

$$n(A - S)dt = \int \pi rdv \ .$$

Potier, [Potier, 1884, pág. 69], substituiu essa equação por

$$n(A - S)dt = \sum prdv \ .$$

Nessa tradução para o português escrevi essa equação como

$$n(A - S)dt = \int prdv \ .$$

A letra p representa o elemento infinitesimal de massa localizado a uma distância r do eixo de rotação. Sendo δ a densidade volumétrica de massa e dV o volume infinitesimal ocupado por esse elemento de massa, a letra p de Coulomb pode ser substituída por $dm = \delta dV$, onde dm é a massa infinitesimal desse elemento. Deve-se entender essa integração como sendo uma integração tridimensional por todo o volume do cilindro.

onde r é a distância Cp do ponto p ao eixo de rotação G.[278]

Porém, [se representarmos] o raio CA' do peso cilíndrico $= a$, e se a velocidade de um ponto A' da circunferência do cilindro for representada por u ao final do tempo t, teremos

$$v = \frac{ru}{a} ,$$

de onde resulta

$$n(A - S)dt = du\frac{\int pr^2}{a} ;$$

e, como $dt = adS/u$, teremos para a equação integrada

$$a(2AS - S^2) = \frac{u^2}{a^2} \int pr^2 ,$$

de onde obtemos

$$dt = dS\sqrt{\frac{\int pr^2}{n(2AS - S^2)}} .$$

Porém, $dS/\sqrt{(2AS - S^2)}$ representa um ângulo cujo raio é A e S o seno verso,[279] que vai a zero quando $S = 0$, e que torna-se igual a $\pi/2$ quando $S = A$.

Assim o tempo de uma oscilação inteira será

$$T = \pi\sqrt{\frac{\int pr^2}{n}} .$$[280]

7.6 VI

Para comparar a força de torção com a força da gravidade em um pêndulo [simples], é necessário lembrar que no caso do pêndulo o tempo T de uma oscilação inteira é

$$T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} ,$$

na qual λ é o comprimento do pêndulo e g a força da gravidade.[281] Assim, um pêndulo que seja isócrono às oscilações do cilindro fornece

[278]Provavelmente o eixo de rotação deveria ser representado pela letra C em vez de G, já que o ponto G não aparece na Figura 1.

[279]Frase original, [Coulomb, 1787, pág. 232]: *"Mais* $\frac{dS}{\sqrt{(2AS-SS)}}$ *représente un angle dont A est le rayon & S le sinus verse"*.

Potier, [Potier, 1884, pág. 69], escreveu essa frase como: *"Mais* $\frac{dS}{\sqrt{(2AS-S)^2}}$ *représente un angle dont* $\frac{S}{A}$ *est le sinus verse"*. Ou seja: "Porém $dS/\sqrt{(2AS-S)^2}$ representa um ângulo no qual S/A é o seno verso".

Parece que por um erro tipográfico faltou o símbolo da integral antes de $dS/\sqrt{(2AS - S^2)}$. A frase deveria ser: "Porém, $\int dS/\sqrt{(2AS - S^2)}$ representa um ângulo cujo raio é A e S o seno verso".

[280]Uma discussão sobre como chegar nesse resultado encontra-se na Seção 8.1 na página 179.

[281]No original Coulomb chama g de força da gravidade (*force de gravité*). Hoje em dia chamamos g de força gravitacional por unidade de massa, ou seja, a aceleração de queda livre devida à gravidade terrestre.

Como visto na Seção 8.1 na página 179, o que Coulomb chama de tempo para uma oscilação inteira é a metade daquilo que hoje em dia se chama de período de uma oscilação completa do pêndulo.

$$\frac{\int pr^2}{n} = \frac{\lambda}{g} \ ;$$

dessa fórmula obtemos facilmente o valor de n, de acordo com a experiência, pois são dadas as dimensões do cilindro ou do peso, assim como os tempos de uma oscilação que determina o valor de λ.

Se quisermos em seguida encontrar um peso Q tal que, ao agir na extremidade b de uma alavanca, fornece um *torque* igual ao *torque* da força de torção quando o ângulo de torção é $(A - S)$, basta fazer $Qb = n(A - S)$.

7.7 VII

Agora é necessário procurar para um cilindro o valor de $\int pr^2$, que encontramos igual a $\pi\delta La^4/2$, onde π é a razão da circunferência para o diâmetro, δ é a densidade [volumétrica de massa] do cilindro, [L seu comprimento] e a seu raio.[282]

Porém, como a massa M do cilindro é $= \pi\delta La^2$, temos

$$\int pr^2 = \frac{Ma^2}{2} \ ,$$

e, consequentemente

$$T = \pi\sqrt{\frac{Ma^2}{2n}} \ ;$$

ao comparar, como na *Seção anterior*, com um pêndulo isócrono, obtemos[283]

$$\frac{\lambda}{g} = \frac{Ma^2}{2n} \ ,$$

[282]No original, [Coulomb, 1787, pág. 233]:

> Il faut actuellement chercher, pour un cylindre, la valeur de $\int \pi r^2$, que l'on trouvera égale à $\frac{\varphi\delta L \cdot a^4}{4}$, où φ est le rapport de la circonférence au rayon, δ est la densité du cylindre & a son rayon.

Estou aqui seguindo Potier, [Potier, 1884, pág. 70], ao fazer várias substituições nessa frase. Em primeiro lugar a letra π de Coulomb foi substituída por p, sendo que essa letra representa um elemento de massa. Já a grandeza φ que para Coulomb indica a razão da circunferência para o raio, está sendo substituída aqui por 2π, tendo π em nossa expressão sua definição moderna da razão da circunferência para o diâmetro, isto é, $\pi = 3,14159...$. As mesmas substituições são feitas nas outras fórmulas desse trabalho.

Seja p um elemento de massa localizado a uma distância r do eixo do cilindro de massa M, comprimento L, raio a e densidade volumétrica de massa $\delta = M/(\pi a^2 L)$. Vou usar aqui coordenadas cilíndricas (r, φ, z) com o ângulo polar φ indo de 0 a 2π. O elemento de massa p pode ser escrito como $p = dm = \delta dV$, onde $dV = rd\varphi drdz$ é um elemento de volume. O momento de inércia I desse cilindro em relação a seu eixo de simetria é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L} dmr^2 = \int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L} \delta r^2 dV = \delta\int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L} r^3 d\varphi drdz = \pi\delta L\frac{a^4}{2} \ ,$$

como obtido por Coulomb.

[283]Isto é, ao comparar esse T com um pêndulo isócrono que realiza suas oscilações no mesmo tempo.

e, como gM é o peso P do cilindro, temos

$$n = \frac{Pa^2}{2\lambda} \ ,$$

o que fornece uma fórmula muito simples para determinar n de acordo com a experiência.

7.8 VIII

Caso a força de torção que supomos dada por $n(A-S)$ seja alterada por uma grandeza R,[284] a fórmula do movimento oscilatório fornecerá nesse caso:

$$[n(A-S) - R]dt = du\frac{1}{a}\int pr^2 \ ;$$

e colocando, como anteriormente, no lugar de dt seu valor adS/u, teremos para a integração

$$n(2AS - S^2) - 2\int RdS = \frac{u^2}{a^2}\int pr^2 \ .$$

Se quisermos realizar essa integração para uma oscilação completa, será necessário dividi-la em duas partes, a primeira de M até A durante a qual a força de torção acelera a velocidade u, enquanto que a força retardadora a diminui; a segunda parte de A até M',[285] durante a qual todas as forças contribuem para retardar o movimento.

Exemplo 1. Suponhamos $R = \mu(A-S)^m$; teremos então, para o estado de movimento na primeira porção MA,

$$n(2AS - S^2) + \frac{2\mu(A-S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = \frac{u^2}{a^2}\int pr^2 \ ;$$

assim, quando o ângulo de torção for nulo, ou quando $(A-S) = 0$, teremos

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = \frac{U^2}{a^2}\int pr^2 \ .$$

Consideremos agora a outra parte do movimento desde A até M' e suponhamos o ângulo $AGm' = S'$, encontraremos então, ao denominar de U à velocidade no ponto A,

$$\frac{nS'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{U^2 - u^2}{2a^2}\int pr^2 \ .$$

Substituindo no lugar de U^2 seu valor

$$\frac{a^2}{\int pr^2}\left(nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1}\right) \ ,$$

teremos para a integração total, quando a velocidade torna-se nula ou quando a oscilação é completada,

[284] Coulomb vai considerar esse torque R como sendo um torque de atrito.
[285] Por um erro tipográfico no original aparece aqui a letra M em vez de M'.

$$(A - S') = \frac{2\mu}{n(m+1)} \frac{A^{m+1} + S'^{m+1}}{A + S'} \ ;$$

e, caso as forças retardadoras sejam tais que a cada oscilação a amplitude seja um pouco diminuída,[286] teremos, para valores muito próximos de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^m}{n(m+1)} \ ;$$

e se essa grandeza $(A - S')$ for muito pequena tal que possa ser considerada como uma diferencial ordinária, teremos então, para um número Z de oscilações,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}} \right) \ ,$$

onde S representa o que A se torna após um número Z de oscilações. Assim teremos

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu(m-1)}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}} \right]^{\frac{1}{m-1}}} \ ,$$

o que determina o valor de S após um número Z qualquer de oscilações.

Exemplo 2. Caso

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'} \ ,$$

com μ' e m' tendo valores diferentes de μ e m, teremos, ao seguir o procedimento do último exemplo,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1} \frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S} + \frac{2\mu'}{m'+1} \frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S} \ ;$$

e caso a força retardadora seja muito menor do que a força de torção, teremos, para o valor aproximado,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} \ .$$

Em geral, caso

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'} + \mu''(A - S)^{m''} + \ldots \ ,$$

teremos sempre para uma oscilação, supondo R muito menor do que a força de torção,

$$n(A - S) = \frac{2\mu A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} + \frac{2\mu'' A^{m''}}{m''+1} + \ldots \ .$$

[286]Ou seja, tal que $S' = A - \varepsilon$, com $\varepsilon \ll A$.

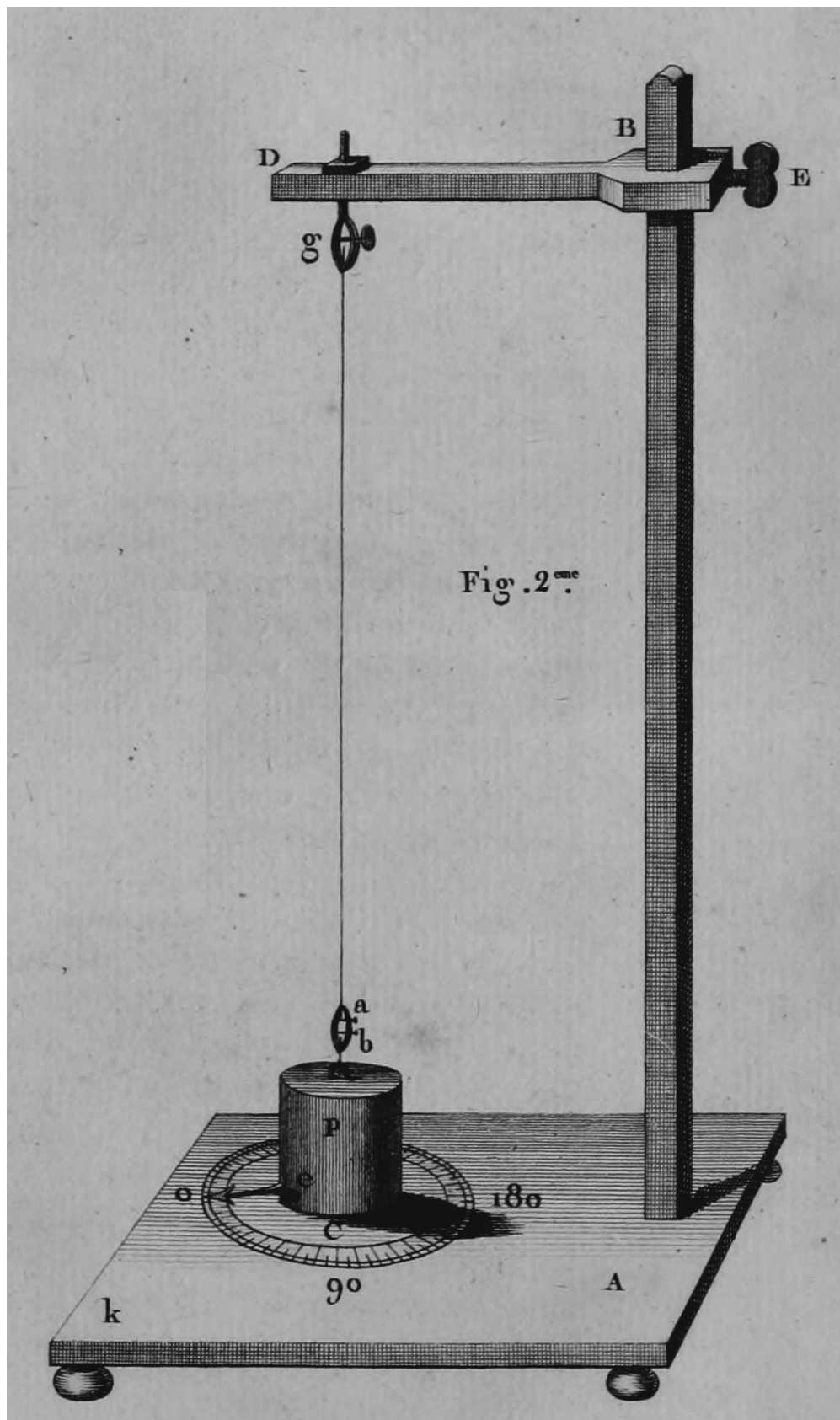
7.9 IX. Experiências para Determinar as Leis da Força de Torção. Preparação

Sobre uma pequena prancha KA apoiada por quatro pés, [ver a Figura 2,] eleva-se uma forca ABD, o poste AB tem 4 pés de altura [130 cm], a travessa horizontal DE desliza ao longo do poste e se fixa por meio de uma rosca borboleta E;[287] o cilindro ou peso P tem na sua parte superior, no prolongamento de seu eixo, uma ponta de agulha b fixa a esse cilindro. Essa agulha é presa pela parte inferior de uma dupla pinça[288] a que é apertada por parafusos; a parte superior dessa pinça prende a extremidade inferior do fio de suspensão; a parte inferior dessa mesma pinça prende a extremidade da agulha fixada ao cilindro. A extremidade superior do fio de suspensão é presa por uma outra pinça g, fixada na travessa DE. Sobre a prancha AK que serve de base ao aparelho, colocamos um círculo dividido em graus, cujo centro C deve ser colocado no prolongamento do eixo do cilindro, prendemos na parte inferior do cilindro um indicador[289] eo, cuja extremidade o aponta para as divisões do círculo.

[287] No original: *vis*. Esse termo também pode ser traduzido por rosca, parafuso ou parafuso borboleta.

[288] No original: *doble pince*. A palavra "pince" pode ser traduzida por braçadeira, pinça, fecho ou grampo. No caso de uma dupla pinça temos uma peça composta por duas partes articuladas destinadas a prender objetos.

[289] No original: *index*. Essa palavra pode ser traduzida por indicador, índice ou ponteiro.

D
B
E
g
Fig. 2eme.
a
b
P
e
o
180
C
90
A
k

7.10 X. Experiências sobre a Torção de Fios de Ferro

Peguei três fios de cravo[290] tais como encontrados no comércio, enrolados em bobinas e numerados.

O fio de ferro número 12 suporta, antes de se romper, 3 libras e 12 onças (1836 g); os 6 pés de comprimento pesavam 5 grãos (0,1365 g por metro).[291]

O fio de ferro número 7 suporta, antes de se romper, um peso de 10 libras (4895 g); os 6 pés de comprimento pesavam 14 grãos (0,1381 g por metro).

O fio de ferro número 1 rompe-se sob uma tensão de 33 libras (16154 g); os 6 pés de comprimento pesavam 56 grãos (1,525 g por metro).

7.10.1 Primeira Experiência. Fio de ferro número 12, cilindro pesando meia libra

Pegamos um cilindro de chumbo pesando meia libra [244,75 g] que suspendemos no fio de ferro número 12; esse cilindro tinha 19 linhas de diâmetro e $6\frac{1}{2}$ linhas de altura ($D = 4,294\ cm$, $H = 1,466\ cm$), o fio de suspensão tinha 9 polegadas (24,363 cm) de comprimento.[292] Giramos o cilindro ao redor de seu eixo sem perturbar esse eixo da vertical, e obtivemos os seguintes resultados:

Primeiro teste. Quando giramos o cilindro ao redor de seu eixo, de um ângulo menor do que 180°, ele realizava 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 120”.[293]

Segundo teste. Mas, ao girar de três círculos,[294] as dez primeiras oscilações foram de dois a três segundo mais longas do que as dez primeiras;[295] e, após as dez primeiras oscilações, a

[290]No original: *j'ai pris trois fils de clavecin*. O cravo aqui se refere a um instrumento musical. A palavra “clavecin” também pode ser traduzida por clavecino, clavicêmbalo ou clavicórdio. Estou traduzindo “fils” por fios embora também pudesse utilizar cordas, cordões, filamentos ou arames.

[291]O fio tinha um comprimento L de 6 pés, logo $L = 6 \times 32,48\ cm = 194,88\ cm$. Sua massa M era de 5 grãos, logo $M = 5 \times 0,05311\ g = 0,26555\ g$. Sua densidade linear de massa λ é então dada por $\lambda = 0,26555\ g/194,88\ cm = 0,001363\ g/cm = 0,1363\ g/m$. Supondo uma densidade volumétrica de massa δ para o ferro de $\delta = 7,9\ g/cm^3$ vem que o diâmetro D desse fio cilíndrico pode ser obtido por $\delta = M/(\pi LD^2/4)$, ou seja, $D = 0,227\ cm$. Sua área de seção reta A é dada por $A = \pi D^2/4 = 0,0405\ cm^2$. Coulomb afirma que ele suporta uma massa m de 3 libras e 12 onças antes de se romper. Logo $m = (3 \times 489,5\ g) + (12 \times 30,59\ g) = 1835,58\ g$. Somando com a massa do próprio fio, vem que o peso P total que ele aguenta é de $P = (1,8358\ kg) \times (9,8\ m/s^2) = 18\ N$. Logo sua tensão de ruptura T é de $T = (18\ N)/(0,04 \times 10^{-4}\ m^2) = 4,5 \times 10^6\ N/m^2 = 4,5\ MPa$.

Deve ser observado que nas experiências de torção descritas a seguir Coulomb não vai utilizar fios com 6 polegadas de comprimento, mas sim com 9 ou 36 polegadas.

[292]Por um erro de impressão no original apareceu 9 *lignes*, isto é, 9 linhas. O correto são 9 polegadas de comprimento.

[293]Ou seja, cada oscilação era realizada em 6 segundos. Deve-se lembrar que cada oscilação para Coulomb é o tempo gasto para ir de uma extremidade do movimento até a outra extremidade. Por exemplo, se o cilindro for girado de +90° e solto do repouso, ele gasta 3 segundos para chegar até a origem com um ângulo de 0° e velocidade máxima, gastando mais 3 segundos até chegar ao repouso na extremidade oposta com um ângulo de −90°.

Hoje em dia chamamos de período ao intervalo de tempo total para ir e voltar à mesma condição inicial. Nesse exemplo o período total do cilindro é de 12 segundos.

[294]Isto é, de um ângulo inicial de 1080°.

[295]Essa frase ficou um pouco confusa. No original: *les dix premières oscillations ont été de deux à trois secondes plus longues que les dix premières*.

Pode ter sido um erro de impressão, sendo o correto a seguinte frase: “as dez primeiras oscilações foram de dois a três segundos mais longas do que as dez últimas oscilações”. Ou então pode ser que Coulomb estivesse

amplitude das oscilações, que era inicialmente de três círculos, encontrou-se reduzida a 5/4 de círculo.

7.10.2 Segunda Experiência. Fio de ferro número 12, cilindro pesando 2 libras

Primeiro teste. Ao suspender no mesmo fio de ferro número 12 um cilindro que pesava 2 libras [979 g], tendo o mesmo diâmetro que o anterior, mas 26 linhas de altura [5,876 cm], encontramos 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 242" para um ângulo de torção de 180° ou abaixo desse valor.

7.10.3 Terceira Experiência. Fio de ferro número 7, cilindro pesando meia libra

Primeiro teste. Ao suspender no fio de ferro número 7 o cilindro de 1/2 libra encontramos 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 42" para uma torção de 180° ou abaixo desse valor.

7.10.4 Quarta Experiência. Fio de ferro número 7, cilindro pesando 2 libras

Teste. Ao suspender no mesmo fio um peso de 2 libras, as oscilações foram realizadas em 85".

7.10.5 Quinta Experiência. Fio de ferro número 1, cilindro pesando meia libra

Teste. Quando suspendemos nesse fio de ferro de 9 polegadas de comprimento um peso de meia libra, sua rigidez era tão grande que esse peso não era suficiente para o endireitar, de tal maneira que as oscilações são muito irregulares, já que elas dependem não apenas do ângulo de torção, mas ainda da curvatura que o fio de ferro conserva ao ser desenrolado da parte inferior da bobina, enquanto é esticado pelo peso de meia libra.

7.10.6 Sexta Experiência. Fio de ferro número 1, cilindro pesando 2 libras

Teste. Porém, ao suspender nesse fio de ferro de 9 polegadas de comprimento um peso de 2 libras, o fio era perceptivelmente endireitado e temos, para um ângulo de torção de 45° ou menor, 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 23".

Continuação das Experiências. Fios de latão.

Pegamos três fios de latão correspondendo em número e aproximadamente na espessura, aos três fios de ferro que acabamos de submeter às experiências.

comparando as dez primeiras oscilações desse segundo teste sendo de dois a três segundos mais longas do que as dez primeiras oscilações do primeiro teste.

O fio de latão número 12 suportava, no instante de sua ruptura, 2 libras e 3 onças (1070 g); os 6 pés de comprimento pesavam 5 grãos (0,136 g por metro).

O fio de latão número 7 suportava, no instante de sua ruptura, 14 libras (6853 g); os 6 pés de comprimento pesavam $18\frac{1}{2}$ grãos (0,504 g por metro).

O fio de latão número 1 rompe-se sob uma tensão de 22 libras (10769 g); os 6 pés de comprimento pesavam 66 grãos (1,797 g por metro).

7.10.7 Sétima Experiência. Fio de latão número 12, cilindro pesando meia libra

Teste. O comprimento do fio de suspensão era de 9 polegadas como nas experiências anteriores; suspendemos nele o cilindro pesando meia libra e obtivemos, para um ângulo de torção de 360° ou menor, 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 220".

Porém, com um ângulo inicial de três círculos de torção, as vinte primeiras oscilações duraram 225" e, após essas vinte primeiras oscilações, o ângulo de torção ainda era de dois círculos aproximadamente.

7.10.8 Oitava Experiência. Fio de latão número 12, cilindro pesando 2 libras

Teste. Sendo o fio de suspensão de 9 polegadas e o cilindro pesando 2 libras, encontramos, para um ângulo de 360° ou menor, 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 442".

Com um ângulo inicial de três círculos de torção, as vinte primeiras oscilações duraram aproximadamente 444" e o ângulo inicial de torção reduziu-se a dois círculos e um quarto [810°].

7.10.9 Nona Experiência. Fio de latão número 7, cilindro pesando meia libra

Teste. Sendo o comprimento do fio de suspensão sempre de 9 polegadas, o ângulo inicial de torção sendo de 360° ou menor, encontramos 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 57".

7.10.10 Décima Experiência. Fio de latão número 12, cilindro pesando 2 libras

Teste. Sendo o comprimento do fio de suspensão sempre de 9 polegadas, o ângulo inicial de torção de 360° ou menor, encontramos 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 110".

Porém, sendo o ângulo inicial de torção de duas circunferências de círculo, encontramos as vinte primeiras oscilações em 111", e o ângulo inicial de torção, que era de duas circunferências, reduziu-se a uma circunferência e meia.

7.10.11 Décima Primeira Experiência. Fio de latão número 1, cilindro pesando meia libra

Teste. Sob uma tensão de meia libra o fio de suspensão não fica totalmente endireitado, e o tempo das oscilações, dependendo parcialmente de sua curvatura inicial, é incerto.

7.10.12 Décima Segunda Experiência. Fio de latão número 1, cilindro pesando 2 libras

Teste. Sendo o comprimento do fio de suspensão sempre de 9 polegadas, o ângulo inicial de torção sendo de 50° ou menor, encontramos 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 32".

Porém, sendo o ângulo inicial de torção de cinco quartos de círculo, tivemos as 20 primeiras oscilações em $33\frac{1}{2}$ segundos; e ao final dessas oscilações o ângulo inicial estava reduzido a um quarto de círculo.

7.10.13 Décima Terceira Experiência. Fio de latão número 7, cilindro pesando 2 libras

Teste. O comprimento dos fios de suspensão, em todas as experiências anteriores, era de 9 polegadas; como tínhamos necessidade de determinar a força de torção em relação ao comprimento dos fios, demos 36 polegadas de comprimento [97,45 cm] à suspensão dessa experiência, e encontramos, com até três círculos de torção ou menor, 20 oscilações perceptivelmente isócronas em 222".

7.11 XI. Resultados das Experiências Anteriores

A força ou a reação da torção dos fios de metal deve depender de seus comprimentos, espessuras e tensões. Assim, para poder determinar geralmente a lei dessa reação, fomos obrigados, nas experiências anteriores, a suspender pesos diferentes nesses fios de ferro e de latão, com espessuras e comprimentos diferentes: aqui vão os resultados apresentados por essas experiências.

Se fizermos o cilindro girar ao redor de seu eixo, sem perturbar esse eixo da linha vertical, esse fio será torcido: ao abandonar esse cilindro, o fio fará um esforço para retomar sua situação natural devido a sua força de reação; esse esforço fará com que o cilindro oscile ao redor desse eixo, por um intervalo de tempo maior ou menor, de acordo com que a força elástica seja mais ou menos perfeita.

Mas encontramos, por todas as experiências anteriores, que quando o ângulo de torção não é muito grande, o tempo das oscilações é perceptivelmente isócrono; assim podemos considerar como um primeira lei que, para todos os fios de metal, quando os ângulos de torção não são muito grandes, a força de torção é perceptivelmente proporcional ao ângulo de torção.

Tendo encontrado pela experiência que a força de reação na torção é proporcional ao ângulo de torção, resulta que todas as fórmulas oscilatórias que fornecemos, *nas Seções* 7.4 *e seguintes*, baseadas na suposição de uma força de torção proporcional ao ângulo de torção, ou alteradas por um termo muito pequeno, podem ser aplicadas a essas experiências.

Portanto, como obtivemos (*na Seção* 7.7), por meio dessas fórmulas,

$$T = \sqrt{\frac{Ma^2}{2n}}\pi \ ,$$

e como em todas as experiências anteriores os cilindros de meia libra e de 2 libras tinham o mesmo diâmetro, resulta que n deve sempre ser proporcional a (M/T^2).

Portanto, caso a tensão maior ou menor do fio não tenha influência sobre a força de torção, então a grandeza n para um mesmo fio será a mesma com uma tensão de meia libra e com uma tensão de 2 libras e, consequentemente, teremos T proporcional a $M^{1/2}$. Comparemos nossas experiências feitas com dois pesos, um de meia libra e o outro de 2 libras, cujas raízes [quadradas] estão como 1 para 2.[296]

Primeira experiência. O fio de ferro número 12, esticado por um peso de meia libra, realizou 20 oscilações em 120".

Segunda experiência. O mesmo fio, esticado por um peso de 2 libras, realizou 20 oscilações em 242".

Terceira experiência. O fio de ferro número 7, esticado pelo peso de meia libra, realizou 20 oscilações em 43".

Quarta experiência. O fio de ferro número 7, esticado pelo peso de 2 libras, realizou 20 oscilações em 85".

A *quinta experiência* não pode ser comparada com a sexta.

Sétima experiência. O fio de latão número 12, esticado pelo peso de meia libra, realizou 20 oscilações em 220".

Oitava experiência. O fio de latão número 12, esticado pelo peso de 2 libras, realizou 20 oscilações em 442".

Nona experiência. O fio de latão número 7, carregado pelo peso de meia libra, realizou 20 oscilações em 57".

Décima experiência. O fio de latão número 7, carregado pelo peso de 2 libras, realizou 20 oscilações em 110".

A *décima primeira* e a *décima segunda* experiências não podem ser comparadas entre si.

Portanto, resulta de todas essas experiências que com o mesmo fio de metal um peso de 2 libras realiza perceptivelmente suas oscilações no dobro do tempo daquele no qual um peso de meia libra faz suas oscilações; consequentemente, a duração dessas oscilações é como a raiz dos pesos;[297] [e] que assim a tensão, seja ela maior ou menor, não influencia perceptivelmente na reação da força de torção.

Contudo, por muitas experiências feitas com tensões bem grandes comparadas à força do metal, parece que as tensões grandes diminuem ou alteram um pouco a força de torção. De fato percebemos que na medida em que a tensão aumenta, o fio se alonga e seu diâmetro diminui, o que deve reduzir a duração das oscilações.

Não pudemos comparar os fios de ferro ou de latão número 1 sob as tensões de meia libra e de 2 libras já que, como afirmamos nos detalhes das experiências, a tensão de meia libra não é suficiente para endireitar esses fios.

7.12 XII. Sobre a Força de Torção em Relação aos Comprimentos dos Fios

Acabamos de encontrar, na Seção anterior, que a tensão maior ou menor dos fios não influencia na força de torção a não ser de uma maneira imperceptível. Agora iremos buscar, de acordo com as mesmas experiências, de quanto, para um ângulo igual de torção, o comprimento do fio de torção aumenta ou diminui essa força. Mas é claro que, na medida em

[296]Sejam m_1 e m_2 as massas dos dois corpos. Temos então $m_1/m_2 = 0,5/2 = 1/4$. Logo $\sqrt{m_1/m_2} = 1/2$.

[297]Isto é, o período das oscilações é proporcional à raiz quadrada dos pesos.

que aumentamos o comprimento do fio de metal, podemos fazer, na mesma proporção, um número maior de revoluções no cilindro, sem alterar o grau de torção; assim, a força de reação de torção deve estar, para um mesmo número de revoluções, em razão inversa do comprimento do fio.[298] Vamos ver se esse raciocínio está de acordo com a experiência.

A fórmula da Seção 7.7 nos fornece

$$T = \sqrt{\frac{Ma^2}{2n}}\pi \ ,$$

ou, para o mesmo peso, T proporcional a $1/\sqrt{n}$. Assim, caso n esteja em razão inversa dos comprimentos, como afirma a teoria, T será como as raízes [quadradas] dos comprimentos dos fios de suspensão:[299] vamos comparar com a experiência.

Encontramos, na *décima experiência*, que o fio de latão número 7, de 9 polegadas de comprimento, estando esticado pelo peso de 2 libras, realizou 20 oscilações em 110".

Encontramos, na *décima terceira experiência*, que o mesmo fio de latão número 7, com 36 polegadas de comprimento, esticado pelo peso de 2 libras, realizou 20 oscilações em 222".

Portanto, os comprimentos dos fios estão entre si :: 1 : 4, enquanto que os tempos das oscilações dos fios estão [entre si] :: 1 : 2; logo a experiência prova que os tempos para um mesmo número de oscilações são, para os mesmos fios esticados pelos mesmos pesos, como a raiz [quadrada] dos comprimentos desses fios, assim como a teoria havia anunciado.[300]

Realizamos muitas experiências do mesmo tipo que as anteriores, sendo que todas elas confirmaram exatamente essa lei. Não julgamos necessário aumentar essa Memória com elas.

7.13 XIII. Sobre a Força de Torção em Relação à Espessura dos Fios

Acabamos de determinar as leis da força de torção em relação à tensão e ao comprimento dos fios; só nos resta determiná-las com relação à espessura desses mesmos fios.

Temos, nas seis primeiras experiências, três fios de ferro com espessuras diferentes e de mesmo comprimento; e nas seis experiências seguintes, três fios de latão de mesmo comprimento e com espessuras diferentes; mas, como temos o peso de um comprimento de 6 pés de cada um desses fios, é fácil de obter a partir deles a razão de seus diâmetros.[301] Aqui vai nosso raciocínio e sua previsão; o *torque* da reação de torção deve aumentar, com a espessura dos fios, de três maneiras. Considere por exemplo dois fios de mesma natureza e de mesmo comprimento, tal que o diâmetro de um seja o dobro do outro, é claro que, naquele que tem um diâmetro dobrado, existem quatro vezes mais partes esticadas do que

[298] Isto é, a força de torção deve ser inversamente proporcional ao comprimento do fio.

[299] Ou seja, se n for inversamente proporcional ao comprimento do fio, T será proporcional à raiz quadrada desse comprimento já que T é proporcional a $1/\sqrt{n}$.

[300] Sejam L_1 e L_2 os comprimentos dos dois fios, enquanto que T_1 e T_2 são seus períodos de oscilação, respectivamente. Temos então $L_1/L_2 = 1/4$, enquanto que $T_1/T_2 = 1/2$. Ou seja, $T_1/T_2 = \sqrt{L_1/L_2}$.

[301] O peso φ de um fio cilíndrico de comprimento L e diâmetro D é dado por $\varphi = \delta\pi(D/2)^2Lg$, onde δ é a densidade volumétrica de massa e g a aceleração da gravidade. Logo, para dois fios do mesmo material com mesmo comprimento L e mesma densidade δ, a razão de seus pesos é dada por $\varphi_1/\varphi_2 = (D_1/D_2)^2$. Coulomb vai mostrar que o torque τ é proporcional à quarta potência do diâmetro. Com isso vem que o torque será proporcional ao quadrado do peso do fio. Isto é, $\tau_1/\tau_2 = (D_1/D_2)^4 = (\varphi_1/\varphi_2)^2$, como Coulomb vai afirmar no final desse parágrafo.

naquele que tem um diâmetro simples; e que a extensão média[302] de todas essas partes será proporcional ao diâmetro do fio, da mesma forma que o braço médio da alavanca em relação ao eixo de rotação. Dessa forma somos levados a crer, de acordo com a teoria, que a força de torção de dois fios de metal, da mesma natureza, do mesmo comprimento, mas com uma espessura diferente, é proporcional à quarta potência de seus diâmetros ou, para um mesmo comprimento, ao quadrado de seus pesos. Vamos comparar com a experiência.[303]

Vamos considerar aqui apenas as experiências nas quais a tensão é de 2 libras, para poder comparar todos os números, [já que] os fios de número 1 não foram esticados de forma exata pelo peso de meia libra. Encontramos:

Fio de ferro.

Segunda experiência. O fio de ferro número 12, cujos 6 pés de comprimento pesam 5 grãos, realiza 20 oscilações em 242".

Quarta experiência. O fio de ferro número 7, cujos 6 pés de comprimento pesam 14 grãos, realiza 20 oscilações em 85".

Sexta experiência. O fio de ferro número 1, cujos 6 pés pesam 56 grãos, realiza 20 oscilações em 23".

Fio de latão.

Oitava experiência. O fio de latão número 12, cujos 6 pés pesam 5 grãos, realiza 20 oscilações em 442".

Décima experiência. O fio de latão número 7, cujos 6 pés pesam $18\frac{1}{2}$ grãos, realiza 20 oscilações em 110".

Décima segunda experiência. O fio de latão número 1, cujos 6 pés pesam 66 grãos, realiza 20 oscilações em 32".

Para determinar, a partir dessas experiências, a lei de reação da força de torção, em relação ao diâmetro do fio de suspensão, suponhamos que[304]

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \varphi^{m/2} : \varphi'^{m/2} ,$$

onde supomos que T e T' representam o tempo de um certo número de oscilações para um fio de metal, cujo diâmetro é D e D', sendo φ e φ' o peso [do fio] para um mesmo comprimento, e onde m é a potência que buscamos determinar. A partir dessa proporção tiramos que

$$m = \frac{2(\log T - \log T')}{\log \varphi - \log \varphi'} ,$$

fórmula essa que tem de ser comparada com a experiência.

A segunda experiência, comparada com a quarta, fornece $m = -1,82$.

[302]No original: *l'extension moyenne*.

[303]Na Seção 8.2 na página 182 encontra-se uma discussão mais aprofundada explicando como Coulomb concluiu teoricamente que o torque exercido por um fio metálico deve ser proporcional à quarta potência do diâmetro desse fio.

[304]Isto é,

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{D}{D'}\right)^m = \left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{m/2} .$$

A segunda experiência, comparada com a sexta, fornece $m = -1,95$.

A oitava experiência, comparada com a décima, fornece $m = -2,04$.

A oitava experiência, comparada com a décima segunda, fornece $m = -2,02$.

De onde resulta que[305]

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi'} \ .$$

Porém, a fórmula do movimento oscilatório

$$T = \left(\frac{Ma^2}{2n}\right)^{1/2} \pi$$

fornece, nas experiências anteriores, devido à igualdade dos pesos de tensão,[306] n proporcional a $1/T^2$; assim a força de torção, para fios de mesma natureza, de mesmo comprimento, mas de espessuras diferentes, é como a quarta potência do diâmetro, assim como a teoria havia anunciado.[307]

7.14 XIV. Resultado Geral

Portanto, resulta de todas as experiências anteriores que o *torque* da força de torção é, para fios do mesmo metal, proporcional ao ângulo de torção, à quarta potência do diâmetro, e inversamente proporcional ao comprimento do fio; de maneira que, se denominarmos l ao comprimento do fio, D seu diâmetro, B o ângulo de torção, teremos, para a expressão que representa a força de torção,

$$\frac{\mu B D^4}{l} \ ,$$

na qual μ é um coeficiente constante que depende da rigidez natural de cada metal. Essa grandeza μ é invariável para fios do mesmo metal, podendo ser determinada facilmente pela experiência, como veremos na próxima Seção.

---

[305] Isto é, como $m = -2$:

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{D'}{D}\right)^2 = \frac{\varphi'}{\varphi} \ .$$

[306] No original: *poids de tension*. Ou seja, devido à igualdade dos pesos P dos cilindros dependurados no fio.

[307] Coulomb havia encontrado experimentalmente que

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{D'}{D}\right)^2 = \frac{\varphi'}{\varphi} \ .$$

Porém, n é proporcional a $1/T^2$ devido à igualdade dos pesos dos cilindros que tensionam os fios. Como T também é proporcional a $1/D^2$ pela fórmula que acabei de escrever, vem que n vai ser proporcional a $1/(1/D^2)^2 = D^4$, como ele havia previsto.

7.15 XV. Valor Efetivo das Grandezas n e μ

Vimos, na Seção 7.7, que

$$n = \frac{Pa^2}{2\lambda} \ ,$$

onde P é o peso de um cilindro, a seu raio, λ o comprimento do pêndulo isócrono com as oscilações do cilindro, que são produzidas pela força de torção.

Apliquemos essa fórmula à *segunda experiência*, no qual o fio de ferro número 12 é esticado por um peso de 2 libras, cujo raio é $9\frac{1}{2}$ linhas, e no qual 20 oscilações são realizadas em 242".

Como o pêndulo que bate os segundos em Paris é de $440\frac{1}{2}$ linhas (99,37 cm),[308] o pêndulo isócrono com as oscilações do cilindro, será[309]

$$440\frac{1}{2}\left(\frac{242}{20}\right)^2 \ ;$$

assim

$$n = \frac{2 \text{ libras} \left(9\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 440\frac{1}{2}\left(\frac{242}{20}\right)^2} = \frac{1 \text{ libra}}{715} \ ,$$

logo o *torque* nB do fio de ferro número 12, tendo 9 polegadas de comprimento, é igual a $\frac{1}{715}$ libras, multiplicado pelo ângulo B de torção, atuando na extremidade de uma alavanca com um comprimento de 1 linha.[310,311]

[308] O chamado pêndulo de segundos gasta 1 segundo para partir do repouso de um ângulo inicial θ_o até chegar ao repouso na extremidade oposta com $\theta = -\theta_o$, gastando então 2 segundos para sair e voltar à mesma posição inicial. Com $T_{moderno} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ vem que $\ell = T^2 g/(4\pi^2)$. Com $T_{moderno} = 2\ s$ e $g = 9,81\ m/s^2$ vem que $\ell = 0,994\ m$. A medida dada por Coulomb é de $\ell = 440,5$ linhas $= 0,995\ m$.

[309] Usando que $T_{Coulomb} = \pi\sqrt{\ell/g}$ vem que $T_1/T_2 = \sqrt{\ell_1/\ell_2}$. Se $T_1 = 1\ s$, $\ell_1 = 440,5$ linhas e $T_2 = (242\ s)/20$, teremos então $\ell_2 = \ell_1(T_2/T_1)^2 = 440,5(242/20)^2 = 64.493,6$ linhas $= 145,75\ m$.

[310] [Nota de Potier:] A saber, 151,50 (C.G.S.) para esse fio, e 3691 para um fio número 12 com um comprimento de 0,01 m, torcido de um ângulo igual a 1; ou ainda é necessário um par de forças 64,42 (C.G.S.) para torcer esse fio de comprimento 1, de *um* grau.

[311] Na Seção 7.7 Coulomb mostrou que:

$$n = \frac{Pa^2}{2\lambda} \ ,$$

onde P é o peso do cilindro, a seu raio e λ o comprimento do pêndulo isócrono com as oscilações do cilindro, que são produzidas pela força de torção. Nessas experiências ele usou um cilindro de 2 libras, ou seja, com uma massa de 979 g. Supondo $g = 9,81\ m/s^2$ vem que seu peso é de $P = 0,979 \times 9,81 = 9,604\ kg \cdot m/s^2 = 9,604\ N$. Esse cilindro tinha um raio $a = 9,5$ linhas $= 0,02147\ m$. Coulomb encontrou ainda que o comprimento do pêndulo que tinha oscilações iguais às desse cilindro era de $\lambda = 64.493,6$ linhas $= 145,75\ m$. Com isso obtém-se que o coeficiente de torção desse fio de ferro número 12 (com um comprimento de 9 polegadas = 24,36 cm, uma massa de $3,3255 \times 10^{-5}\ kg$ e um diâmetro de $1,50 \times 10^{-4}\ m$) é dado por $n = 1,52 \times 10^{-5}\ kg \cdot m^2/s^2 = 1,52 \times 10^{-5}\ Nm = 152\ g \cdot cm^2/s^2 = 152\ dina \cdot cm$.

O valor apresentado por Coulomb foi de $n = (\frac{1}{715}\ libra)(1 \text{ linha})$, ou seja:

$$n = \frac{1\ libra}{715} \cdot 1 \text{ linha} = \frac{4,802\ N}{715} \cdot 2,26 \times 10^{-3}\ m = 1,518 \times 10^{-5}\ Nm \ .$$

Esse é o torque exercido por esse fio com um comprimento de 24,36 cm quando é torcido de 1 radiano.

Como n é inversamente proporcional ao comprimento, caso o fio tivesse o comprimento de 1 cm teríamos $n = 3,698 \times 10^{-4}\ Nm$. Como $1\ rad = 57,30°$, o torque necessário para torcer esse fio com 1 cm de comprimento de $1°$ é dado por $6,454 \times 10^{-6}\ Nm$.

Vimos nas Seções anteriores que, para o mesmo metal, resulta da teoria e da experiência que as forças de torção são inversamente proporcionais ao comprimento dos fios de suspensão e diretamente proporcionais à quarta potência do diâmetro. Assim é fácil de obter um valor determinado para a força de torção de um fio de ferro tendo qualquer comprimento e qualquer espessura; aqui vai o cálculo.

Um pé cúbico de ferro, pesando aproximadamente 540 libras,[312] e os 6 pés de comprimento do fio de ferro número 12, pesando 5 grãos, [então] o diâmetro desse fio de ferro é muito aproximadamente de um décimo quinto de linha;[313] assim, o *momento* de torção[314] de um fio de ferro, com um diâmetro de $\frac{1}{15}$ de linha, é igual a 1/715 libras, multiplicado pelo ângulo de torção, agindo na extremidade de uma alavanca com uma linha de comprimento.[315,316]

7.16 XVI. Comparação da Rigidez de Torção de Dois Metais Diferentes

Podemos deduzir facilmente, da teoria e das experiências anteriores, qual é, para dois metais diferentes, o ferro, por exemplo, e o cobre amarelo, a razão da rigidez de torção. Pegaremos o fio de ferro número 12 que vamos comparar com o fio de latão número 12.

Acabamos de calcular, na *Seção anterior*, a grandeza n para o fio de ferro, e a encontramos igual a $\frac{1}{715}$ libras, multiplicada por uma alavanca de uma linha. Mas como o fio de latão,

---

[312] A densidade volumétrica de massa δ desse ferro é então dada por $\delta = (540 \times 489,5\ g)/(32,48\ cm)^3 = 7,7\ g/cm^3 = 7,7 \times 10^3\ kg/m^3$.

[313] Isto é, $D = 1$ linha$/15 = 0,226\ cm/15 = 0,015\ cm$.

[314] No original: "le *momentum* de torsion". Essa expressão também pode ser traduzida por "torque" ou "momento da força de torção", ver a Nota de rodapé 116 na página 57.

[315] [Nota de Potier:] Podemos ainda deduzir das experiências de Coulomb o coeficiente μ de Lamé (chamado de rigidez pelos autores ingleses). Admitindo 7,8 para o peso específico desse fio, devemos ter

$$\mu = n \times \frac{2L}{\pi R^4} = 7,628 \times 10^{11}\ [dinas/cm^2]\ .$$

[316] Quando esse fio de ferro número 12 tinha um comprimento $L = 6$ pés $= 1,9488\ m$, Coulomb apresentou sua massa φ como sendo $\varphi = 5$ grãos $= 2,6555 \times 10^{-4}\ kg$. Vamos supor que a densidade do ferro seja $\delta = 7,7\ g/cm^3 = 7,7 \times 10^3\ kg/m^3$, como dado por Coulomb, ver a Nota 312. Como $\delta = \varphi/V = \varphi/(\pi R^2 L)$ vem que seu raio $R = 7,50 \times 10^{-5}\ m$, tal que seu diâmetro é de $D = 2R = 1,50 \times 10^{-4}\ m$. Se for utilizada a densidade dada por Potier, $\delta = 7,8\ g/cm^3 = 7,8 \times 10^3\ kg/m^3$, o raio e o diâmetro desse fio serão obtidos como sendo dados essencialmente pelos mesmos valores, a saber, $R = 7,46 \times 10^{-5}\ m$ e $D = 1,49 \times 10^{-4}\ m$.

O torque τ exercido por um fio cilíndrico de comprimento L e diâmetro D ao girar de um ângulo B foi expresso por Coulomb como sendo dado por $\tau = nB = (\mu D^4/L)B$. Hoje em dia esse torque é expresso como $\tau = nB = (\pi G D^4/32L)B$, onde $G = 32Ln/(\pi D^4) = 2Ln/(\pi R^4)$ é chamado de módulo de rigidez do material. Comparando com a expressão de Coulomb obtém-se $\mu = \pi G/32$ ou $G = 32\mu/\pi$.

Foi visto na Nota de rodapé 311 que o coeficiente de torção desse fio de ferro é dado por $n = 1,52 \times 10^{-5}\ kg \cdot m^2/s^2 = 1,52 \times 10^{-5}\ Nm = 152\ g \cdot cm^2/s^2 = 152\ dinas \cdot cm$. Nas experiências de torção Coulomb utilizou um fio com um comprimento $L = 9$ polegadas $= 0,24363\ m$. Com $R = 7,46 \times 10^{-5}\ m$ obtém-se $G = 7,6 \times 10^{10}\ N/m^2 = 7,6 \times 10^{10}\ Pa = 7,6 \times 10^{11}\ dina/cm^2$, como calculado por Potier.

Esse valor de G para o ferro obtido a partir das medidas de Coulomb está dentro da faixa do módulo de rigidez do ferro forjado que varia entre $7,5 \times 10^{11}\ dina/cm^2$ e $8,0 \times 10^{11}\ dina/cm^2$, [Gillmor, 1971a, pág. 155].

O que está sendo chamado aqui de G e que Potier denominou de coeficiente μ de Lamé não é o mesmo que o coeficiente μ definido por Coulomb. O coeficiente μ de Coulomb é dado por $\mu = \pi G/32 = 7,46 \times 10^9\ N/m^2 = 7,46 \times 10^9\ Pa = 7,46 \times 10^{10}\ dina/cm^2$.

carregado com um peso de 2 libras, realiza 20 oscilações em 442", teremos, pela mesma fórmula para o fio de latão:

$$n' = \frac{1 \text{ libra} \left(9\frac{1}{2}\right)^2}{440\frac{1}{2}\left(\frac{442}{20}\right)^2} \ ;$$

assim

$$\frac{n}{n'} = \left(\frac{442}{242}\right)^2 = 3,34 \ ;$$

logo a rigidez do fio de ferro número 12 está para a rigidez do fio de latão número 12 aproximadamente como $3\frac{1}{3} : 1$.

Porém, como há pouca diferença entre o peso específico do ferro e do cobre, que, de acordo com o Sr. Musschenbroek,[317] estão na razão 77:83, podemos supor que o fio de ferro número 12 e aquele de cobre, *de mesmo número*, possuem aproximadamente o mesmo diâmetro; assim, para os fios de ferro e de cobre de mesmo número, tudo o mais sendo igual, as rigidezes de torção estão entre si como $3\frac{1}{3} : 1$; o que quer dizer que ao girar o fio de ferro de um círculo teremos a mesma reação de torção que ao girar o fio de cobre de $3\frac{1}{3}$ círculos.[318]

Se quisermos comparar em seguida a rigidez de torção com a força de coesão, observaremos que nosso fio de ferro suportava, no instante de sua ruptura, 60 onças [1835 g], enquanto que o fio de cobre suportava apenas 35 onças; assim, como temos aproximadamente o mesmo diâmetro, suas forças de coesão estavam aproximadamente na razão 60:35, enquanto que suas forças de torção acabaram de ser encontradas na razão $3\frac{1}{3} : 1$.

Contudo, esse último resultado deve ser considerado apenas como um caso particular e não como um resultado geral. Veremos, na Segunda Seção dessa Memória, que a força dos metais varia de acordo com o grau de encruamento e de recozimento,[319] e que todas as experiências que utilizamos até agora para determinar a força dos metais só podem ser consideradas como casos particulares.

Porém, o que essa última observação parece indicar, e que a prática confirma, é que, se quisermos apoiar um corpo móvel sobre a ponta de um pivô, é vantajoso preferir um pivô de aço ou de ferro em relação a um pivô de cobre, já que, sob o mesmo grau de pressão, o ferro se curva muito menos que o cobre; dessa forma o círculo de contato formado pela ponta do pivô, pressionada pelo corpo que ele apoia, terá um diâmetro menor para o ferro do que

[317] Pieter van Musschenbroek (1692-1761) foi um cientista holandês.

[318] [Nota de Potier:] Concluímos desse número, ao supor o peso específico do latão como sendo 8,6, que o coeficiente μ' do latão

$$= \frac{1}{3,34} \cdot \frac{8,6^2}{7,8^2} \cdot \mu = 2,78 \times 10^{11} \ ,$$

número esse bem inferior àquele indicado por sir W. Thomson, Wertheim e o Sr. Everett, que indicam de 3,4 a 4×10^{11}.

[319] No original: *degré d'écrouissement et de recuit*.

O encruamento de um metal, também chamado de trabalho a frio ou de endurecimento pela deformação à frio, é o aumento de sua resistência a tração por deformação plástica realizada abaixo da temperatura de recristalização.

O recozimento é um tratamento térmico que tem por finalidade eliminar a dureza de uma peça temperada. O material é aquecido acima de sua temperatura de recristalização, é mantida uma temperatura adequada por um intervalo de tempo apropriado e então o material é resfriado.

para o cobre, o que, com tudo o mais sendo igual, diminui o *torque* do atrito que é necessário vencer para girar um corpo sobre a ponta de um pivô: teremos oportunidade na sequência de retornar a esse assunto.

Por algumas experiências e por um cálculo similar àquele anterior, encontramos que ao suspender um cilindro em um fio de seda, formado de vários fios reunidos por água fervente, e bem forte para suportar até 60 onças [1835,4 g], esse fio de seda tinha de 18 a 20 vezes menos rigidez de torção que o fio de ferro que suportava esse mesmo peso no instante de ruptura.

7.17 XVII. Utilização das Experiências e Teoria Anteriores

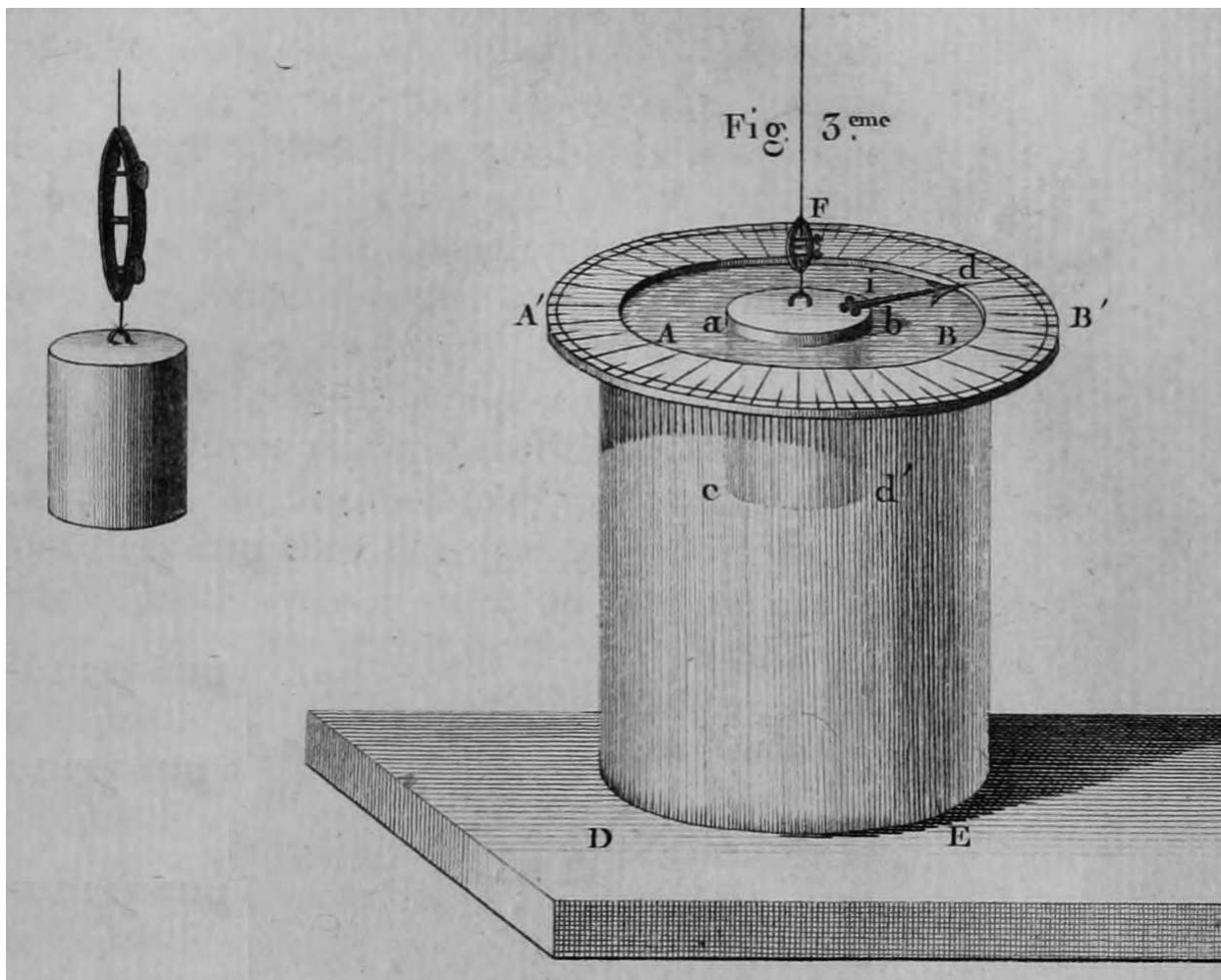
De acordo com a teoria anterior e as experiências sobre as quais ela se baseia, seremos capazes de medir forças muito pequenas, que exigem uma precisão que os meios usuais não fornecem: vamos apresentar um exemplo.

7.18 XVIII. Balança para Medir o Atrito de Fluidos Contra os Sólidos

A fórmula que exprime a resistência dos fluidos contra um corpo em movimento parece ser composta de muitos termos, alguns dos quais dependem do choque dos fluidos contra o corpo sólido, e os outros termos são devidos ao atrito do fluido: entre os termos devidos ao atrito, há um termo que depende da adesão,[320] e que acreditamos ser constante; porém esse termo é tão pequeno que, sendo confundido nas experiências com as outras quantidades que dependem do choque, ele é muito difícil de ser medido: podemos ver as experiências que o Sr. Newton realizou para descobrir essa quantidade constante. (*Livro II dos Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, Escólio do teorema vinte e cinco.*)[321]

A força de torção fornece um meio fácil de determinar essa adesão através da experiência.

Em um recipiente $ADBE$ (Figura 3), cheio do fluido do qual queremos determinar a adesão, suspendemos, por meio de um fio de cobre, um cilindro *abcd*, de cobre ou de chumbo; colocamos acima do recipiente um círculo $A'FB'$, dividido em graus; esse círculo encontra-se no nível da extremidade d de um indicador id fixado ao cilindro.

[320] No original: *adhérence*. Esse termo também pode ser traduzido por "aderência".
[321] [Newton, 2008, págs. 98-108].

Quando o cilindro é girado ao redor de seu eixo vertical, sem perturbá-lo de sua verticalidade, podemos observar, por meio do pequeno indicador, de quanto cada oscilação é alterada: e, como a força de torção do fio que produz essas oscilações é conhecida pelas experiências anteriores; assim também podemos conhecer a alteração devida à imperfeição da elasticidade [do fio], ao fazer o cilindro oscilar no vazio ou mesmo no ar; podemos esperar, por esse meio, encontrar a quantidade constante devida à adesão.

Exemplo e Experiência

Suspendi em um recipiente cheio de água, em um fio de cobre número 12, de 29 polegadas de comprimento [78,5 cm], o cilindro de chumbo pesando duas libras [979 g] que foi utilizado nas experiências anteriores: o círculo AB, sobre o qual observávamos as oscilações, tinha um diâmetro de 44 linhas [9,9 cm]; esperamos, antes de começar as observações, que as amplitudes das oscilações fossem diminuídas até o ponto no qual a extremidade d do indicador percorresse sobre o círculo apenas um arco de uma linha e meia [0,34 cm], correspondendo aproximadamente a $3°55'$; e, ao observar a marcha do indicador com uma lupa, percebemos claramente 14 oscilações antes que o movimento fosse extinto.

Resultado dessa Experiência.

Caso seja suposta constante a diminuição sucessiva de cada oscilação, e que ela seja atribuída totalmente à adesão do fluido contra a superfície do cilindro de chumbo, teremos (Seção 7.8):[322]

$$(A - S') = \left(\frac{2\mu}{n}\right) ,$$

onde $(A - S')$ é a diminuição de cada oscilação, $n(A - S)$ o *torque* da força de torção, e μ o *torque* da força retardadora devida à adesão.

Mas como, após observar as oscilações, o arco percorrido diminuía de $1\frac{1}{2}$ linha em 14 oscilações e como o raio do círculo sobre o qual essa diminuição era observada era de 22 linhas, ao supor constante essa diminuição, teremos o ângulo $(A - S')$, valor esse no qual a amplitude diminui em cada oscilação, igual a $\frac{3}{2 \cdot 22 \cdot 14}$.

Mas encontramos (Seção 7.16) que, para um fio de latão número 12 com 9 polegadas de comprimento,

$$n = \frac{1 \text{ polegada} \cdot \left(9\frac{1}{2}\right)^2}{440\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{442}{20}\right)^2} ;$$

e, como também encontramos que as forças de torção são [inversamente] proporcionais ao comprimento dos fios de suspensão, teremos para o nosso fio de 29 polegadas de comprimento

$$\mu = \frac{1}{3155000} \text{libra} \times 1 \text{ linha} ,$$

ou seja, que o *torque* da força retardadora constante μ é aproximadamente igual a um terço do milionésimo de uma libra, suspenso por uma alavanca de uma linha: uma quantidade que teria sido impossível de medir por qualquer outro meio que não fosse esse que acabamos de utilizar.[323]

Para deduzir agora o valor da adesão de acordo com essa experiência, é necessário observar que a altura do cilindro de chumbo submerso pela água do recipiente era de 24 linhas, e que o diâmetro do cilindro era de 19 linhas. Assim, tomando 22/7 como sendo a razão da circunferência para o diâmetro, a superfície do cilindro submerso era igual a $\frac{22}{7} \cdot 19 \cdot 24$; e como o movimento é feito aqui ao redor do eixo do cilindro, cujo raio é de $9\frac{1}{2}$ linhas, caso δ seja a adesão, o *torque* da adesão ao redor do eixo de rotação será

$$\delta \frac{22}{7} (19)^2 \cdot 12 .$$

Ainda é necessário adicionar a essa quantidade o *torque* da adesão do círculo que forma a base do cilindro submerso na água, cujo *torque* é igual a

$$\delta \frac{22}{7} 19^l \frac{19^l}{4} \frac{2}{3} \frac{19}{2} ,$$

[322]Coulomb está supondo aqui $m = 0$ na Seção 7.8, tal que a força retardadora R seja uma constante igual a μ.

[323]Esses cálculos mostram que a balança de torção de Coulomb consegue medir torques extremamente pequenos da ordem de

$$\mu = \frac{1 \text{ libra}}{3155000} \times 1 \text{ linha} = \frac{4,802\ N}{3155000} \times (2,26 \times 10^{-3}\ m) = 3,4 \times 10^{-9}\ Nm .$$

de tal maneira que o *torque* total da resistência do fluido contra o cilindro será

$$\delta\frac{22}{7}(19)^2\left(12+\frac{19}{12}\right)=\delta\frac{22}{7}(19)^2\left(\frac{163}{12}\right) .$$

Mas a experiência nos mostrou esse mesmo *torque* igual a

$$\frac{1 \text{ libra}}{3155000}\cdot 1 \text{ linha} ,$$

no caso de uma polegada ao quadrado, assim

$$\delta=\frac{1 \text{ libra}}{3155000}\cdot\frac{7\cdot 12}{22\cdot 163\cdot(19)^2} ,$$

e para um pé ao quadrado a adesão será

$$\delta(144)^2=\frac{1 \text{ libra}}{2345000} ,$$ [324]

de tal forma que a resistência constante devida à adesão da água para uma superfície de 255 pés não pode ser maior do que um grão; assim existem poucos casos nos quais essa alteração constante, quando ela ocorre, não possa ser desprezada na avaliação do atrito da água. Não fizemos qualquer teste com outros fluidos.

Ao fornecer ao cilindro oscilações de dois ou três círculos de amplitude, e comparando as diminuições sucessivas das amplitudes de oscilação com as fórmulas do movimento oscilatório alterado,[325] creio ter percebido que nas velocidades muito baixas esse atrito é proporcional às velocidades, e para velocidades grandes, proporcional ao quadrado [das velocidades]; mas essas experiências exigem um trabalho a ser realizado com essa finalidade, e precisam ser feitas com fluidos diferentes.[326]

7.19 XIX

Após a leitura dessa Memória, construí, de acordo com a teoria da reação de torção que acabei de explicar, uma balança elétrica e uma balança magnética; porém, como esses dois instrumentos, assim como os resultados relativos às leis elétricas e magnéticas que eles forneceram, serão descritos nos próximos volumes de nossas Memórias, creio que é suficiente aqui anunciá-los.

7.20 XX. Segunda Seção — Sobre a Alteração da Força Elástica nas Torções dos Fios de Metal. Teoria da Coesão e da Elasticidade

Quando torcemos os fios de ferro ou de latão, esticados, como nas experiências anteriores, por um peso, observamos duas coisas: caso o ângulo de torção não seja grande, em relação ao

[324][Nota de Potier:] Ou seja, $1,94\times 10^{-4}$ dinas por centímetro ao quadrado.
[325]Alterado devido à resistência.
[326]Mais tarde o próprio Coulomb realizou essas pesquisas, [Coulomb, 1801b].

comprimento do fio de suspensão, no instante em que soltamos o peso, ele retorna aproximadamente à posição que ele tinha antes da torção do fio de metal, ou seja, o fio de suspensão se desenrola de toda a quantidade com a qual havia sido torcido; porém, caso o ângulo de torção que fornecemos ao fio de suspensão seja muito grande, então esse fio só se desenrola de uma certa quantidade, e o centro de reação de torção avança de toda a quantidade pela qual o fio deixou de se desenrolar. Devido a essas duas considerações, são necessárias duas sequências de experiências que faremos nessa Seção; a primeira para determinar, através da diminuição das oscilações, de quanto é alterada a força elástica de torção no movimento oscilatório, em condições nas quais o centro de reação de torção não seja deslocado; a segunda, para determinar o deslocamento do centro de reação quando o ângulo de torção é muito grande para que ocorra esse deslocamento.

7.21 XXI. Primeira Experiência

Fio de ferro número 1, comprimento de 6 polegadas e 6 linhas (17,96 cm).

Pegamos um fio de ferro de 6 polegadas e 6 linhas de comprimento, ele foi carregado com um peso de 2 libras, o mesmo que utilizamos nas experiências da Seção anterior. Tentamos, ao girar esse cilindro ao redor de seu eixo para torcer o fio de suspensão, determinar de quantos graus a amplitude diminuía em cada oscilação, e encontramos:

	Ângulo de torção	Perda de 10° em
Primeiro teste	90°	$3\frac{1}{2}$ oscilações
Segundo teste	45	$10\frac{1}{2}$
Terceiro teste	$22\frac{1}{2}$	23
Quarto teste	$11\frac{1}{4}$	46

Observação sobre essa Experiência.

As diminuições das amplitudes das oscilações eram muito incertas, quando o ângulo original de torção era maior do que 90°; observamos até mesmo que nesse caso, ao girar o cilindro ao redor de seu eixo, ele não retornava à sua posição original e que a posição respectiva das partes constitutivas[327] do fio foram alteradas e, consequentemente, que seu centro de reação de torção permaneceu deslocado; vai aqui o que a experiência forneceu sobre esse deslocamento.

7.22 XXII. Sequência da Primeira Experiência

Nessa parte da primeira experiência, buscamos o deslocamento do centro de torção, de acordo com o grau de torção fornecido ao fio de suspensão.

[327] No original: *parties constitutives*. Essa expressão também pode ser traduzida como partes (ou partículas ou elementos) constituintes, componentes ou integrantes.

	Torção	Deslocamento do indicador ou do centro de torção
Primeiro teste	$\frac{1}{2}C$ [isto é, 180°]	8°
Segundo teste	1 [isto é, $1C = 360°$]	50
Terceiro teste	2	310
Quarto teste	3	$1C + 300$ [isto é, 660°]
Quinto teste	4	2 + 290
Sexto teste	5	3 + 280
Sétimo teste	6	4 + 260
Oitavo teste	10	8 + 240

Nono teste. Desejando continuar a torcer [o fio] sempre no mesmo sentido de quinze novos círculos, o fio rompeu-se no décimo quarto. Após essa experiência, esse fio estava reto e muito rígido, separou-se, ao longo de seu comprimento, em duas partes: examinada na lupa, essa separação era muito perceptível e tinha exatamente a forma de uma corda formada de duas tranças.[328]

7.23 XXIII. Observação sobre essa Experiência

Essa primeira experiência e a seguinte parecem mostrar que abaixo de 45° as alterações são aproximadamente proporcionais às amplitudes dos ângulos de torção, como vemos pelo segundo, terceiro e quarto testes da primeira experiência;[329] que acima de 45° as alterações aumentam em uma razão muito maior; que o centro de reação de torção começa a se deslocar apenas quando o ângulo de torção é aproximadamente de meia circunferência; que esse deslocamento cresce na medida em que torcemos o fio; que ele é muito irregular até o ângulo de 1 círculo e 10° [370°]; e que, ao ultrapassar esse nível de torção, a reação de torção fica aproximadamente a mesma para todos os ângulos de torção; assim, por exemplo, ao torcer no quarto teste de três círculos, o centro de reação de torção deslocou-se de um círculo +300°, de forma que a reação de torção apenas levou o cilindro de volta de um círculo +60°. No sétimo teste, vemos que, após já ter sofrido nos testes anteriores um deslocamento [total] de mais de 8 círculos, então 6 novos círculos de torção deslocaram o centro de reação de torção de $4C + 260°$, de forma que, acima de 14 círculos de torção, a reação de torção é ainda de apenas $1C + 100°$; assim ela difere apenas por um décimo da reação de torção para 3 círculos de torção que o quarto teste nos forneceu $1C + 60°$: as próximas experiências vão esclarecer essa observação.

7.24 XXIV. Segunda Experiência

Fio de ferro número 7, comprimento de 6 polegadas e 6 linhas.

[328] No original: *torons*.

[329] Seja $A(t)$ a amplitude de oscilação do cilindro no tempo t após o fio ter sido torcido e solto do repouso em $t = 0$ com a amplitude inicial A_o. Coulomb está concluindo de suas experiências que para $\theta < 45°$ as alterações das amplitudes em relação ao tempo são proporcionais às próprias amplitudes. Matematicamente isso pode ser expresso como: $dA/dt = -kA$, onde k é uma constante positiva, já que observou as amplitudes diminuindo com a passagem do tempo. A integração dessa equação fornece $A(t) = A_o e^{-kt}$.

Procuramos, na primeira parte dessa experiência, encontrar de quanto as amplitudes das oscilações diminuem em cada oscilação, enquanto o centro de torção ainda não havia se deslocado.

	Ângulo de torção	Perda de 10° em
Primeiro teste	180°	$3\frac{1}{2}$ oscilações
Segundo teste	90	12
Terceiro teste	45	27
Quarto teste	$22\frac{1}{2}$	57

Sequência da Segunda Experiência.

Nessa segunda parte da mesma experiência, procuramos o deslocamento do centro de torção.

	Torção	Deslocamento do centro de reação de torção
Primeiro teste	3 círculos	300°
Segundo teste	4	$1C + 180$ [isto é, 540°]
Terceiro teste	6	3 + 90 [isto é, 1170°]
Quarto teste	8	5 + 90
Quinto teste	12	9 + 40
Sexto teste	20	16 + 310
Sétimo teste	30	26 + 180
Oitavo teste	50	46 + 20
Nono teste	No décimo sétimo círculo de torção o fio rompeu-se	

7.25 XXV. Terceira Experiência

Fio de ferro número 12 com comprimento de 6 polegadas e 6 linhas.

A primeira parte dessa experiência foi feita sob o mesmo ponto de vista que a primeira parte das duas experiências anteriores.

	Ângulo de torção	Perda de 10° em
Primeiro teste	360°	1 oscilação
Segundo teste	180	2
Terceiro teste	90	5
Quarto teste	45	11
Quinto teste	$22\frac{1}{2}$	25

Sequência da Terceira Experiência.
Deslocamento do Centro de Torção.

	Torção	Deslocamento do centro de reação de torção
Primeiro teste	4 círculos	300°
Segundo teste	6	$2C + 40$
Terceiro teste	após seis voltas adicionais o fio rompeu-se	

7.26 XXVI. Quarta Experiência

Fio de latão número 1, comprimento de 6 polegadas e 6 linhas.

As experiências anteriores foram continuadas com os fios de latão utilizados nas experiências da Primeira Seção.

	Ângulo de torção	Perda de	em
Primeiro teste	180°	12°	2 oscilações
Segundo teste	90	10°	6
Terceiro teste	45	10°	16
Quarto teste	$22\frac{1}{2}$	10°	40
Quinto teste	$11\frac{3}{4}$	10°	80

Sequência da quarta experiência.
Deslocamento do centro de torção.

	Torção	Deslocamento do centro de torção
Primeiro teste	2 círculos	160°
Segundo teste	4	$2C + 0$
Terceiro teste	6	$3C + 300$
Quarto teste	10	$7C + 300$
Quinto teste	20	$17C + 340$
Sexto teste	No vigésimo oitavo círculo o fio rompeu-se	

Quinta experiência.
Diminuição das amplitudes nas oscilações.

	Ângulo de torção	Perda de 10° em
Primeiro teste	360°	$2\frac{1}{2}$ oscilações
Segundo teste	180	6
Terceiro teste	90	13
Quarto teste	45	31
Quinto teste	$22\frac{1}{2}$	72

Sequência da quinta experiência.

Deslocamento do centro de torção.

Ao girar de 4 círculos, o centro deslocou-se em 220°; mas ao querer girar de 6 círculos o fio rompeu-se.

7.27 XXVII

No fio utilizado nessa última experiência, a torção altera menos as oscilações e, consequentemente, [altera menos] a força elástica do que em todos os outros [fios]; é o que resulta do grande número de oscilações que ocorrem aqui antes que o movimento oscilatório seja destruído; é o que resulta igualmente da ruptura repentina desse fio, sem poder deslocar de um círculo seu centro de reação. Encontrei geralmente que os fios de latão disponíveis no comércio, entre os números 5 e 8, eram aqueles cuja elasticidade de torção era a menos imperfeita: ao comparar os fios de ferro e de latão com os *mesmos números*, encontra-se igualmente que os fios de latão possuem uma amplitude de elasticidade bem mais estendida que os fios de ferro.

De resto, a experiência apresenta muitas irregularidades nos resultados: duas bobinas do mesmo fio e do mesmo número não fornecem sempre o mesmo deslocamento para o mesmo ângulo de torção, o que só pode ser atribuído à maneira pela qual os fios são fabricados, à pressão maior ou menor que eles sofrem ao passar sob o canal de uma fieira,[330] [e] ao tratamento térmico dado a eles para reduzir sucessivamente o diâmetro de número em número, do grande ao pequeno.

7.28 XXVIII. Primeira Observação

Apesar da incerteza que reina nas experiências de oscilações pelo alcance das amplitudes, parece que dentro de certos limites essas alterações são aproximadamente proporcionais à amplitude de oscilação, como anunciamos nas observações sobre a primeira experiência e como confirmado por todas as outras.[331] A resistência do ar só pode alterar muito pouco, nas nossas experiências, a amplitude das oscilações; me assegurei disso da seguinte maneira: o peso de 2 libras, que foi utilizado nas experiências dessa Seção, tinha 26 linhas de altura e 19 linhas de diâmetro; formei com um papel muito leve uma superfície cilíndrica de mesmo diâmetro que esse peso, mas que tinha 70 linhas de altura; fiz com que uma parte do cilindro de chumbo penetrasse no meu envelope de papel e formei assim um cilindro com 78 linhas de altura ou três vezes mais longo que o primeiro, o que deveria triplicar, no movimento oscilatório, as alterações devidas à resistência do ar; porém nunca encontrei que essas alterações fossem de um décimo mais consideráveis nesse segundo caso do que no primeiro: na maioria dos casos elas eram iguais; assim a resistência do ar entra nas nossas experiências apenas como quantidades que podemos desprezar.

[330]No original: *lèvre de la filière*. Na trefilagem ou trefilação um arame tem sua espessura reduzida ao ser tracionado através de uma matriz chamada trefila ou fieira, com forma de canal convergente. Esse processo pode ocorrer a frio ou a quente.

[331]Ver a Nota de rodapé 329 na página 169.

7.29 XXIX. Segunda Observação

Para fazer uma balança de torção, é sempre necessário escolher os fios que possuem a elasticidade menos imperfeita; os fios de latão são muito preferíveis em relação àqueles de ferro: a escolha da espessura depende das forças que se quer medir. Tenho uma balança magnética que será descrita nas nossas Memórias, na qual utilizei alternadamente um fio de latão com 3 pés de comprimento, de números 12 e 7; a força elástica de torção é tal, que ao torcer esses fios de 8 círculos, durante 30 horas, não ocorria um grau [1°] de alteração ou de deslocamento no centro de torção.

7.30 XXX. Terceira Observação

Em todos os fios de metal, a reação da elasticidade possui apenas um certo escopo:[332] o isocronismo das oscilações nos ensina que nos primeiros graus de torção a força elástica é quase perfeita; porém além do ângulo de torção que serve, por assim dizer, de medida para a força elástica, o centro de reação de torção desloca-se quase que totalmente de todo ângulo de torção que excede aquele da reação da elasticidade. Portanto, como podemos observar nas experiências anteriores, a amplitude da reação elástica não é uma quantidade constante para todos os ângulos de torção: ela cresce na medida em que a torção aumenta; quanto menor o escopo da elasticidade inicial nos fios submetidos à experiência, maior é esse crescimento. Um fio de latão número 1, de $6\frac{1}{2}$ polegadas de comprimento, enrubescido no fogo, para fazê-lo perder pelo aquecimento a maior parte de sua elasticidade, fornece após esse procedimento, para o primeiro círculo de torção, apenas 50° de reação de elasticidade; mas ele adquiriu, após 90 círculos de torção, uma extensão elástica perto de 500° nesse intervalo; do segundo ao terceiro círculo de torção, a reação da elasticidade cresceu de 12°; do quadragésimo ao quadragésimo primeiro círculo de torção, a mesma reação cresceu de 6°, e do nonagésimo ao nonagésimo primeiro círculo de torção, cerca de 1°, de maneira que o crescimento da reação elástica, após o centro de reação ter sido deslocado de um certo ângulo, estava aproximadamente em razão inversa do ângulo de deslocamento. É necessário avisar que após esses 90 círculos de torção, quis torcer de 50 círculos adicionais o mesmo fio, mas ele rompeu-se no quadragésimo nono, de forma que esse fio, antes de romper-se, podia ser torcido de 140 círculos. Se compararmos esse resultado com a sequência da primeira experiência na qual o mesmo fio número 1 não foi recozido, encontraremos que após 25 círculos de torção a reação da elasticidade era de 480°, e que ao torcer de 15 novos círculos o fio rompeu-se; portanto esse último fio podia aguentar, sem se romper, apenas 40 círculos de torção. Ao seguir nessa experiência a marcha da reação elástica, deduziremos dela que no ponto de ruptura essa reação era aproximadamente igual àquela do fio recozido no mesmo ponto de ruptura; de onde pareceria que temos o direito de concluir que apenas pela torção podemos dar a um fio recozido toda a elasticidade que ele suporta e que o encruamento não adiciona qualquer coisa a ela; de maneira que, reciprocamente, caso, ao atravessar pela fieira ou por um outro meio qualquer, pudéssemos fornecer a nosso fio de latão um encruamento tal que sua reação de elasticidade pudesse ser de 520°, que me parece ser aquela de nossos dois fios no instante da ruptura, logo após a reação elástica teria sido levada a seu *máximo* por essa primeira operação: não haveria qualquer deslocamento possível no centro de reação

[332]Isto é, o comportamento dos fios é elástico somente até certo ponto, ou seja, até um certo ângulo característico.

de torção; mas todas as vezes nas quais pudéssemos fornecer a esse fio uma torção acima de 520°, ele seria rompido.

7.31 XXXI. Quarta Observação

Aqui vai, de acordo com as experiências anteriores, ao que parece, como podemos explicar a elasticidade e a coesão dos metais. As partes integrantes do fio de ferro ou de latão,[333] ou de um metal qualquer, possuem uma elasticidade que podemos considerar como perfeita, ou seja, que as forças necessárias para comprimir ou dilatar essas partes integrantes são proporcionais às dilatações ou compressões sofridas por elas; mas elas são ligadas entre si apenas pela coesão, quantidade constante e absolutamente diferente da elasticidade. Durante os primeiros graus de torção, as partes integrantes mudam de forma, alongam-se ou comprimem-se, sem que os pontos pelos quais elas aderem-se entre si mudem de lugar, já que a força necessária para produzir esses primeiros graus de torção é menor que a força de coesão; porém, quando o ângulo de torção torna-se tal, que a força com a qual essas partes são comprimidas ou dilatadas é igual à coesão que une essas partes integrantes, então elas devem ou se separar ou escorregar uma sobre a outra. Esse deslizamento das partes ocorre em todos os corpos maleáveis; porém, caso devido a esse deslizamento das partes entre si o corpo se comprima, [então] aumentará a amplitude dos pontos de contato e crescerá a amplitude do domínio da elasticidade. Contudo, como essas partes integrantes possuem uma forma determinada, a amplitude dos pontos de contato só pode aumentar até um certo grau, além do qual o corpo rompe-se; é o que explica os efeitos detalhados na Seção anterior. O que prova ainda a necessidade de distinguir a causa da elasticidade em relação à causa da adesão, é que podemos variar à vontade a coesão pelo grau de tratamento térmico sem alterar dessa maneira a elasticidade. Foi assim que quando recozia ao branco[334] meu fio de cobre número 1 das experiências anteriores, ele perdia uma grande parte da sua força de coesão: antes de ter sido recozido, ele suportava no ponto de ruptura 22 libras, após o tratamento térmico, ele suportava apenas de 12 a 14 libras; porém, enquanto a adesão foi reduzida quase à metade pelo aquecimento e a amplitude de elasticidade foi quase diminuída pelo mesmo valor, contudo, em toda amplitude de reação elástica que permaneceu no fio recozido, a elasticidade continuava a mesma, para um mesmo grau de torção, que no caso do mesmo fio não recozido, já que, ao suspender em um e no outro o mesmo peso, o tempo para um mesmo número de oscilações era exatamente igual nos dois casos.

[333]Estou traduzindo como *partes integrantes* o que Coulomb denominou aqui de *parties intégrantes* de um fio. Essa expressão também poderia ser traduzidas por *partículas integrantes* ou por *elementos integrantes*. Outras possibilidades de tradução seriam partes (ou partículas ou elementos) constituintes, integrais, individuais ou constitutivas. Na Seção 7.33 desse trabalho Coulomb vai se referir às *molécules intégrantes*, ou seja, *moléculas integrantes* do metal, ver a Nota 340 na página 178. Gillmor considera que essas expressões podem ser traduzidas em inglês por *individual particles* e *integral particles*, respectivamente, [Gillmor, 1971a, pág. 159]. Ou seja, Coulomb tinha uma visão corpuscular, atômica ou molecular para a composição de um metal. Ver ainda a Nota de rodapé 146 na página 68.

[334]No original: *je faisais recuire à blanc*. Essa expressão também pode ser traduzida como “revenimento ao branco”, “aquecimento até o branco” ou “aquecer até o brilho”.

7.32 XXXII

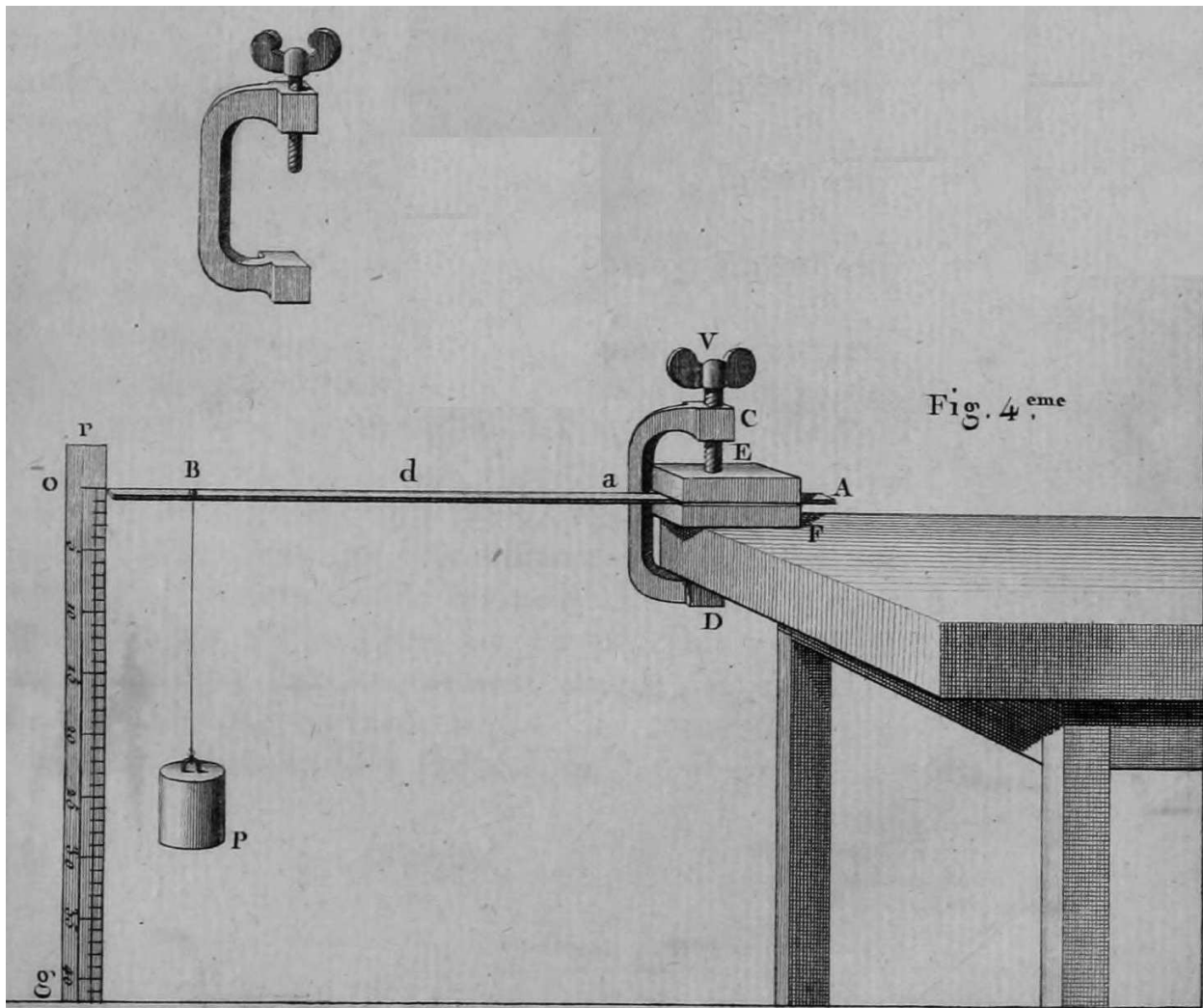
Um efeito muito curioso da aproximação das partes na torção de fios de metal, é aquele que ocorre quando torcemos um fio de ferro o qual, apenas por essa operação, obtém pela aproximação entre as partes a qualidade de adquirir o magnetismo em um grau maior do que antes. Aqui vai o que a experiência me revelou sobre esse assunto: peguei um fio de ferro tal como encontramos disponível no comércio, com a espessura daqueles que servem para as pequenas barras sonoras;[335] um comprimento de 6 polegadas [16,24 cm] pesava 57 grãos (3,13 g); esse fio de 6 polegadas, imantado e suspenso horizontalmente por um fio de seda distorcido e muito fino, realizava uma oscilação em 18": esse mesmo fio de 6 polegadas de comprimento, torcido até o ponto de ruptura e imantado como na primeira vez até a saturação pelo método de toque duplo,[336] realizava uma oscilação em 60"; de maneira que, sendo o *torque* da força diretriz para duas agulhas iguais e similares proporcional ao inverso do quadrado do tempo para um mesmo número de oscilações, o *momento* magnético da agulha torcida era nove vezes maior que aquele da agulha não torcida; terei oportunidade de voltar a esse assunto em uma outra Memória.

7.33 XXXIII

Realizei a próxima experiência para confirmar toda a teoria anterior relativamente à coesão e à elasticidade.

Uma lâmina de aço AB foi fixada (Figura 4), por meio de uma pinça CD com uma rosca borboleta V, sobre a borda de uma mesa bem sólida. Essa lâmina era presa e apertada na sua parte Aa entre duas placas de ferro E e F pela rosca V: essa lâmina tinha 11 linhas (2,48 cm) de largura e meia linha [0,11 cm] de espessura; do ponto a até o ponto B no qual era suspenso o peso P, tinha uma distância de 7 polegadas (18,95 cm); foi medido sobre a régua vertical rg de quanto o peso P baixava a lâmina AB na sua extremidade B. Vão aqui os detalhes dos resultados que ocorreram de acordo com os pesos diferentes com os quais a lâmina era carregada.

[335]No original: *sonnettes*. Essa expressão também pode ser traduzida como campainhas, alarmes, sinos, sinetas etc.

[336]Ver a Seção 4.6.

Aquecemos a lâmina ao branco e lhe fornecemos uma têmpera de alta rigidez;[337] em seguida ligamos no ponto B, a 7 polegadas do ponto a, pesos diferentes.

Com um peso de	a extremidade B abaixou de
1/2 libra (245 g)	8 linhas (1,80 cm)
1 libra (489 g)	$15\frac{1}{2}$ linhas (3,49 cm)
$1\frac{1}{2}$ libra (734 g)	23 linhas (5,19 cm)

Pegamos essa mesma lâmina e a aquecemos até que ela adquiriu a cor violeta e retornou à consistência de uma excelente mola, e encontramos que ao carregá-la como no primeiro caso,

[337]No original: *On a fait rougir la lame à blanc et on lui a donné une trempe très raide.*

O revenimento em ferro fundido branco reduz as tensões internas do metal e melhora suas propriedades mecânicas. A expressão *trempe très raide* pode ser entendida como um temperamento muito duro, uma têmpera de alta rigidez, ou ainda como uma têmpera muito brusca.

A têmpera refere-se ao resfriamento brusco. É a consistência que se dá aos metais como o aço introduzindo-os na água fria quando estão aquecidos ao rubro na brasa.

com um peso de	a extremidade B abaixou de
1/2 libra (245 g)	8 linhas (1,80 cm)
1 libra (489 g)	$15\frac{1}{2}$ linhas (3,49 cm)
$1\frac{1}{2}$ libra (734 g)	23 linhas (5,19 cm)

Finalmente aquecemos esse mesma lâmina ao rubro, a deixamos resfriar lentamente, e obtivemos, ao carregar [com um peso P] a extremidade B, exatamente os mesmos resultados que nas experiências anteriores.

Nos parece que essas três experiências provam de uma maneira incontestável que, qualquer que seja o estado em que a lâmina se encontra, os primeiros graus de sua força elástica não são alterados de maneira alguma, uma vez que, ao levar em conta o braço da alavanca que diminui na medida em que a lâmina é carregada, os mesmos pesos a flexionam nos três casos igualmente e proporcionalmente à carga, [e] que quando retiramos esses pesos ela retoma exatamente sua posição horizontal.

Quis ver em seguida qual era a força dessa lâmina nesses três estados diferentes e, no caso em que o centro de flexão começava a se deslocar, qual seria o grau de curvatura no qual a lâmina começaria a ser deformada sem retornar à sua posição inicial. Vai aqui o resultado dessa experiência.

Cortei de uma chapa de aço da Inglaterra três lâminas exatamente similares àquela da experiência anterior; uma dessas lâminas foi temperada com alta rigidez, a segunda retornou à consistência de uma excelente mola e a terceira foi recozida ao branco e esfriada lentamente. Fixei em d (Figura 4) um dinamômetro[338] a $2\frac{1}{2}$ polegadas [6,8 cm] de distância do ponto a, e tive o cuidado de exercer a tração sempre perpendicularmente à direção da lâmina. Aqui vai o que observamos.

A lâmina temperada com alta rigidez rompia-se sob uma tração de 6 libras; porém, sob qualquer ângulo no qual era flexionada abaixo daquele de se romper, ela retomava exatamente sua posição inicial. A lâmina que voltou à cor violeta, formando uma excelente mola, rompia-se somente sob uma tração de 18 polegadas; ela se curvava até o ponto de ruptura de um ângulo aproximadamente proporcional ao ângulo de torção, e quando era solta sob qualquer ângulo no qual era flexionada antes de chegar naquele de rompimento, retomava sua posição inicial. A lâmina recozida ao branco e resfriada lentamente flexionava-se até uma tração de 5

[338]No original: *peson*. Essa palavra também pode ser traduzida como balança de mola ou dinamômetro de mola. Nesse caso esse dinamômetro é aplicado no ponto d, exercendo uma força perpendicular à lâmina AB, dirigida para cima. Ele é segurado na parte superior, tendo um gancho em sua extremidade inferior que é conectado no ponto d da lâmina, com ilustrado na Figura dessa nota de rodapé:

a 6 libras, proporcionalmente a essa força de tração, e de um ângulo absolutamente igual sob a mesma força que no estado temperado e de mola;[339] porém ao puxar em seguida sempre perpendicularmente à direção da lâmina para conservar a mesma alavanca, com uma força de 7 libras, a curvamos sob todos os ângulos sem que fosse necessário aumentar essa força; ao soltá-la ela retomava somente até a quantidade na qual ela havia sido flexionada inicialmente por uma tração de 6 libras, de maneira que o ângulo de reação de flexão encontrou-se modificado de todo ângulo com o qual a havíamos flexionado com uma força maior que 7 libras.

Essas últimas experiências nos trazem de volta aos mesmos resultados que aqueles anteriores. É claro que, para ter uma ideia do que ocorre na flexão dos metais, é necessário distinguir a força elástica das partes integrantes em relação à força de adesão que reúne essas partes entre si; a força elástica depende, como já dissemos, da compressão ou dilatação que as partes integrantes experimentam e é sempre proporcional às trações. Essas partes integrantes não são alteradas pela têmpera nem pelo recozimento, pois acabamos de ver que, nesses estados diferentes, a elasticidade é a mesma sob os mesmos graus de flexão; mas essas partes integrantes são ligadas entre si apenas por um certo grau de adesão que depende provavelmente de suas formas e da porção respectiva dos diferentes fluidos que preenchem seus poros, o que varia de acordo com a têmpera e com o recozimento. No aço temperado rígido e nas boas molas, as moléculas integrantes[340] não podem nem deslizar umas sobre as outras, nem sofrer o menor deslocamento, sem que o corpo se rompa; mas nos corpos maleáveis, nos metais recozidos, essas partes podem deslizar umas sobre as outras e se deslocar, sem que a adesão seja alterada perceptivelmente dessa forma.

O que acabamos de explicar para os metais parece poder se aplicar a todos os corpos; suas partes são sempre de uma elasticidade perfeita, mas os corpos são duros, moles ou fluidos de acordo com a adesão de suas partes integrantes. Caso nos corpos duros elas possam deslizar umas sobre as outras sem que a distância entre elas seja alterada perceptivelmente, o corpo será maleável ou flexível; porém caso elas não possam deslizar umas sobre as outras sem que a distância respectiva entre elas seja alterada perceptivelmente, o corpo se romperá quando a força com a qual o corpo é puxado ou comprimido for igual à adesão.

[339]No original: "dans l'état de trempe et de ressort". Essa expressão também pode ser traduzida por "estado temperado e elástico". Ver também a Nota de rodapé 337 na página 176.

[340] Ver a Nota 333 na página 174. Essa expressão também pode ser traduzida por moléculas (ou partículas ou elementos) constituintes, integrais, individuais ou constitutivas.

Capítulo 8

Observações sobre o Trabalho de 1784 de Coulomb

8.1 Período de Oscilação de um Cilindro

Apresento aqui alguns comentários que ajudam a entender como Coulomb obteve o período de oscilação do cilindro na Seção 7.5. O caso que está sendo estudado está ilustrado na Figura 8.1.

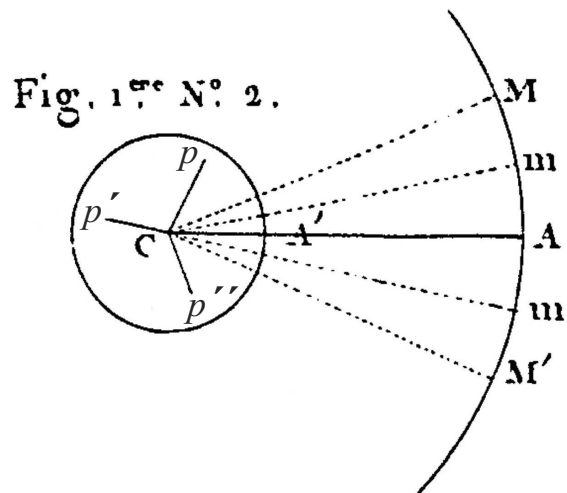



Figura 8.1: Figura 1, Número 2.

A direção $CA'A$ indica o caso em que o fio de torção não está torcido, sendo A' um ponto da circunferência do cilindro. O cilindro juntamente com a parte inferior do fio é girado de um ângulo ACM (esse ângulo é representado por Coulomb pela letra maiúscula A) e solto do repouso. A reta CA' fica então oscilando entre os pontos M e M'. Coulomb representa o ângulo MCm pela letra maiúscula S.

No final da Seção 7.5 Coulomb apresentou a equação de movimento a ser integrada:

$$dt = dS\sqrt{\frac{\int pr^2}{n(2AS - S^2)}} \ . \tag{8.1}$$

Nessa equação t indica o intervalo de tempo para a reta CA' partir de M e chegar ao ponto m, p representa um elemento de massa do cilindro localizado a uma distância r do eixo vertical de rotação passando por C, $\int pr^2$ é o momento de inércia do cilindro, enquanto que n é um coeficiente constante cujo valor dependerá da natureza do fio de metal, de seu comprimento e de sua espessura. Essa grandeza n é chamada de rigidez de torção do fio. Quando o fio está preso pela extremidade superior e sua extremidade inferior é girada de um ângulo θ ao redor do eixo vertical, o fio exerce sobre o cilindro um torque τ de reação dado por dado por $\tau = -n\theta$, sendo $\theta = 0$ a situação em que o fio não está torcido.

Em seguida Coulomb apresentou as seguintes palavras dando o resultado da integração:[341]

> Mais $\frac{dS}{\sqrt{2AS-SS}}$ représente un angle dont A est le rayon & S le sinus verse, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, & qui devient égal à 90 degrés lorsque $S = A$.
>
> Ainsi le temps d'une oscillation entière sera
>
> $$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{n}\right)^{1/2} 180^d \ .$$

O que Coulomb denomina aqui de 180^d é a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.[342] Hoje em dia essa razão é representada pela letra $\pi = 3,14159...$. Logo vou substituir 180^d por π, assim como vou substituir a expressão "90 *graus*" por $\pi/2$.

A letra π usada por Coulomb para representar um elemento de massa na expressão do momento de inércia $\int \pi r^2$ foi substituída na reimpressão das obras de Coulomb em 1884 pela letra p, tal que o momento de inércia fica escrito como $\int pr^2$. Nessa tradução em português estou usando essa letra p adotada por Potier.

Aqui vem a tradução que adotei para esse parágrafo:

> Porém, $dS/\sqrt{(2AS - S^2)}$ representa um ângulo cujo raio é A e S o seno verso,[343] que vai a zero quando $S = 0$, e que torna-se igual a $\pi/2$ quando $S = A$.
>
> Assim o tempo de uma oscilação inteira será
>
> $$T = \pi\sqrt{\frac{\int pr^2}{n}} \ .$$

Nessa Seção 7.5 Coulomb denominou de T ao "tempo de uma oscilação inteira". O que ele chamou de tempo de uma oscilação inteira é quando a linha CA' vai de M para M' na Figura 8.1.

Vou chamar de $T_{1/4}$ ao intervalo de tempo para a reta CA' do cilindro partir do repouso de seu ângulo inicial $S = 0$ até chegar na situação em que o fio não está torcido com $S = A$, ou seja, para a reta CA' partir do ponto M até chegar ao ponto A nessa Figura 8.1. Integrando a Equação (8.1) com o tempo t indo de 0 até $T_{1/4}$ e com o ângulo $MCm = S$ indo de $S = 0$ até $S = MCA = A$ obtém-se:

---

[341] [Coulomb, 1787, pág. 232].

[342] Ver a Introdução de Alfred Potier às obras de Coulomb, [Potier, 1884, págs. x e 13], assim como a página 28 dessa tradução em português.

[343] Parece que por um erro tipográfico faltou o símbolo da integral antes de $dS/\sqrt{(2AS - S^2)}$. A frase deveria ser: "Porém, $\int dS/\sqrt{(2AS - S^2)}$ representa um ângulo cujo raio é A e S o seno verso".

$$\int_{t=0}^{T_{1/4}} \sqrt{\frac{n}{\int pr^2}} dt = \int_{S=0}^{A} \frac{dS}{\sqrt{2AS - S^2}} \ . \tag{8.2}$$

O lado esquerdo é dado por:

$$\int_{t=0}^{T_{1/4}} \sqrt{\frac{n}{\int pr^2}} dt = \sqrt{\frac{n}{\int pr^2}} \int_{t=0}^{T_{1/4}} dt = \sqrt{\frac{n}{\int pr^2}} T_{1/4} \ . \tag{8.3}$$

Já o lado direito é dado por:

$$\int_{S=0}^{A} \frac{dS}{\sqrt{2AS - S^2}} = \int_{S=0}^{A} \frac{dS}{\sqrt{A^2 - (S-A)^2}} = \int_{S=0}^{A} \frac{\frac{dS}{A}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S-A}{A}\right)^2}} \ . \tag{8.4}$$

Definindo a grandeza $\gamma = (S - A)/A$ obtém-se $d\gamma = dS/A$. Logo:

$$\begin{aligned} \int_{S=0}^{A} \frac{dS}{\sqrt{2AS - S^2}} &= \int_{S=0}^{A} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = [\,\text{arcsen}\,\gamma]_{S=0}^{A} = \left[\text{arcsen}\,\frac{S-A}{A}\right]_{S=0}^{A} \\ &= [\,\text{arcsen}\,0 - \text{arcsen}\,(-1)] = \left(0 - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \ . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Igualando as Equações (8.3) e (8.5) obtém-se:

$$\sqrt{\frac{n}{\int pr^2}} T_{1/4} = \frac{\pi}{2} \ . \tag{8.6}$$

O dobro de $T_{1/4}$ fornece o intervalo de tempo para que ocorra o que Coulomb denominou de "tempo de uma oscilação inteira" do cilindro, ou seja, o tempo T para a reta CA' ir de M até M' na Figura 8.1:

$$T_{Coulomb} = 2T_{1/4} = \pi \sqrt{\frac{\int pr^2}{n}} \ . \tag{8.7}$$

Esse resultado da integração da Equação (8.1) foi expresso por Coulomb como:

$$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{n}\right)^{1/2} 180^d \ . \tag{8.8}$$

Já hoje em dia chama-se de período completo de oscilação ao intervalo de tempo entre a partida e a volta ao mesmo ponto, ou seja, para a reta CA' partir do ponto M, chegar ao ponto M' e voltar ao ponto M. Esse intervalo de tempo é dado pelo quádruplo de $T_{1/4}$. Esse período completo de oscilação também é representado hoje em dia pela letra T:

$$T_{moderno} = 4T_{1/4} = 2\pi \sqrt{\frac{\int pr^2}{n}} \ . \tag{8.9}$$

8.2 Torque Proporcional à Quarta Potência do Diâmetro do Fio Metálico

Vou detalhar aqui um pouco melhor como Coulomb concluiu teoricamente que o torque exercido pelo fio deve ser proporcional à quarta potência do diâmetro.[344]

Na Seção 7.13 Coulomb apresentou três motivos independentes pelos quais, supondo fios do mesmo material e de mesmo comprimento, o torque deve crescer com o aumento do diâmetro D do fio, a saber:

1. A quantidade de matéria (ou seja, o número de partes esticadas, na terminologia de Coulomb) é proporcional à área da seção reta do fio, ou seja, proporcional a D^2.

2. A extensão média das partes esticadas do fio[345] é proporcional ao diâmetro D.

3. O braço médio da alavanca em relação ao eixo de rotação também é proporcional ao diâmetro D.

Combinando essas três maneiras independentes, Coulomb concluiu que o torque τ exercido pelo fio deve ser proporcional a D^4.

O primeiro item é claro já que a massa M de um fio cilíndrico de comprimento L, diâmetro D e densidade volumétrica de massa δ é dada por $M = \delta\pi(D/2)^2L$. Ou seja, M é proporcional a D^2.

Em relação ao segundo item, quando Coulomb menciona a extensão média das partes do fio, ele está se referindo à distância horizontal de deslocamento ou extensão do fio quando ele é torcido de um ângulo ψ em relação ao eixo vertical. Um elemento de massa dm a uma distância ρ do eixo de rotação desloca-se de uma distância $s = \rho\psi$ quando o fio gira de um ângulo ψ. Vamos imaginar um disco homogêneo de espessura dz, raio R, densidade volumétrica de massa δ e massa $M = \delta\pi R^2 dz$. O elemento de massa pode ser escrito como $dm = \delta\rho d\varphi d\rho dz$ utilizando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z). O deslocamento médio $\bar{s}$ de todos os elementos de massa quando esse disco gira de um ângulo ψ é então dado por:

$$\bar{s} = \frac{\int\int sdm}{M} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}(\rho\psi\cdot\delta\rho d\varphi d\rho dz)}{\delta\pi R^2 dz} = \frac{2\psi\int_{\rho=0}^{R}\rho^2 d\rho}{R^2} = \frac{2R\psi}{3} = \frac{D\psi}{3} \ . \tag{8.10}$$

Ou seja, o deslocamento médio é proporcional ao diâmetro D, como afirmado por Coulomb.

Em relação ao terceiro item, conclui-se da mesma maneira que o braço médio da alavanca $\bar{\rho}$ em relação ao eixo vertical de rotação é dado por:

$$\bar{\rho} = \frac{\int\int \rho dm}{M} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}(\rho\cdot\delta\rho d\varphi d\rho dz)}{\delta\pi R^2 dz} = \frac{2\int_{\rho=0}^{R}\rho^2 d\rho}{R^2} = \frac{2R}{3} = \frac{D}{3} \ . \tag{8.11}$$

Novamente vem que esse braço médio da alavanca é proporcional ao diâmetro D do fio, como afirmado por Coulomb.

Suponha que temos dois fios do mesmo material, mesmo comprimento, torcidos de um mesmo ângulo, mas com diâmetros D_1 e D_2. Nesse caso a razão entre os torques τ_1 e τ_2 exercidos por eles é dada por:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 \ . \tag{8.12}$$

[344][Gillmor, 1971a, pág. 156].

[345]Ou das partículas do fio, de acordo com Gillmor, [Gillmor, 1971a, pág. 156].

Capítulo 9

Descrição de uma Bússola cuja Agulha é Suspensa por um Fio de Seda

Por Coulomb[346]

Em um Suplemento às pesquisas sobre as agulhas imantadas, impresso no volume XI dos *Savans étrangers*, descrevi na *página* 215 uma bússola suspensa por um fio de seda destinada a determinar as variações diurnas [do magnetismo terrestre].[347] Aquela que apresento hoje é construída de acordo com os mesmos princípios; mas ela é mais simples em sua construção e mais cômoda de ser usada.

Devemos lembrar que está provado na *página 205 e seguintes* da Memória que acabo de citar,[348] que ao levar em conta as precauções que lá foram indicadas, a força de torção de um fio de seda só pode influenciar de uma maneira imperceptível sobre a direção de uma agulha imantada suspensa por esse fio.

Está igualmente provado na *página 209 e seguintes*,[349] que a resistência do ar não influencia a direção da agulha, ou apenas a influencia por uma quantidade que podemos desprezar.

Enfim, está demonstrado, *página 221 e seguintes* dessa mesma Memória,[350] que quando uma lâmina imantada está suspensa horizontalmente, se traçarmos uma linha qualquer sobre essa lâmina, e se observarmos a direção dessa linha, antes e após a inversão da lâmina,[351] a direção da linha meridiana magnética dividirá em duas partes iguais o ângulo formado entre as duas direções observadas.

A *primeira Figura* representa em perspectiva todas as partes de nossa nova bússola.

---

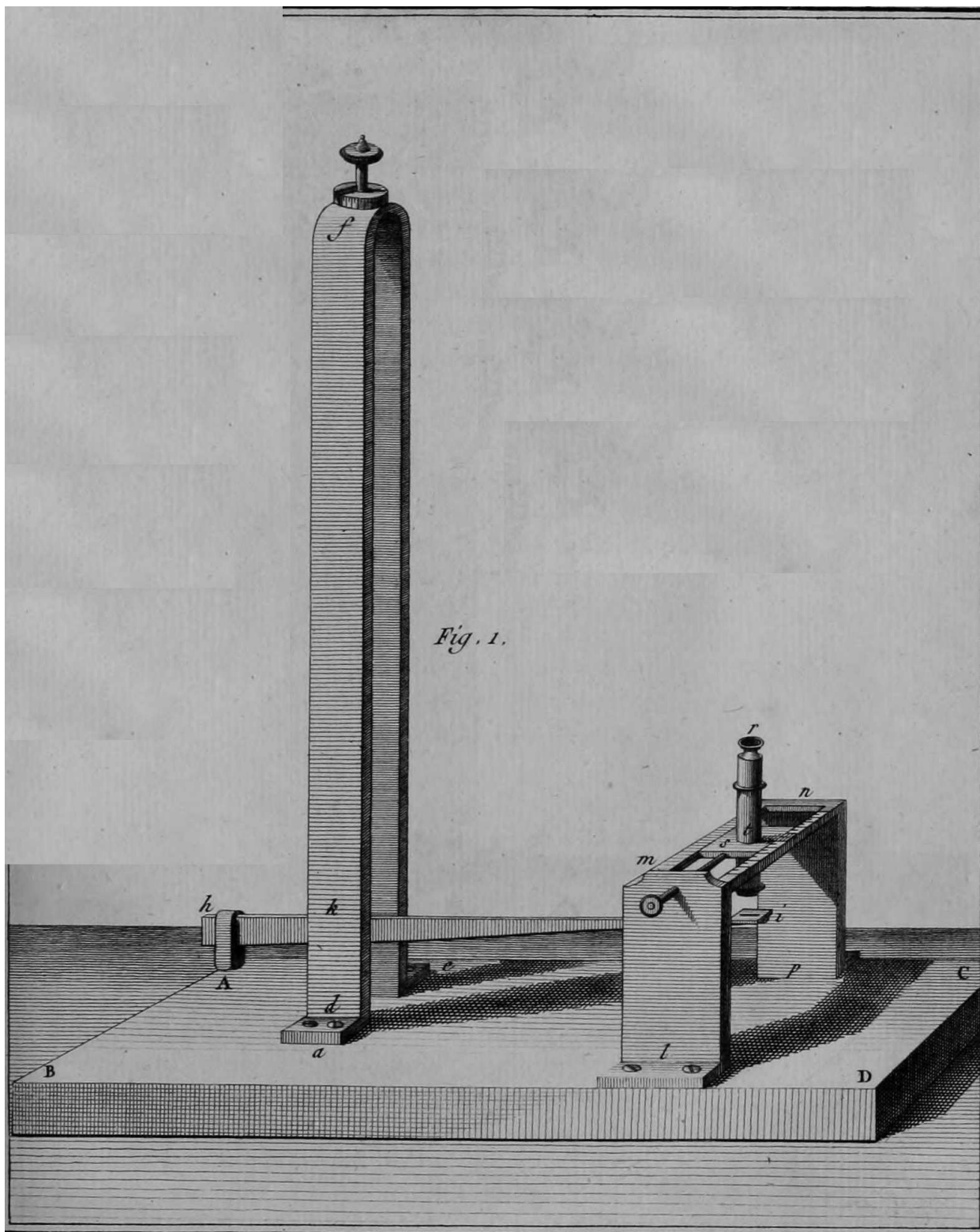
[346] Esse trabalho foi apresentado em 1785 na Academia de Ciências da França e publicado em 1788, [Coulomb, 1788a]. Ele não foi incluído na obra de Potier contendo as Memórias de Coulomb, [Potier, 1884].

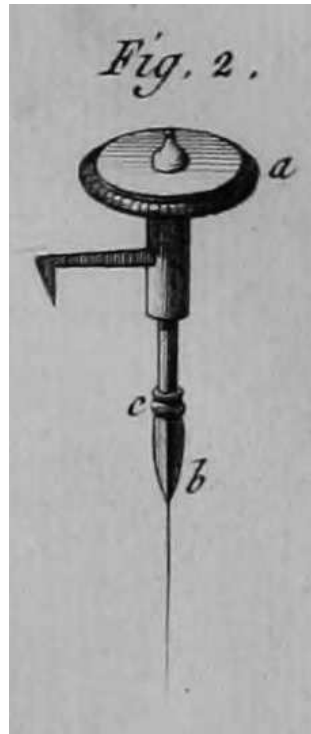
[347] [Coulomb, 1780, pág. 215]. Esse trabalho foi publicado no volume IX e não no volume XI como mencionado aqui por Coulomb. Ele está traduzido no Capítulo 5, ver em especial a Seção 5.4 na página 94.

[348] Correspondentes às páginas 85 e seguintes dessa tradução.

[349] Correspondentes às páginas 88 e seguintes dessa tradução.

[350] Correspondentes às páginas 100 e seguintes dessa tradução. Ver, em particular, o Artigo 63 na página 101.

[351] Nessa inversão a face da lâmina que estava do lado debaixo passa a ficar do lado de cima, ver a Figura 15 na página 102.

$ABCD$ é um bloco de pedra esculpido em ângulos retos e que serve de apoio para a bússola. Essa pedra tem vinte e quatro polegadas de comprimento [65,0 cm], nove polegadas de largura [24,4 cm] e de quatro a cinco polegadas de espessura [10,8 a 13,5 cm]. O longo lado BD é colocado aproximadamente ao longo da direção do meridiano magnético do local onde são feitas as observações. A dez polegadas [27,1 cm] de distância do lado AB, fixamos

em ae paralelamente a esse lado AB, uma lâmina de cobre vermelho[352] de dezoito linhas de largura [4,1 cm], de cinco polegadas [13,5 cm] de comprimento e de duas a três linhas [0,45 a 0,68 cm] de espessura. Essa lâmina é encravada e cimentada em um entalhe feito na pedra. Sobre essa placa eleva-se perpendicularmente uma forquilha df,[353] fixada sobre a primeira placa de cobre por seus engates da através dos parafusos que vemos na Figura. Na parte superior dessa forquilha, em f, está a pinça de suspensão[354] que vemos em detalhe na segunda Figura.[355]

O botão a serve para girar essa pinça; em b temos a fenda na qual é inserido o fio de suspensão; em c temos o anel que aperta a pinça. Em f, *Figura 1*, no alto da forquilha, colocamos um pequeno círculo horizontal cujo centro corresponde ao centro do buraco da pinça, esse círculo está dividido em graus e servirá, se quisermos, para conhecermos de quanto um dado ângulo de torção pode afastar a agulha de seu meridiano magnético.[356]

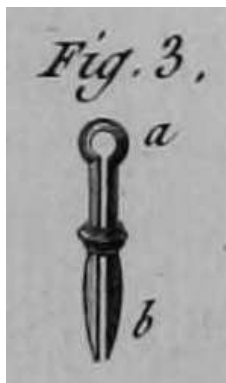
A *Figura 3* representa uma segunda pinça suspensa ao fio de seda por sua parte superior a e que, por sua parte inferior b, prende a agulha imantada que, dessa maneira, encontra-se suspensa de lado.

[352]No original: *cuivre rouge*. Essa expressão pode ser traduzida como cobre cru, cobre puro ou cobre vermelho.

[353]No original: *fourchette*. Essa palavra também pode ser traduzida como garfo ou bifurcação.

[354]No original: *pince de suspension*. Ver também a Nota de rodapé 288 na página 151.

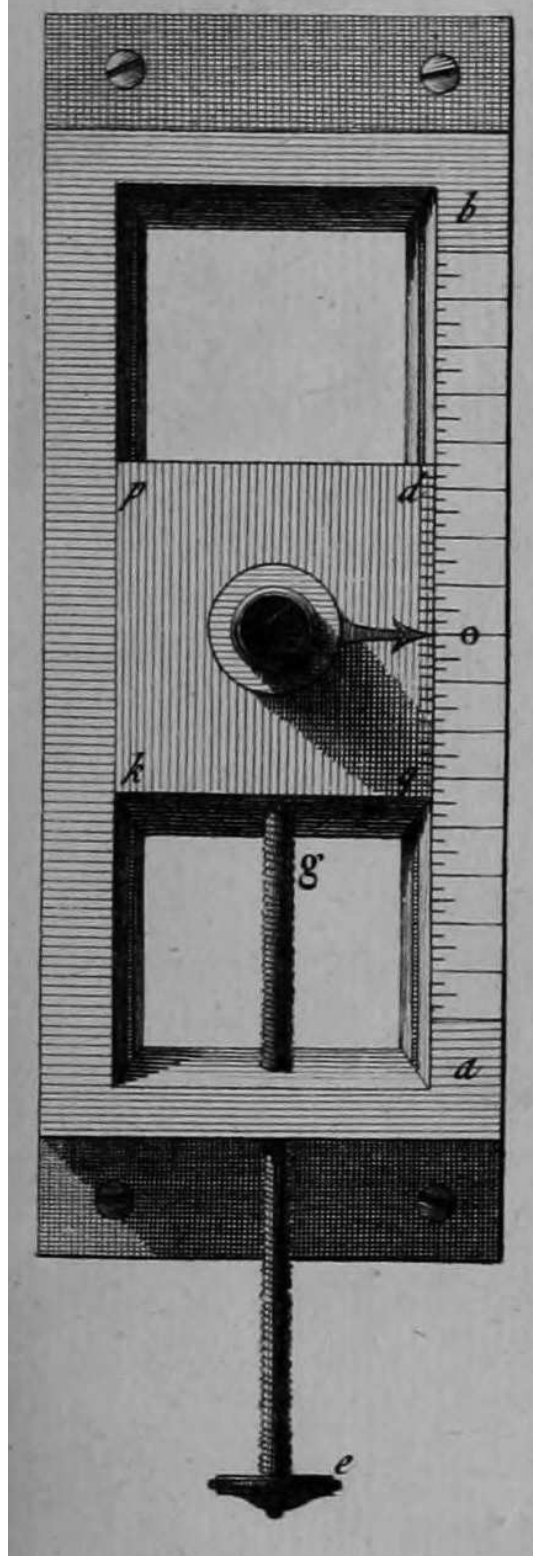
[355]Essa pinça de suspensão mostrada na Figura 2 funciona como um micrômetro. Esse micrômetro é o botão a que tem preso a ele a seta indicadora horizontal. Fixado na parte inferior do micrômetro há uma pinça com uma fenda em b na qual é presa a parte superior do fio vertical através do anel c que aperta a pinça. Ao girar o micrômetro, o fio gira com ele e a seta indicadora é deslocada ao redor de uma escala graduada em graus, com essa escala fixa no laboratório indo de zero grau até 360°. Com isso é possível medir o ângulo de torção da parte superior do fio preso ao micrômetro.

[356]O círculo divido em graus fica fixo no laboratório. Quando girarmos o botão da pinça, o ponteiro ligado a ela também gira, indicando assim de quantos graus foi torcida a parte superior do fio de suspensão.

A agulha imantada está representada na *Figura 1* em hi. Ela tem seis polegadas de comprimento [16,2 cm] desde h até k, onde está seu ponto de suspensão, e doze polegas [32,5 cm] desde esse ponto k, até sua outra extremidade i; de maneira que ela tem um comprimento total de dezoito polegadas [48,7 cm]. Em h há um anel deslizante que serve de contrapeso para colocar a agulha em uma posição horizontal; em i há uma pequena placa de prata soldada horizontalmente acima da agulha, e sobre a qual fazemos um traço na direção hi, que representa o centro da espessura da agulha. Essa agulha deve ser de um bom aço, bem rígido, temperado inicialmente de maneira bem abrupta e trazido de volta à consistência de mola. Em seguida, imantada pelo método de toque duplo,[357] podemos lhe fornecer outras dimensões diferentes daquelas que acabo de indicar, desde que proporcionemos a força do fio de suspensão a seu peso.[358] Aquela que utilizo tem dez linhas de largura [2,26 cm] na extremidade h, três linhas [0,68 cm] na extremidade i e três quartos de linha [0,17 cm] de espessura uniformemente [ao longo de seu comprimento].

Para observar a variação dessa agulha,[359] utilizamos, *Figura 1*, do micrômetro $lmnpq$ de cobre vermelho. Ele é composto de um apoio lp; de duas travessas verticais lm e pn; de uma armação horizontal nm; e de um cursor s que tem em seu centro uma luneta microscópica com duas lentes rt. O foco dessa luneta microscópica é colocado a doze polegadas [32,5 cm] de distância do fio de suspensão fk. A armação mn do micrômetro está representada em detalhe e vista de cima na *Figura 4*.

[357] Ver a Seção 4.6.

[358] Ou seja, desde que o fio de suspensão tenha uma força de tração proporcional ao peso da agulha imantada, para aguentar seu peso.

[359] Isto é, a mudança de orientação dessa agulha ao longo do dia devido à variação do magnetismo terrestre.

Vemos que o lado *ab* dessa armação está dividido de cada lado, a partir de seu centro *o*, em oito partes iguais, nas quais as duas ou três [partes] iniciais de cada lado representam

os graus, já que o arco, o seno e a tangente se confundem nos primeiros graus.[360] Cada um desses graus está dividido em quatro partes que, consequentemente, são iguais a quinze minutos cada uma delas.

Cada lado *od* e *oq* do cursor corresponde a três graus e meio, e está dividido em quinze partes, consequentemente, cada parte é igual a quatorze minutos, ou seja, difere de um minuto de cada divisão da armação, sendo que isso forma um nônio[361] que mede os minutos. Como nas variações diurnas a agulha raramente realiza movimentos com mais de trinta minutos, podemos sem erro perceptível nas observações considerar as divisões como sendo graus. Contudo, caso as variações fossem consideráveis desde o início das observações, ela teria chegado a dois ou três graus de distância da primeira divisão *o*, [nesse caso] poderíamos, caso quiséssemos uma maior precisão, calcular as variações angulares de acordo com as medidas fornecidas pela tangente dividida aqui em partes iguais.

A luneta microscópica possui dois fios de seda muito finos cruzados em seu foco. É necessário girar essa luneta que serve para observar a linha da agulha em *i*, de maneira que essa linha passe no foco da luneta, seguindo o alinhamento de um dos fios: fazemos com que o cursor (*Figura 4*) *qkpd* siga os movimentos da agulha, por meio de um parafuso *eg*, e de um sulco chanfrado nas laterais interiores da armação, sendo que o cursor desliza nessa ranhura.

Não estenderei essa descrição, ainda mais porque as proporções da maioria das partes dessa bússola, sendo modificadas durante a execução, não alteram seu efeito, desde que a mobilidade da agulha continue a mesma.

Os fios de seda não necessitam de qualquer preparação. Os reunimos ao colocar vários casulos em água fervente, desenrolando-os na cruzada, como praticamos nas manufaturas, ou somente amassando-os entre os dedos ao sair da água fervente. Embora a força de cada fio varie muito, raramente ela é menor do que oitenta grãos;[362] mas na prática, após sua reunião, só se pode contar com uma força de cinquenta grãos [2,7 g] para cada um deles. Se quisermos, podemos substituir a água fervente, reunindo vários fios de seda mergulhando-os em água gomada. Embora eles adquiram dessa forma um pouco mais de rigidez do que pelo primeiro método, essa rigidez não é tão considerável para deslocar perceptivelmente a agulha.

Antes de colocar nossa agulha [imantada] na pinça de suspensão *ab*, *Figura 3*, é necessário, como afirmamos na Memória já citada, inicialmente suspender nessa pinça uma lâmina de chumbo ou de cobre, que possa girar na forquilha de suspensão, e que tenha absolutamente o mesmo peso que a agulha que vai substituí-la depois que o primeiro corpo suspenso, tendo parado naturalmente aproximadamente ao longo do meridiano magnético, avisa que não há mais qualquer força de torção na suspensão.

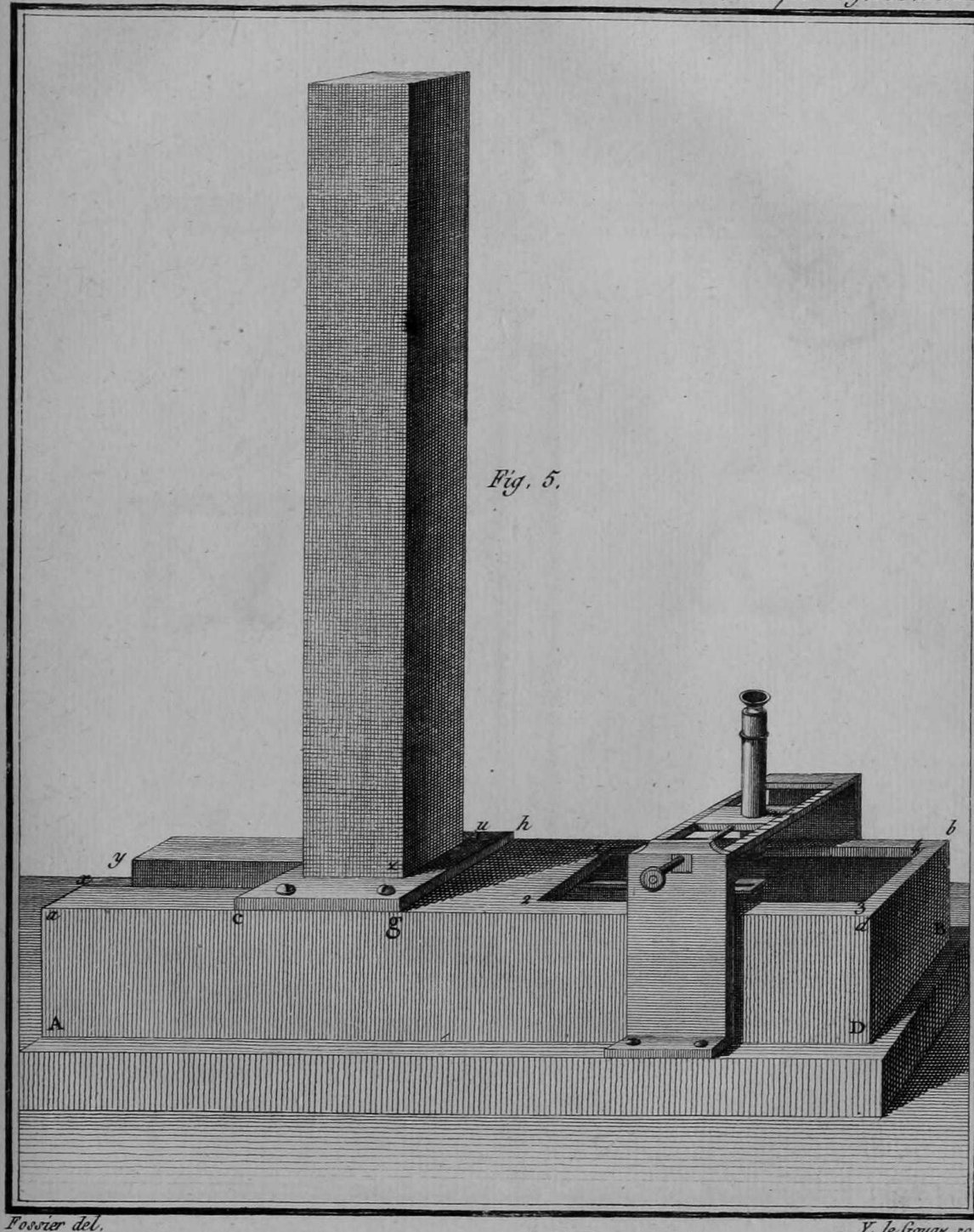
A forquilha, *Figura 1*, terá dezoito polegadas de altura [48,7 cm]. Essa altura é suficiente para dar ao fio de suspensão de doze a quinze polegadas de comprimento [35,5 a 40,6 cm].

Todas as partes que acabamos de descrever são aquelas que constituem fundamentalmente a bússola. Porém, a grande sensibilidade da agulha assim suspensa, tornaria impraticável toda observação, caso essa agulha esteja descoberta e exposta a todos os movimentos do ar no local onde são feitas as observações. A caixa [representada na] *Figura 5* nos pareceu na prática bem cômoda para cobrir nossa bússola.

---

[360]Isto é, supondo um ângulo θ expresso em radianos, temos $\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$ quando $\theta \ll 1$ radiano, isto é, quando $\theta \ll 57,3°$.

[361]Ver a Nota de rodapé 191 na página 97.

[362]Isto é, um fio de seda em geral suporta pelo menos 80 grãos = 4,25 gramas sem se romper.

Ela é construída de maneira que podemos, quando há qualquer coisa a restaurar, des-

montá-la e remontá-la sem tocar em quaisquer partes da bússola. Essa caixa é formada, *Figura 5*, de duas peças. A primeira $AadDBbC$ tem vinte e duas polegadas de comprimento, cinco polegadas e meia de largura e quatro polegadas de altura [59,6 cm, 14,9 cm e 10,8 cm, respectivamente]. Ela é completamente aberta no seu fundo, sua tampa é aberta na parte bd para colocar aí um vidro 1234 através do qual devemos observar a agulha. A outra extremidade ac da caixa é recuada em xy, até zu, cerca de nove polegadas de comprimento [24,3 cm]. É nesse recuo que se encontra colocada a forquilha df da *Figura 4*, quando deslizamos essa caixa abaixo do micrômetro, de maneira que a extremidade ac, *Figura 5*, ultrapasse de uma polegada [2,7 cm] a extremidade h da agulha da *Figura 1*.

A parte superior da forquilha é recoberta por uma segunda caixa, *Figura 5*, que tem três polegadas e meia [9,5 cm] de largura de todos os lados, com uma altura de dezoito a vinte polegadas [48,7 a 54,1 cm], e que por meio da armação cgh, que termina sua parte inferior, se liga por quatro parafusos sobre a tampa ab. Quando a bússola está coberta dessa maneira pela caixa, conectamos o entalhe com duas pequenas réguas, em seguida colamos papel sobre todas as juntas para impedir que o ar penetre na caixa.

Pode-se entender, assim como está provado na Memória já citada, que de acordo com o tipo de suspensão que utilizamos para nossa agulha, ela possui uma grande mobilidade, que ela responde facilmente à menor ação, que a menor trepidação a coloca em oscilação, o que exige precauções por parte do observador. Contudo, poderíamos diminuir em grande parte essa mobilidade pelo seguinte método. Soldamos, *Figura 1*, sob a agulha e seguindo seu plano, uma lâmina de cobre ou de prata, bem leve, de três ou quatro polegadas de altura [8,1 ou 10,8 cm], com um quarto de linha de espessura [0,057 cm]; seu comprimento poderia ser de oito ou dez linhas [1,8 ou 2,3 cm] somente na sua parte superior, onde ela se liga à agulha; mas ela iria aumentando em sua parte inferior, onde ela teria de três a quatro polegadas. Afundaríamos essa lâmina em um recipiente cheio de água, colocado sob a agulha, mas que lhe permita total liberdade de seus movimentos. Por meio de um pequeno tubo, manteríamos a água do recipiente sempre no mesmo nível. Vimos no *volume de 1784 da Academia*,[363] por meio de experiências que parecem decisivas, que a coesão da água contra os corpos não poderia influenciar sobre suas posições, quando eles chegassem ao estado de repouso. Assim, resulta dessas experiências e da construção anterior que a lâmina de cobre, mergulhada na água, vai parar rapidamente as oscilações da agulha, sem alterar a direção [da agulha ao longo] do meridiano magnético. Poderíamos soldar um segundo plano de cobre vertical, perpendicularmente ao primeiro [plano], ou ao plano da agulha. Esses dois planos parariam muito rapidamente em todos os sentidos os diferentes movimentos da agulha. Porém, embora o meio anterior deva diminuir sensivelmente os inconvenientes [que surgem] da grande mobilidade devida à nossa suspensão, não se devem desprezar algumas outras precauções que podem facilitar as observações. Isso é o que me determinou a fixar de uma maneira invariável todas as partes de minha bússola sobre uma pedra bem pesada, a separar completamente o micrômetro da forquilha de suspensão, de maneira que ao girar devagar o parafuso do micrômetro, não possa resultar qualquer movimento na agulha. Devemos colocar, se possível, essa agulha em um andar térreo, ou ao menos em uma abóbada de um edifício muito sólido, e que essa localização seja tal que as diferentes partes da caixa não possam adquirir diferentes graus de temperatura; já que de outra forma serão formadas correntes circulares de ar que vão deslocar e colocar a agulha em oscilação.

Enfim, no momento da observação é necessário se aproximar devagar do topo da bússola, e trazer de volta ligeiramente por meio do parafuso do micrômetro, o foco da luneta mi-

[363] [Coulomb, 1787]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 7.

croscópica, sobre a linha da agulha.

Porém, se apesar de todas essas precauções, ocorrer algumas vezes de no momento da observação encontrarmos a agulha em movimento, esse movimento deve ser ocasionado pelo estado mais ou menos elétrico, pela posição ou pela temperatura dos diferentes corpos, ou até mesmo pelas massas de ar próximas à agulha. Nesse caso, não se pode confiar nas observações, estando a força magnética provavelmente alterada por forças estranhas ao magnetismo. Sem que haja essa perturbação, seria bem fácil determinar a verdadeira posição da agulha em oscilação, ao medir por meio do micrômetro a amplitude total da oscilação; a metade dessa amplitude forneceria a verdadeira posição da agulha, quando ela terminasse de oscilar.[364]

Depois das observações anteriores, que informam que as agulhas são algumas vezes agitadas por forças estranhas ao magnetismo, propus, em 1778, ter sempre em observação duas agulhas absolutamente semelhantes, mas cujas forças magnéticas fossem bem diferentes, na razão, por exemplo, de 4 para 1, o que pode ser facilmente determinado pelo número de oscilações. Quando as forças estranhas ao magnetismo atuarem sobre essas agulhas, aquela que estiver mais fracamente magnetizada, será deslocada na razão inversa da força diretriz.[365]

Não irei comparar essa nova suspensão com a suspensão feita por capas sobre pivôs,[366] das quais já detalhei uma parte dos defeitos em 1777, no *volume IX dos Savans étrangers*.[367,368,369]

9.1 Determinação do Meridiano Magnético

A bússola destinada a determinar o meridiano magnético é construída de acordo com os mesmos princípios que aquela que acabamos de descrever; porém sua agulha que tem dezoito polegadas de comprimento [48,7 cm], possui a mesma largura e a mesma espessura em todo seu comprimento. A suspendemos por seu centro, como podemos ver na *Figura 6*.

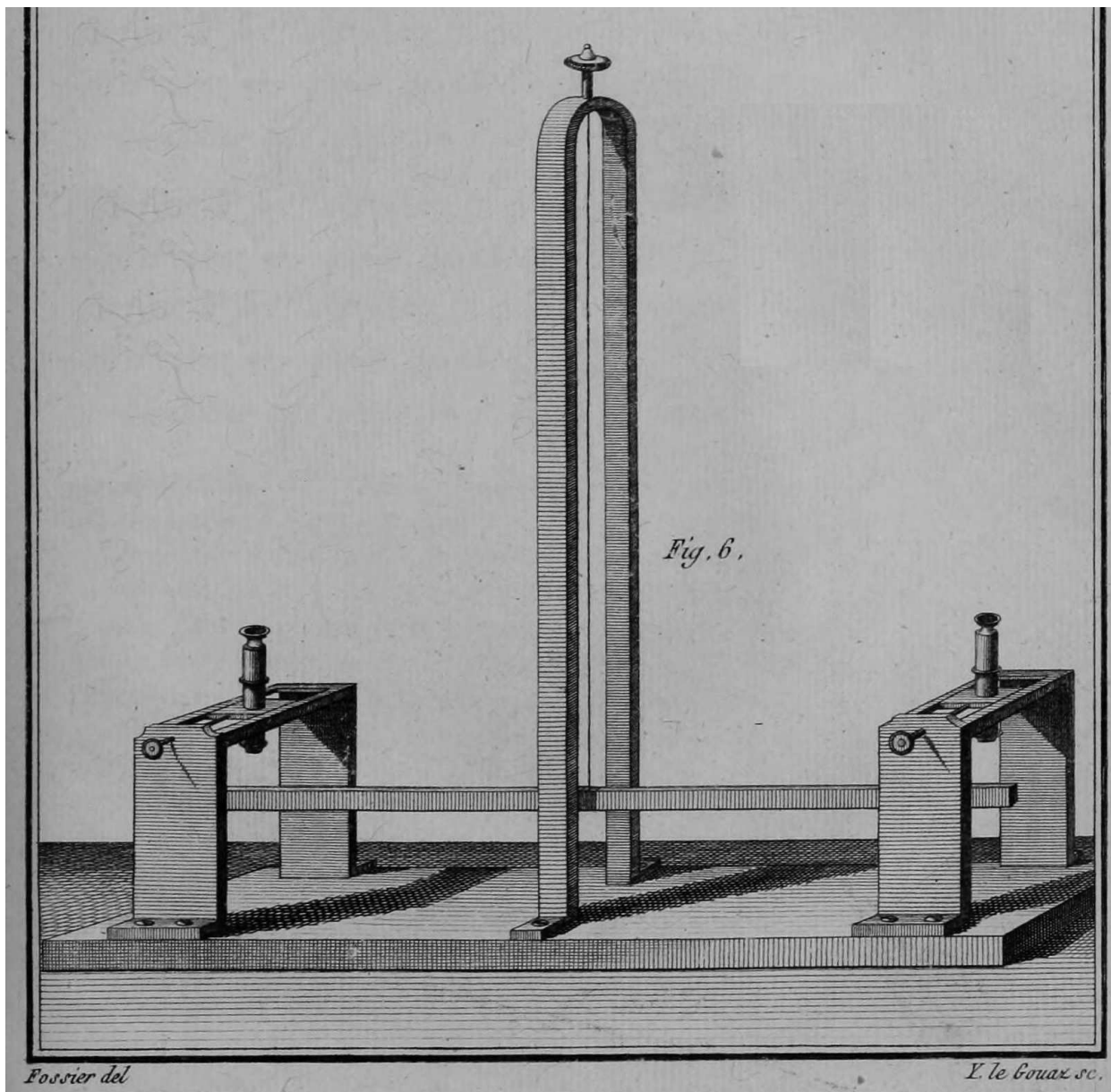
[364]Ou seja, a direção ao longo da linha média entre as extremidades do movimento oscilatório forneceria o meridiano magnético do local.

[365]Ou seja, quanto maior for a intensidade magnética da agulha, menos ela ficará deslocada em relação ao meridiano magnético devido às forças não magnéticas.

[366]Ver a Nota de rodapé 108 na página 54.

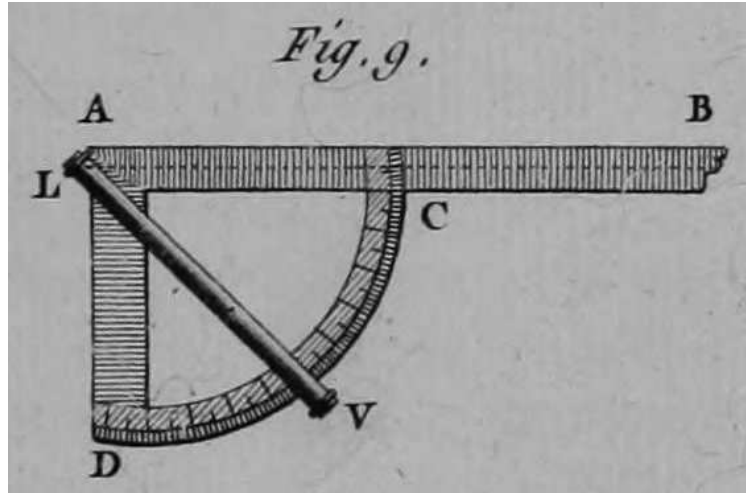
[367][Coulomb, 1780]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 5.

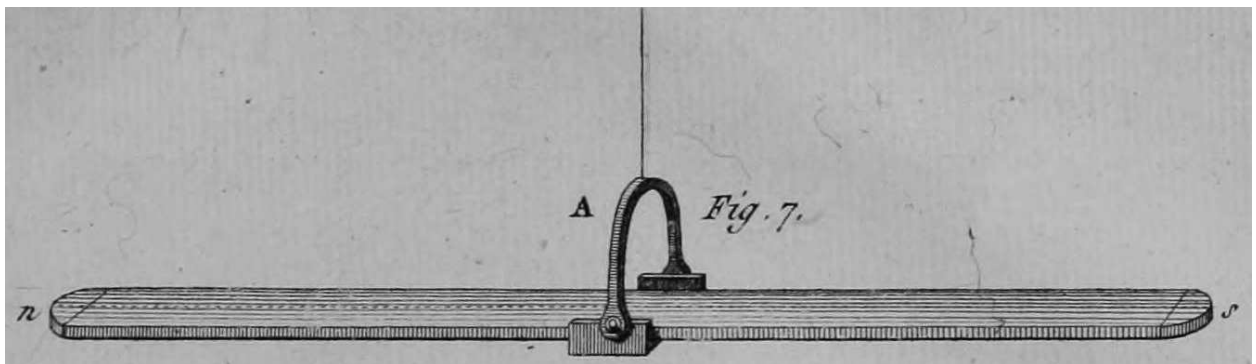
[368][Nota de Coulomb:] O Sr. de Cassini tem utilizado por muitos anos bússolas construídas de acordo com os princípios que acabo de expor para observar as variações diurnas. Todos os anos ele relata o resultado de suas observações e as precauções que toma para se assegurar de sua exatidão. Acreditei ser necessário suspender a publicação dessa Memória até o momento em que o trabalho de um observador tão inteligente tivesse assegurado o sucesso da bússola que acabo de descrever e tivesse escolhido a maneira de usá-la.

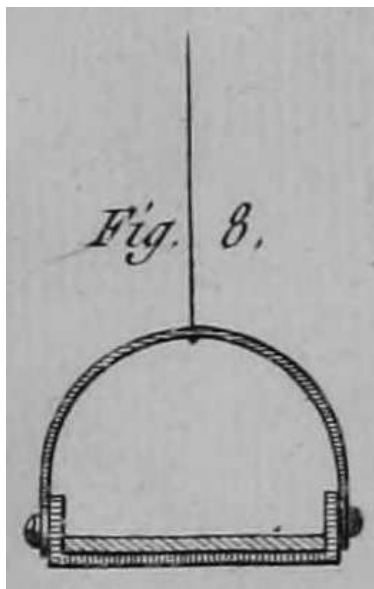
[369]Jean-Dominique Cassini de Thury (1748-1845).

É necessário que ela esteja perfeitamente ereta e suspensa por seu lado bem verticalmente: pelo centro de sua espessura, traçamos uma linha de uma extremidade à outra, e observamos as duas extremidades dessa linha por meio de dois micrômetros, como indica a *Figura 6*.

Como nossa agulha tem por toda parte uma mesma espessura muito pequena, como a supomos bem ereta e que ela está suspensa de lado, o plano que divide sua espessura, visto verticalmente pela linha traçada sobre seu lado, estará muito próximo do meridiano magnético. Assim os dois focos dos microscópios estarão, após a observação, ao longo dessa linha meridiana. Logo, esticando um fio de prata sob esses dois focos, após ter retirado a agulha, e prolongando esse fio de prata até uma linha meridiana[370] traçada no local da observação, será fácil determinar o ângulo que o fio de prata prolongado vai formar com esse meridiano e, consequentemente, será fácil obter o ângulo do meridiano [geográfico] com o meridiano magnético. Ao invés dessa operação gráfica, podemos utilizar vantajosamente

[370]Ou seja, a linha meridiana geográfica local, que é parte do semicírculo máximo que contém os polos de rotação da Terra em relação ao conjunto das estrelas fixas.

um quadrante[371] $BACD$, *Figura 9*, sobre o qual o traço da primeira divisão dividirá ao meio o ramo AB; ultrapassando esse ramo o limite do quadrante de um comprimento CB com dois ou três pés [65,0 ou 97,4 cm]. Deslizaremos esse ramo sob os microscópios, de maneira que a linha AB corresponda aos dois focos: estando o [plano do] quadrante colocado horizontalmente, por meio da luneta LV, haverá um ponto no horizonte, cujo rumo[372] será determinado em relação ao local onde fazemos a observação.

9.2 Comentário

Como, na prática, é bem difícil obter uma lâmina de aço pouco espessa, que seja perfeitamente ereta, podemos, se quisermos, utilizar uma agulha [imantada] (*Figura 7*) suspensa horizontalmente em um suporte A, que vemos em perfil na *Figura 8*.

[371]No original: *secteur*. Essa palavra refere-se ao setor angular do quadrante.

[372]No original: *gisement*. O rumo aqui refere-se ao ângulo que essa direção do meridiano magnético forma com a direção do Norte geográfico.

Nas duas extremidades da lâmina são soldados dois pequenos aneis n e s de prata ou de cobre. Esticamos um fio muito fino de seda ou de prata de n até s, observamos sua direção por meio dos dois micrômetros antes e após ter invertido a agulha: a metade da diferença das duas direções observadas determinará o meridiano magnético.[373]

[373]Ou seja, observa-se a direção do fio de seda com a lâmina imantada orientada como vista na Figura 7. Em seguida a agulha é invertida com sua face inferior passando a ficar do lado de cima. Aguarda-se que a lâmina fique em repouso e observa-se novamente a direção do fio de seda. A reta traçada no meio dessas duas direções vai indicar o meridiano magnético.

Capítulo 10

Primeira Memória sobre Eletricidade e Magnetismo: Construção e Uso de uma Balança Elétrica, Baseada na Propriedade que os Fios de Metal Possuem de Exercer um Torque Proporcional ao Ângulo de Torção

Por Coulomb[374]

Em uma Memória apresentada à Academia em 1784,[375] determinei, de acordo com a experiência, as leis da força de torção[376] de um fio de metal, e encontrei que essa força era proporcional ao ângulo de torção, à quarta potência do diâmetro do fio de suspensão e inversamente proporcional ao seu comprimento, tudo multiplicado por um coeficiente constante que depende da natureza do metal e que pode ser facilmente determinado pela experiência.[377]

Mostrei na mesma Memória que por meio dessa força de torção era possível medir com precisão forças bem pequenas tais como, por exemplo, 1/10.000 de um grão (0,005 dinas).[378] Forneci na mesma Memória uma primeira aplicação dessa teoria, tentando avaliar a força constante atribuída à adesão na fórmula que exprime o atrito da superfície de um corpo sólido em movimento em um fluido.

Apresento hoje diante dos olhos da Academia uma balança elétrica construída de acordo com os mesmos princípios; ela mede com a maior exatidão o estado e a força elétrica de um

---

[374] Esse trabalho foi apresentado em 1785 na Academia de Ciências da França e publicado em 1788, [Coulomb, 1788b], com tradução parcial para o inglês em [Coulomb, 1935a]. Existem traduções completas para o inglês em [Coulomb, 2012a] e para o alemão em [Coulomb, 1890b].

[375] [Coulomb, 1787]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

[376] No original: *force de torsion*. Essa expressão pode ser traduzida por "torque" ou "força de torção".

[377] Coulomb encontrou ainda que essa força de torção não depende da tração a que o fio está sujeito devido a um peso que esteja suportando.

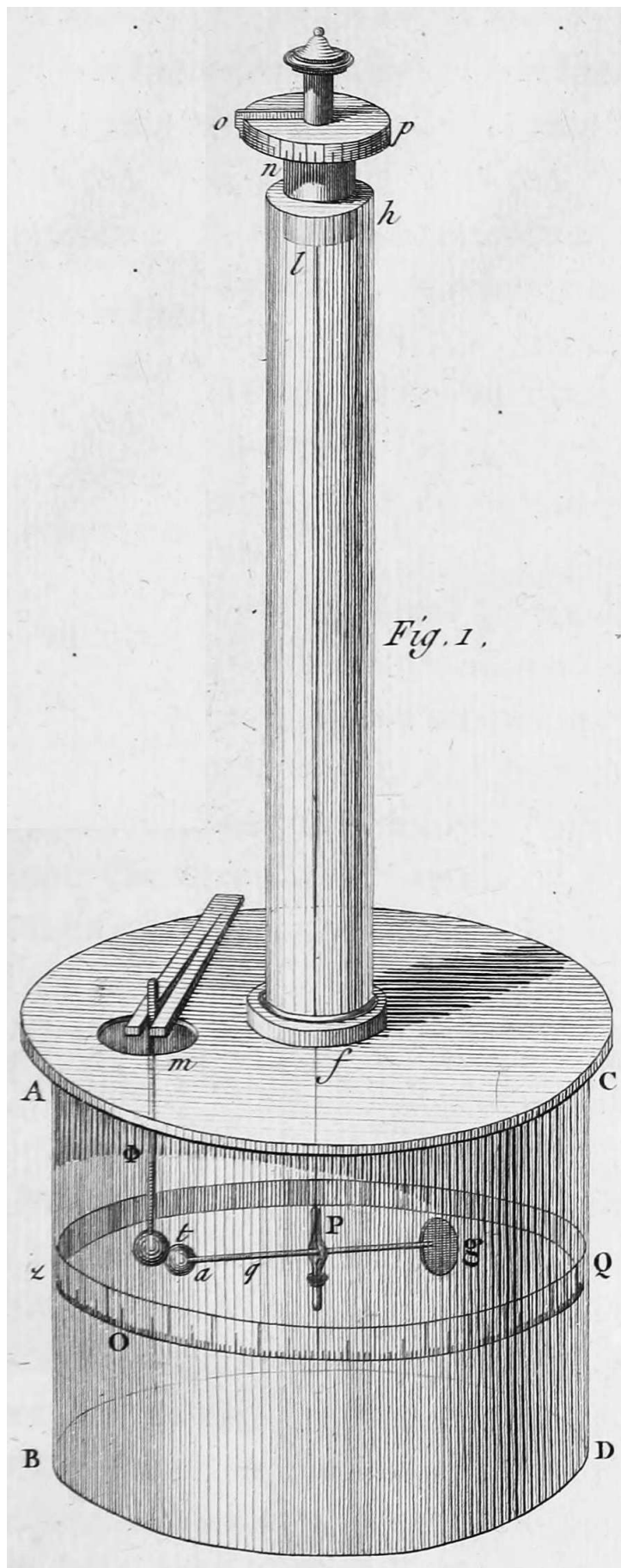
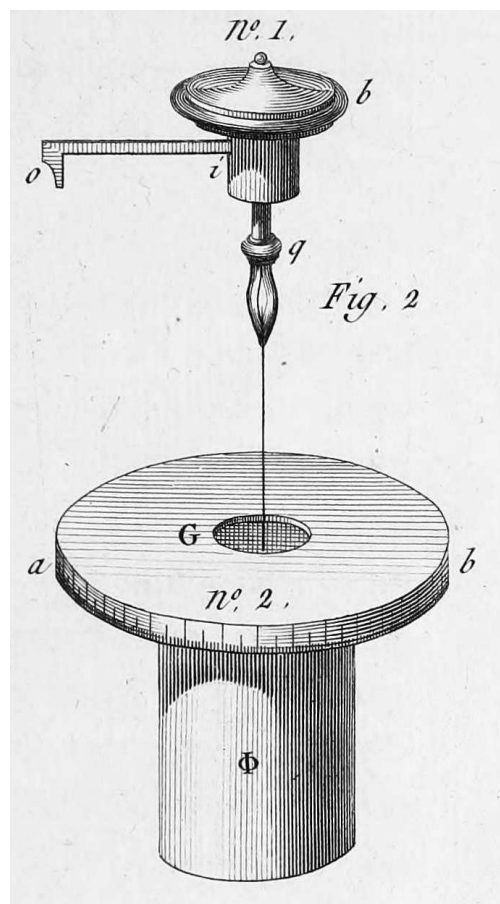
[378] 1 grão $= 0,05311\ g = 5,311 \times 10^{-5}\ kg$. Logo essa balança consegue uma precisão, em termos de uma massa m, da ordem de $m = (1\ grão)/10.000 = 5,3 \times 10^{-9}\ kg$. Supondo a aceleração da gravidade dada por $g = 9,81\ m/s^2$, vem que essa balança consegue uma precisão, em termos de uma força F, da ordem de $F = mg = 5,2 \times 10^{-8}\ N$, ou seja, 0,005 dinas, como calculado por Potier.

corpo, por mais fraco que seja o grau de eletricidade.[379]

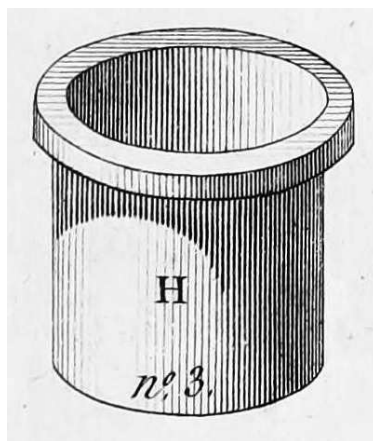
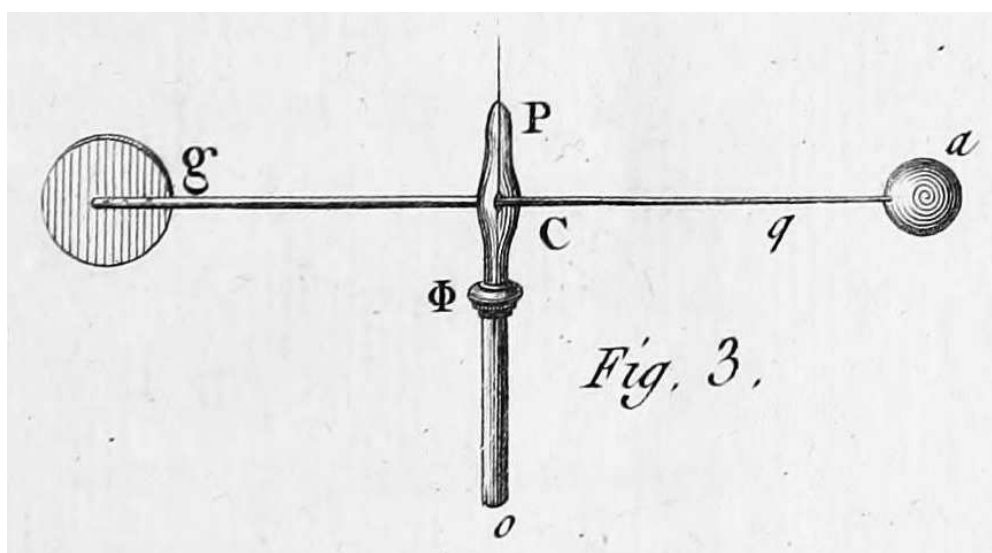
10.1 Construção da Balança

Embora a prática tenha me ensinado que, para executar comodamente várias experiências elétricas, é necessário corrigir alguns defeitos na primeira balança desse tipo que tinha feito, contudo, como até agora essa foi a única que utilizei, apresentarei sua descrição, observando que sua forma e seu tamanho podem e devem ser variados de acordo com a natureza das experiências que desejamos fazer. A Figura 1 representa essa balança em perspectiva, sendo que aqui vão os detalhes.

[379]Isto é, a balança consegue medir forças bem pequenas mesmo com uma baixa eletrização dos corpos que estão interagindo.

o
p
n
h
l
Fig. 1.
m
f
A
C
Φ
P
t
g
z
a
q
Q
O
B
D

Sobre um cilindro de vidro $ABCD$, com 12 polegadas (32,48 cm) de diâmetro e 12 polegadas de altura, coloca-se uma placa de vidro com 13 polegadas de diâmetro que recobre totalmente o recipiente de vidro; essa placa é perfurada por dois furos com 20 linhas (4,51 cm) aproximadamente de diâmetro, um deles no meio [da placa] em f, sobre o qual eleva-se um tubo de vidro com 24 polegadas de altura; esse tubo é cimentado sobre o buraco f, com o cimento em uso nos aparelhos elétricos; na extremidade superior do tubo, em h, coloca-se um micrômetro de torção que vemos em detalhes na Figura 2.[380]

A parte superior [da Figura 2], Número 1, tem o botão b, o indicador io e a pinça de suspensão q;[381] essa peça entra no buraco G da peça Número 2 [da Figura 2]; essa peça Número 2 é formada de um círculo ab dividido na sua borda em 360° e de um tubo de cobre Φ que entra no tubo H, [da Figura 2], Número 3, soldado no interior da extremidade superior do tubo ou da haste fh de vidro da Figura 1.

[380]Ver a Nota de rodapé 355 na página 185.

[381]No original: *pince de suspension*. Ver ainda a Nota de rodapé 288 na página 151.

A pinça q (Figura 2, Número 1) tem aproximadamente a forma da extremidade de um tira-linhas[382] sólido que pode ser apertado por meio do anel q; é na pinça desse tira-linhas que é presa a extremidade [superior] de um fio de prata muito fino; a outra extremidade do fio de prata é presa (Figura 3) em P pela pinça de um cilindro Po de cobre ou de ferro, cujo diâmetro tem apenas 1 linha (0,22 cm), e cuja extremidade P é fendida e forma uma pinça que se prende por meio do anel deslizante Φ.

Esse pequeno cilindro é saliente e perfurado em C, para permitir deslizar a agulha ag através dele (Figura 1); é necessário que o peso desse pequeno cilindro seja bem considerável para esticar o fio de prata sem rompê-lo. A agulha que vemos em ag (Figura 1), suspensa horizontalmente aproximadamente no ponto médio da altura do grande recipiente que a contém, é formada, ou de um fio de seda revestido de cera da Espanha[383] ou de uma palha

[382]No original: *porte-crayon*. É um instrumento para desenho técnico no qual há um parafuso na ponta que une as lâminas e que permite ajustar a espessura da linha que é traçada. Essa expressão também pode ser traduzida por estojo, porta-lápis ou caixa de lápis.

[383]No original: *cire d'Espagne*. Também chamada de lacre. É um tipo de cera à base de goma-laca e terebintina, utilizada nos séculos XVI e XVII para colar ou lacrar envelopes e documentos. Também era utilizada como isolante elétrico.

A goma-laca é uma resina vermelha ou amarela secretada por insetos que vivem em florestas da Índia e Tailândia. Entre suas várias utilidades, era empregada como isolante elétrico.

igualmente revestida de cera da Espanha e terminada de q até a, um comprimento de 18 linhas (4,06 cm), por um fio cilíndrico de goma-laca; na extremidade a dessa agulha há uma pequena bola de sabugueiro[384] com diâmetro de 2 a 3 linhas [0,45 a 0,68 cm]; em g há um pequeno [disco] plano vertical de papel que foi passado na terebintina, ele serve de contrapeso à bola a e amortece as oscilações.

Dissemos que a tampa AC estava perfurada de um segundo furo em m; é por esse segundo furo que introduzimos um pequeno cilindro $m\Phi t$, cuja parte inferior Φt é de goma-laca; em t temos uma bola igualmente de sabugueiro; ao redor do recipiente, na altura da agulha, traçamos um círculo zQ dividido em 360°; por simplicidade me servi de uma faixa de papel dividida em 360° que colei ao redor do recipiente, na altura da agulha.

Para começar a operar com esse instrumento, ao colocar a tampa, fiz o buraco m corresponder aproximadamente à primeira divisão, ou seja, ao ponto O do círculo zOQ traçado sobre o recipiente. Coloco o indicador oi do micrômetro sobre o ponto o, ou seja, a primeira divisão desse micrômetro; em seguido giro todo o micrômetro no tubo vertical fh, até que, tendo em vista a vertical que suspende a agulha e o centro da bola, a agulha ag esteja direcionada à primeira divisão do círculo zOQ.[385] Em seguida introduzo pelo buraco m a outra bola t, suspensa pelo fio $m\Phi t$, tal que ela toque a bola a e que, tendo em vista o centro do fio de suspensão e a bola t, encontremos a primeira divisão O do círculo zOQ.[386] A balança está agora pronta para todas as operações; vamos em seguida dar um exemplo da maneira pela qual a utilizamos para determinar a lei fundamental de acordo com a qual se repelem os corpos eletrizados.

10.2 Lei Fundamental da Eletricidade

A força repulsiva entre dois pequenos globos eletrizados pelo mesmo tipo de eletricidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros desses dois globos.

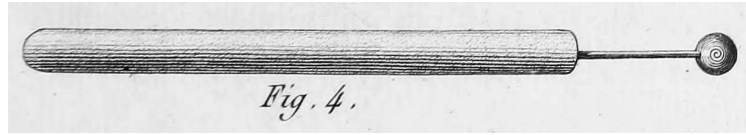
10.2.1 Experiência

Eletrizamos (Figura 4) um pequeno condutor que é apenas um alfinete com uma grande cabeça, que se encontra isolado ao forçar sua ponta na extremidade de um bastão de cera da Espanha;[387] introduzimos esse alfinete no buraco m e tocamos com ele a bola t, que está em contato com a bola a.

[384]No original: *balle de sureau*. Essa bolinha é feita com a medula envelhecida do sabugueiro. Essas bolas de sabugueiro eram usadas frequentemente em pêndulos elétricos e eletroscópios, comportando-se como condutores para experiências de eletricidade, [Assis, 2010b, pág. 173].

[385]Ou seja, quando o fio não está torcido a agulha aponta para o ponto O da escala graduada zOQ.

[386]O ponto C é o centro da agulha ag, como mostrado na Figura 3. Esse ponto C coincide com a vertical passando pelo fio de suspensão. A reta passando por C e o centro da bola fixa t passa pelo ponto O do círculo zOQ. Coulomb vai medir os ângulos a partir desse ponto O. Uma representação dessa situação encontra-se na Figura 11.1 na Seção 11.1 do Capítulo 11, página 207.

[387]Esse alfinete é eletrizado ao entrar em contato com uma garrafa de Leiden ou com uma máquina eletrostática, [Gillmor, 1971a, pág. 184]. Sobre a garrafa de Leiden ver o Capítulo 12, A Garrafa de Leiden e os Capacitores, de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

Ao retirar o alfinete, as duas bolas se encontram eletrizadas por uma eletricidade de mesma natureza e elas se repelem mutuamente até uma distância que medimos ao olhar a divisão correspondente do círculo zOQ por meio do fio de suspensão e da bola a. Ao girar em seguida o indicador do micrômetro no sentido pno, torcemos o fio de suspensão lP e produzimos uma força proporcional ao ângulo de torção que tende a aproximar a bola a da bola t. Observamos, por esse meio, a distância pela qual diferentes ângulos de torção trazem a bola a em direção à bola t e, ao comparar as forças de torção com as distâncias correspondentes entre as duas bolas, determinamos a lei de repulsão.

Apresentarei aqui apenas alguns testes que são fáceis de repetir e que revelam imediatamente a lei da repulsão.

Primeiro teste. Tendo eletrizado as duas bolas com a cabeça do alfinete, o indicador do micrômetro correspondendo ao ponto o, a bola a da agulha afastou-se da bola t de 36°.

Segundo teste. Tendo torcido o fio de suspensão por meio do botão o do micrômetro de 126°, as duas bolas se aproximaram e pararam a uma distância de 18° uma da outra.

Terceiro teste. Tendo torcido o fio de suspensão de 567°, as duas bolas aproximaram-se até 8°30′.[388]

10.3 Explicação e Resultado Dessa Experiência

Quando as bolas não estão eletrizadas, elas se tocam, e o centro da bola a, apoiada pela agulha, encontra-se afastado apenas pela metade do diâmetro das duas bolas do ponto no qual é nula a torção do fio de suspensão. Deve ser observado que o fio de prata lP que forma a suspensão tinha um comprimento de 28 polegadas (75,80 cm), e esse fio era tão fino, que um pé de comprimento desse fio pesava apenas 1/16 de um grão (0,01 g por metro).[389] Ao calcular a força que seria necessária para torcer esse fio, agindo no ponto a, afastado de 4 polegadas (10,83 cm) do fio lP ou do centro de suspensão, encontrei, pelas fórmulas explicadas em uma Memória sobre as leis da força de torção dos fios de metal, impressa no Volume da Academia para o ano de 1784,[390] que para torcer esse fio de 360° seria necessário empregar no ponto a, ao agir com a alavanca aP, com um comprimento de 4 polegadas

[388]Apresento uma discussão detalhada do procedimento e das medidas de Coulomb no Capítulo 11, Seção 11.1, na página 207.

[389]Como 1 grão = 0,05311 g, a massa M desse fio de prata era de $M = 3,319 \times 10^{-6}\ kg$. Como 1 pé = 32,48 cm, a densidade linear de massa λ desse fio de prata é de

$$\lambda = \frac{3,319 \times 10^{-6}\ kg}{3,248 \times 10^{-1}\ m} = 1,022 \times 10^{-5}\ kg/m = 0,010\ g/m\ .$$

Supondo uma densidade volumétrica de massa δ para a prata de $\delta = 10,5\ g/cm^3 = 10,5 \times 10^3\ kg/m^3$, vem que o diâmetro D desse fio cilíndrico pode ser obtido por $\delta = M/(\pi L D^2/4)$, ou seja, $D = 3,5 \times 10^{-5}\ m = 0,0035\ cm$. Esse valor tem a mesma ordem de grandeza que o diâmetro de um fio de cabelo.

[390][Coulomb, 1787]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

(10,83 cm), apenas uma força de 1/340 de um grão.[391,392] Assim, como as forças de torção são, como está provado nessa Memória [apresentada em 1784], proporcionais aos ângulos, a menor força repulsiva entre as duas bolas as afastava perceptivelmente uma da outra.

Encontramos em nossa primeira experiência, na qual o indicador do micrômetro está sobre o ponto o, que as bolas ficam afastadas de 36°, o que produz ao mesmo tempo uma força de torção de[393,394]

$$36^\circ = \frac{1}{3400} \text{ de grão} .$$

No segundo teste, a distância entre as bolas é de 18°; porém, como torcemos o micrômetro de 126°, resulta que a uma distância de 18° [entre as bolas,] a força repulsiva era de 144°.[395] Assim, na metade da primeira distância, a repulsão entre as bolas é quádrupla.[396]

No terceiro teste torcemos o fio de suspensão de 567°, e as duas bolas se encontravam afastadas de apenas $8,5^\circ$. Consequentemente, a torção total era de 576°, o quádruplo daquela do segundo teste, e só era necessário 1/2 grau para que a distância entre as duas bolas nesse terceiro teste fosse reduzida à metade daquela distância que ela tinha no segundo teste.[397] Portanto, resulta desses três testes que a ação repulsiva que as duas bolas eletrizadas pelo mesmo tipo de eletricidade exercem uma sobre a outra, segue a razão inversa do quadrado das distâncias.[398,399]

---

[391][Nota de Potier:] 0,153 dinas.

[392]1 grão $= 0,05311\ g = 5,311 \times 10^{-5}\ kg$. Logo, em termos de uma massa m, temos $m = (1 \text{ grão})/340 = 1,562 \times 10^{-7}\ kg$. Com $g = 9,81\ m/s^2$, vem que seria necessário empregar uma força $F = mg$ de $F = 1,53 \times 10^{-6}\ N = 0,153$ dinas, como calculado por Potier.

Com um braço de alavanca $aP = 4$ polegadas $= 1,083 \times 10^{-1}\ m$, obtém-se o torque τ necessário para torcer esse fio de 360° como dado por $\tau = 1,66 \times 10^{-7}\ Nm$.

[393][Nota de Potier:] $0,0153\ dinas$.

[394]Ver a Nota de rodapé 392.

[395]Ou seja, a torção total do fio nesse caso era de $18^\circ + 126^\circ = 144^\circ$, ver as Figuras na Seção 11.1 do Capítulo 11 na página 207.

[396]Isto é, para dividir por dois a distância angular, de 36° para 18°, foi necessário o quádruplo da torção do fio, isto é, passar de uma torção de 36° para $4 \times 36^\circ = 144^\circ$. O torque exercido pelo fio é proporcional ao seu ângulo de torção. Logo, no segundo caso em que a separação angular entre as bolas caiu à metade, é necessário um torque quatro vezes maior para mantê-las a uma distância fixa em equilíbrio comparado com o torque inicial.

[397]Neste último caso a separação angular entre as duas bolas foi de $8,5^\circ$. Já a torção total do fio é dada pela sua torção de sua parte inferior no sentido anti-horário de $8,5^\circ$, somada com sua torção de sua parte superior no sentido horário de 567°. Ou seja, uma torção total de $575,5^\circ \approx 576^\circ$. Esse valor é o quádruplo da torção anterior de 144°, isto é, $4 \times 144^\circ = 576^\circ$. Já a separação angular entre as bolas caiu novamente praticamente à metade, de 18° para $8,5^\circ \approx 9^\circ$. Ou seja, novamente vem que o ângulo total de torção do fio é inversamente proporcional ao quadrado da separação angular entre as bolas que estão se repelindo.

[398][Nota de Potier:] A repulsão das duas bolas, no primeiro teste, é:

$$\frac{0,0153\ dina}{\cos 18^\circ} = 0,016\ dina ,$$

a uma distância de $10,83 \times 2 \operatorname{sen} 18^\circ = 6,67\ cm$. Portanto, a carga de cada uma delas é de $6,67 \times \sqrt{0,016} = 0,84$ unidades absolutas (C.G.S.).

[399]Apresento um cálculo detalhado da quantidade de carga em cada uma das bolas no Capítulo 11, Seção 11.2, página 209.

10.4 Primeira Observação

Ao repetir a experiência anterior, observamos que ao utilizar um fio de prata tão fino quanto aquele que empregamos, que só necessita uma força de torção de aproximadamente 24 milésimos de grão para torcê-la de um ângulo de 5°,[400] que, não importando quão calmo esteja o ar e quaisquer precauções que tomemos, só conseguimos voltar à posição natural da agulha, quando a torção é nula, com [uma aproximação de] cerca de 2° ou 3°. Assim, para ter um primeiro teste a ser comparado com os seguintes, é necessário, após ter eletrizado as duas bolas, torcer o fio de suspensão de 30° ou 40°, o que, juntamente com a distância observada entre as duas bolas, fornece uma força de torção bem considerável, de modo que os 2° ou 3° de incerteza na posição inicial da agulha, quando a torção é nula, não produzem um erro perceptível nos resultados. Além disso, é necessário observar que o fio de prata que utilizei nessa experiência é tão fino que ele se rompe na menor trepidação: encontrei na sequência que era mais cômodo utilizar nas experiências um fio de suspensão de aproximadamente o dobro do diâmetro [em relação a esse], embora sua flexibilidade de torção fosse quatorze ou quinze vezes menor do que a flexibilidade do primeiro. É necessário tomar cuidado, antes de usar esse fio de prata, de mantê-lo esticado durante dois ou três dias por um peso que seja aproximadamente a metade daquele que ele pode suportar sem se romper; é necessário ainda observar que ao utilizar esse último fio de prata, não se pode jamais torcê-lo além de 300°, já que, além desse grau de torção, ele começa a endurecer e só reage, assim como provamos na Memória já citada, impressa em 1784, com uma força menor que o ângulo de torção.

10.5 Segunda Observação

A eletricidade das duas bolas diminui um pouco durante o intervalo de tempo que dura a experiência. Encontrei que, no dia em que fiz os testes anteriores, as bolas eletrizadas, encontrando-se pela repulsão entre elas a uma distância de 30° uma da outra, sob um ângulo de torção de 50°, elas aproximavam-se de 1° dentro de três minutos. Porém, como utilizei apenas dois minutos para realizar os três testes anteriores, podemos, nessas experiências, desprezar o erro que surge da perda da eletricidade. Se desejarmos um maior grau de precisão, ou então quando o ar está úmido e a eletricidade se perde rapidamente, devemos, para um primeira observação, determinar a lei da diminuição da ação elétrica dessas duas bolas em cada minuto, e nos servir em seguida dessa primeira observação para corrigir os resultados das experiências que quisermos fazer nesse dia.

10.6 Terceira Observação

A distância entre as duas bolas, quando elas estão afastadas entre si pela ação repulsiva recíproca entre elas, não é medida precisamente pelos ângulos que elas formam, mas pela corda do arco que une seus centros; da mesma forma que [o braço da] alavanca na extremidade

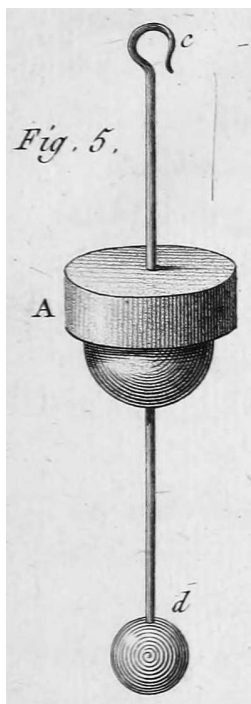
[400]Isto é, uma massa m dada por:

$$m = \frac{1 \text{ grão}}{24.000} = \frac{5,311 \times 10^{-5}\ kg}{24.000} = 2,2 \times 10^{-9}\ kg\ .$$

Com $g = 9,81\ m/s^2$ vem que é necessária uma força da ordem de $2,2 \times 10^{-8}\ N = 0,002\ dinas$ para girá-la de 5°.

da qual se exerce a ação não é medido pela metade do comprimento da agulha, ou pelo raio, mas pelo cosseno da metade do ângulo formado pela distância entre as bolas. Essas duas quantidades, na qual uma é menor que o arco e diminui consequentemente a distância medida por esse arco, enquanto que a outra quantidade diminui a alavanca, se compensam de algum modo, e, nas experiências do tipo daquelas com as quais nos ocupamos, podemos sem erro perceptível, manter a avaliação que demos, caso a distância entre as bolas não passe de 25° ou 30°; nos outros casos é necessário fazer o cálculo rigorosamente.[401]

10.7 Quarta Observação

Como a experiência prova que, em um compartimento bem fechado, podemos determinar com o primeiro fio de prata, dentro de 2° ou 3° aproximadamente, a posição da agulha quando a torção é nula, o que fornece, de acordo com o cálculo das forças de torção proporcionais ao ângulo de torção, uma força de aproximadamente 40 milésimos de grão (0,0013 dinas), os menores graus de eletrização são medidos facilmente com essa balança. Para essa operação atravessamos um pequeno fio de cobre cd através de uma rolha de cera da Espanha (Figura 5), terminado em c por um gancho, e em d por uma pequena bola de sabugueiro pintada de dourado, e colocamos a rolha A no buraco m da balança (Figura 1), de maneira que o centro da bola d vista pelo fio de suspensão corresponda ao ponto O do círculo zOQ.

Em seguida, ao aproximar um corpo eletrizado do gancho c, não importando quão fraca seja a eletricidade desse corpo, a bola a separando-se da bola d fornece sinais da eletricidade,[402] e a distância entre as bolas mede a força [entre elas] de acordo com o princípio da razão inversa do quadrado da distância.

[401]Ver a Seção 11.3 do Capítulo 11 na página 210.

[402]Esses pequenos graus de eletrização são percebidos tanto no corpo eletrizado que se aproxima do gancho c, quanto nessas duas bolas a e d.

Porém, devo prevenir que, após essas primeiras experiências, fiz diferentes eletrômetros pequenos, de acordo com os mesmos princípios da força de torção, utilizando como fio de suspensão um fio de seda, tal como aquele que sai do casulo, ou de um fio de cabra angorá.[403] Um desses eletrômetros, que possui aproximadamente a mesma forma que a balança elétrica descrita nessa Memória, é muito menor; possui apenas 5 ou 6 polegadas de diâmetro [13,5 ou 16,2 cm] e uma haste de uma polegada (2,71 cm); a agulha é um pequeno fio de goma-laca com comprimento de 12 linhas (2,71 cm), terminada em a por um pequeno disco muito leve de ouropel.[404] A agulha e o ouropel pesam aproximadamente um quarto de grão (0,013 g); o fio de suspensão, tal como sai do casulo, tendo 4 polegadas de comprimento [10,8 cm], possui tal flexibilidade que, ao agir com um braço de alavanca de 1 polegada (2,71 cm), é necessário apenas [uma força de] um sexagésimo de um milésimo de grão para torcê-lo de um círculo inteiro ou de 360°.[405] Ao apresentar nesse eletrômetro no gancho C da Figura 5 um bastão comum de cera da Espanha, eletrizado por atrito, a uma distância de 3 pés (0,97 m) desse gancho, a agulha é repelida a mais de 90°. Descreveremos esse eletrômetro mais detalhadamente na sequência, quando formos determinar a natureza e o grau de eletricidade de corpos diferentes, os quais, ao serem atritados entre si, adquirem um grau muito fraco de eletricidade.[406,407]

[403] A cabra ou cabrito angorá produz a partir do seu pelo uma fibra conhecida como mohair ou angorá. É um fio semelhante à lã.

[404] No original: *clinquant*. Folha delgada de latão imitando ouro.

[405] Isto é, uma massa m dada por:

$$m = \frac{1 \text{ grão}}{60.000} = \frac{5,311 \times 10^{-5}\ kg}{60.000} = 8,85 \times 10^{-10}\ kg\ .$$

Com $g = 9,81\ m/s^2$ vem que é necessária uma força da ordem de $8,7 \times 10^{-9}\ N = 0,0009\ dinas$ para girá-lo de 360°.

[406] [Nota de Potier:] Nas condições em que Coulomb trabalhou, se desprezarmos a ação das cargas induzidas no vidro do recipiente, que se encontrava ao redor de 0,04 m do centro das bolas, é pequena a influência da distribuição da eletricidade sobre a superfície das bolas. Com efeito, a ação recíproca entre duas esferas iguais carregadas com quantidades iguais de eletricidade, é dada por

$$\frac{e^2}{c^2}\left(1 - 4\frac{a^3}{c^3}\right)\ ,$$

caso a represente seus raios, c a distância entre seus centros, [sendo e a carga total em cada bola]. Essa fórmula fornece resultados exatos com uma aproximação de 2/1000, desde que a distância entre as [superfícies das] esferas seja igual ao raio delas. Nas experiências citadas por Coulomb, a/c é sempre inferior a 1/6.

[407] Potier está considerando a influência da distribuição de carga nas superfícies de duas esferas condutoras eletrizadas quando estão próximas entre si. Ele considera esferas iguais de raio a, eletrizadas igualmente com uma carga e sobre cada esfera, sendo seus centros separados por uma distância c. Caso as cargas nas duas esferas estivessem concentradas em seus centros, a força entre elas seria proporcional a e^2/c^2. Caso $c = 6a$, a expressão fornecida por Potier para a força entre essas esferas condutoras seria proporcional a $(e^2/c^2)(1 - 0,0185)$. Ou seja, a diferença percentual entre essas forças seria da ordem de 2%. Contudo, nas experiências de Coulomb temos $c > 6a$, tal que a diferença é ainda menor. Ou seja, nessas experiências não é necessário levar em conta a redistribuição das cargas sobre as esferas condutoras, sendo suficiente considerar essas cargas como estando concentradas nos centros das esferas, como feito por Coulomb.

Para uma dedução da fórmula apresentada por Potier na Nota de rodapé 406 ver, por exemplo, [Maxwell, 1954, Vol. I, §§171-174, págs. 266-273].

Uma estimativa da força exercida pelas cargas induzidas no vidro do recipiente sobre as cargas da balança de torção, supondo o recipiente esférico e feito de metal, foi apresentada por Maxwell: [Maxwell, 1954, Vol. I, §215, págs. 327-329].

Capítulo 11

Observações sobre a Primeira Memória de Coulomb

11.1 Procedimento Experimental de Coulomb

Apresento aqui uma discussão detalhada do procedimento e das medidas que Coulomb apresentou na Seção 10.2.

Na Figura 11.1 (a) temos um visão de cima para baixo da agulha com centro C ao longo da projeção do fio de suspensão, bola a e disco de papel g que funciona como contrapeso e como amortecedor das oscilações. Na situação em que o fio não está torcido, a agulha aponta para o ponto O fixo na escala graduada do círculo zOQ preso no recipiente de vidro ao redor da agulha.

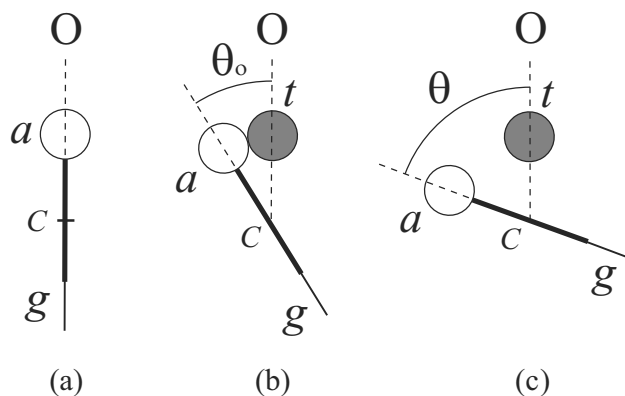



Figura 11.1: (a) Fio não torcido com a agulha apontando para O. (b) Início da experiência com as bolas a e t descarregadas. (c) Situação final de equilíbrio da experiência com as bolas eletrizadas com cargas de mesmo sinal.

Antes de iniciar as experiências Coulomb afasta um pouco a bola a de sua posição original ao colocar a bola t encostada nela, Figura 11.1 (b). A bola t fica sempre fixa no laboratório. A reta passando por C e pelo centro da bola fixa t aponta sempre para o ponto O. Coulomb vai medir os ângulos a partir desse ponto O. A agulha horizontal ag pode girar ao redor de seu centro C preso ao fio de suspensão vertical. A torção inicial do fio é representada pelo ângulo θ_o.

As duas bolas são carregadas ao tocar um alfinete eletrizado na bola t. Com isso elas adquirem cargas de mesmo sinal e se repelem. A agulha gira no plano horizontal, no sentido

anti-horário, ao redor do ponto C pelo qual está suspensa pelo fio vertical. A bola a afasta-se da bola t. No equilíbrio o fio fica torcido de um ângulo θ, Figura 11.1 (c). O torque exercido sobre a agulha pela força elétrica de repulsão entre as bolas eletrizadas é equilibrado pelo contra-torque exercido pelo fio torcido do ângulo θ.

Na Figura 11.2 apresenta-se a sequência dos testes experimentais de Coulomb. O ponto O indica a partir de onde Coulomb vai medir a torção da parte inferior do fio no círculo graduado zOQ preso no recipiente de vidro ao redor da agulha. Já o ponto S indica a partir de onde Coulomb vai medir a torção da parte superior do fio no pequeno círculo graduado ab preso no alto do tubo de onde o fio está suspenso. A seta Co é o indicador do micrômetro preso à parte superior do fio. Vou supor que inicialmente a reta Co do indicador do micrômetro aponta para o ponto S. Estou assumindo que no início a reta passando por C e pelo centro da bola fixa t, apontando para O, está ao longo do mesmo plano vertical da reta Co apontando para S.

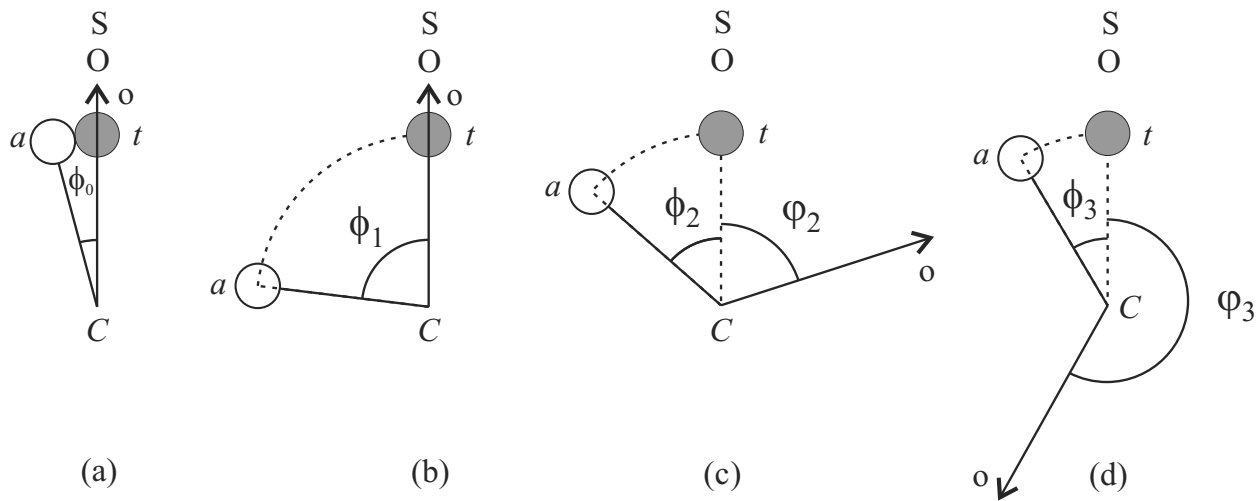



Figura 11.2: (a) Início da experiência com as bolas descarregadas. (b) Teste 1. (c) Teste 2. (d) Teste 3.

Na Figura 11.2 (a) temos a situação inicial com as bolas descarregadas. O fio está torcido de um ângulo inicial $\theta_o = \phi_o$. A bola a tinha entre 2 e 3 linhas de diâmetro. Vamos supor aqui duas esferas a e t de diâmetros iguais dados por $D_1 = D_2 = 2,5$ linhas $= 0,565$ cm. Quando elas estão se tocando esse valor representa também a distância entre seus centros. Coulomb afirma que a distância entre o centro da bola a e o centro C da agulha é de $R = 4$ polegadas $= 10,83$ cm. Com isso vem que o ângulo inicial de torção do fio é dado por $\theta_o = \phi_o \approx 0,565/10,83 = 0,052$ $rad = 3,0°$.

No primeiro teste as bolas são eletrizadas, Figura 11.2 (b). A bola a afasta-se da bola t até parar na posição ϕ_1 devido à torção da parte inferior do fio no sentido anti-horário. Coulomb mede o ângulo ϕ_1 de torção da parte inferior do fio, sendo essa a torção total do fio. Isto é, o ângulo θ da Figura 11.1 (b) é dado por $\theta_1 = \phi_1$.

Na sequência Coulomb realiza o segundo teste no qual torce o micrômetro juntamente com a parte superior do fio no sentido horário de um ângulo φ_2, Figura 11.2 (c). Com isso a bola a aproxima-se de t até parar no ângulo ϕ_2. Coulomb mede os ângulos de equilíbrio, a saber, ϕ_2 e φ_2 nas escalas graduadas inferior e superior, respectivamente. A torção total θ do fio da Figura 11.1 (b) corresponde aqui à soma desses ângulos, isto é, $\theta_2 = \phi_2 + \varphi_2$.

Em seguida Coulomb torce ainda mais o micrômetro preso à parte superior do fio no

sentido horário, aproximando mais uma vez a bola a da bola t, Figura 11.2 (d). A parte inferior do fio fica torcida de um ângulo ϕ_3 enquanto que a parte superior do fio fica torcida de um ângulo φ_3. A torção total do fio é dada pela soma desses ângulos, $\theta_3 = \phi_3 + \varphi_3$.

Os três testes experimentais de Coulomb estão colocados na Tabela 11.1 sendo os ângulos mostrados nas Figuras 11.1 e 11.2, [Gillmor, 1971a, pág. 185].

	Teste No. 1	Teste No. 2	Teste No. 3
Separação angular das bolas $= \phi =$	$36°$	$18°$	$8,5°$
Ângulo do micrômetro $= \varphi =$	$0°$	$126°$	$567°$
Ângulo total de torção do fio $= \theta = \phi + \varphi =$	$36°$	$144°$	$575,5°$

Tabela 11.1: Ângulos medidos por Coulomb.

Blondel e Wolff apresentaram um vídeo mostrando uma reprodução da balança de Coulomb em [Blondel and Wolff, 2007].

11.2 Estimativa do Valor da Carga Elétrica Utilizada por Coulomb

Vou estimar aqui o valor da quantidade de carga nas bolas eletrizadas da experiência de Coulomb. Como visto na Seção 10.3 na página 201 e nas Notas de rodapé 391 e 392, Coulomb calculou que era necessária uma força $F = 1,53 \times 10^{-6}\ N$ atuando em um braço de alavanca de 4 polegadas $= 1,083 \times 10^{-1}\ m$ para torcer seu fio de 360°. Nesse primeiro teste o fio ficou torcido de 36°. Logo, nesse caso foi necessário uma força $F = 1,53 \times 10^{-7}\ N$ atuando em um braço de $1,08 \times 10^{-1}\ m$, ou seja, exercendo um torque τ de

$$\tau = 1,65 \times 10^{-8}\ Nm\ . \qquad (11.1)$$

Na Figura 11.3 (a) as bolas a e t estão separadas por uma distância d.

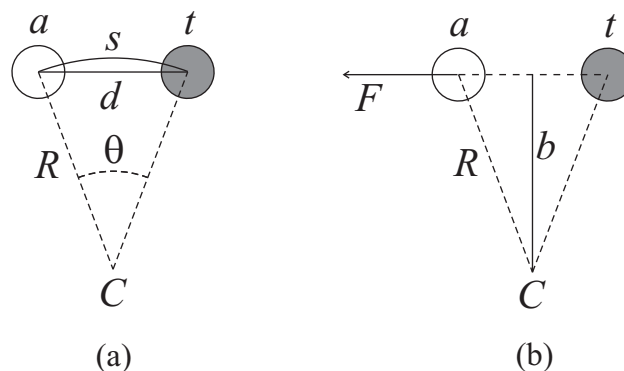



Figura 11.3: (a) Bolas a e t separadas por uma distância d. (b) Força F de repulsão entre as bolas eletrizadas e braço b da alavanca.

O ponto C é o centro da agulha, que coincide com a projeção vertical do fio de suspensão. Já R é a distância entre C e o centro da bola a, a saber, $R = 4$ polegadas $= 1,083 \times$

10^{-1} m, como dado por Coulomb. O ângulo de separação entre os centros das duas bolas é representado por θ, Figura 11.1 (c). Nesse primeiro teste temos $\theta = 36°$.

O torque exercido pela força F atuando no centro da esfera a, em relação ao ponto C, é dado por

$$\tau = FR\cos\frac{36°}{2} = F(0,1083\ m)(0,951) = 0,103F\ . \tag{11.2}$$

Comparando com a Equação (11.1) obtém-se:

$$F = 1,60 \times 10^{-7}\ N\ . \tag{11.3}$$

Vou supor aqui duas bolas de mesmo material e de mesmo tamanho igualmente eletrizadas com cargas $q_1 = q_2 = q$. Vou utilizar ainda a força de Coulomb no Sistema Internacional de Unidades expressa por

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}\ , \tag{11.4}$$

onde $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}\ C/(Vm)$ é uma constante chamada de permissividade elétrica do vácuo.

A distância $d = r$ entre os centros das duas bolas é dado por $d = 2R\,\text{sen}\,(36°/2) = 2 \cdot 0,1083 \cdot 0,309 = 0,0669\ m$. Utilizando então esse valor nas Equações (11.3) e (11.4) obtém-se

$$q \approx 2,8 \times 10^{-10}\ C\ . \tag{11.5}$$

Essa carga é equivalente a um valor de $0,85\ cm^{3/2}g^{3/2}s^{-1}$, ou seja, 0,85 unidades de carga no sistema C.G.S. de unidades, como calculado por Potier na Nota de rodapé 398 na página 202. Ver também [Devons, 1975, pág. 40].

11.3 Comparação da Distância entre as Esferas com o Arco de Separação Angular entre Elas, Juntamente com a Comparação do Braço Real da Alavanca com a Metade do Comprimento da Agulha

Vou aqui discutir a Terceira Observação de Coulomb, Seção 10.6. A partir de seus dados experimentais Coulomb concluiu que o torque τ exercido sobre o fio devido à repulsão entre as esferas era inversamente proporcional ao quadrado do ângulo de torção do fio. A partir desse dado inferiu que a força de repulsão entre as esferas eletrizadas era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros das esferas. Por um lado temos torque, ângulo de torção e braço da alavanca. Por outro lado temos a força de repulsão entre as esferas e a distância entre seus centros. Logo não é imediata a passagem do torque ser inversamente proporcional ao quadrado do ângulo de torção, para uma força ser inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros das esferas. Nessa Seção discuto esse tópico.

A partir da Figura 11.3 (a), o arco s está relacionado com o raio R e com o ângulo θ de separação entre as esferas (expresso em radianos) por:

$$\theta = \frac{s}{R} \ . \tag{11.6}$$

Já a distância d entre as bolas é dada por:

$$d = 2R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \ . \tag{11.7}$$

Se considerarmos o ângulo $\theta \ll 1\ rad$, podemos expandir essa função e aproximar essa distância por:

$$d \approx 2R\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{6}\frac{\theta^3}{8}\right) = R\left(\theta - \frac{\theta^3}{24}\right) \ . \tag{11.8}$$

Combinando com a Equação (11.6) obtemos:

$$d \approx s\left(1 - \frac{s^2}{24R^2}\right) \ . \tag{11.9}$$

Vamos supor a força F entre as bolas eletrizadas como sendo inversamente proporcional ao quadrado distância d entre seus centros, Equação (11.4). Nesse caso podemos escrever

$$F = \frac{K}{d^2} \ , \tag{11.10}$$

onde K é uma constante para cada situação experimental específica com uma certa eletrização das bolas a e t.

Na Figura 11.3 (b) temos a força F de repulsão entre as esferas ao longo da reta que une seus centros. O braço b da alavanca está relacionado com o raio R e o ângulo θ de separação entre elas (expresso em radianos) por:

$$b = R\cos\frac{\theta}{2} \ . \tag{11.11}$$

Se considerarmos ângulos $\theta \ll 1\ rad$, podemos aproximar o valor desse braço b por:

$$b \approx R\left(1 - \frac{\theta^2}{8}\right) \ . \tag{11.12}$$

Combinando com a Equação (11.6) obtém-se:

$$b \approx R\left(1 - \frac{s^2}{8R^2}\right) \ . \tag{11.13}$$

Utilizando a Equação (11.3) vem que o torque τ exercido pela força F sobre a agulha calculado em relação ao seu centro C é dado por:

$$\tau = Fb = K\frac{b}{d^2} \ . \tag{11.14}$$

Combinando com as Equações (11.13) e (11.9) vem que:

$$\tau = K\frac{b}{d^2} = KR\left(1 - \frac{s^2}{8R^2}\right)\frac{1}{s^2\left(1 - \frac{s^2}{24R^2}\right)^2} \approx K\left[R\left(1 - \frac{s^2}{8R^2}\right)\right]\left[\frac{1}{s^2}\left(1 + \frac{s^2}{12R^2}\right)\right] \ . \tag{11.15}$$

Essa equação justifica a afirmação de Coulomb de que as duas grandezas consideradas por ele "se compensam de algum modo", já que o braço b da alavanca vai ficando cada vez menor do que R na medida em que cresce o ângulo $\theta = s/R$ de torção do fio, enquanto que $1/s^2$ vai ficando cada vez maior do que $1/d^2$ na medida em que cresce o ângulo do torção do fio.

Porém, essa compensação não é total, nem mesmo em segunda ordem em s/R. Ou seja, expandindo a Equação (11.15) até a ordem s^2/R^2 obtém-se:

$$\tau \approx K\frac{R}{s^2}\left(1 - \frac{s^2}{24R^2}\right) . \qquad (11.16)$$

Para um ângulo de torção de $\theta = 30° = 0,524\ rad$ temos $\theta^2/24 = s^2/(24R^2) = 0,011$. Logo, a conclusão de Coulomb é justificada para ângulos dessa ordem de grandeza ou menores do que isto, como foi o caso de suas experiências. Essa equação mostra ainda que para ângulos de torção maiores do que uns 30° ou 40°, teríamos de fazer os cálculos rigorosamente, como apontado por Coulomb.

11.4 Balança de Torção com Material de Baixo Custo

Gostaria de chamar atenção aqui que é possível fazer algumas atividades com material simples e facilmente encontrável que lembram algumas experiências originais de Coulomb. Essas experiências com material de baixo custo são altamente recomendáveis especialmente no ensino de ciências e de física em particular.

Algumas atividades nesse sentido foram desenvolvidas por Norberto Ferreira na Universidade de São Paulo, USP.[408]

11.5 Coulomb Obteve Experimentalmente os Resultados que Descreveu em Seu Artigo?

Em 1992 Peter Heering publicou um artigo apresentando uma replicação da montagem de Coulomb e refez suas experiências, mas não conseguiu reproduzir seus resultados.[409]

Na experiência de Coulomb uma bola a na ponta de uma agulha horizontal que pode girar ao redor de um fio de torção vertical passando pelo centro da agulha fica afastada de um certo ângulo em relação a um outra bola t fixa no laboratório quando as duas bolas ficam eletrizadas com cargas de mesmo tipo, como ilustrado na Figura 1 de Coulomb, ver a página 197 dessa tradução. Em particular, na reprodução de Heering a bola eletrizada a na ponta da agulha não atingia uma posição de equilíbrio na qual ficasse parada depois de ser repelida pela bola eletrizada t, apesar de ter um contrapeso que amortecia as oscilações da agulha. Heering percebia oscilações da agulha, mencionando que era impossível medir a posição exata da bola eletrizada a devido a essas oscilações. Concluiu que o principal motivo dessas oscilações eram as cargas elétricas adquiridas pelo próprio experimentador, sendo que

[408] Ver, em particular, [Ferreira, 1978, Seção 4.10.4 (lei de Coulomb)]; as atividades "a balança de Coulomb", "a balança de torção" e "a balança eletrostática" do Projeto RIPE, [Ferreira, s da] e [Ferreira, s db]; e as atividades "pêndulo duplo — determinando a carga elétrica" de [Ferreira and Ramos, 2008, págs. 44-48].

[409] [Heering, 1992]. Ver ainda [Heering, 1994], [Heering and Chevalier, 1995] e [Heering, 2009]. Ver também [Heilbron, 1994] e os artigos de [Blondel and Dörries, 1994].

essas cargas afetavam constantemente a posição da bola eletrizada móvel, causando suas oscilações. Apenas quando colocou uma gaiola de Faraday ao redor da balança de torção conseguiu com que a bola eletrizada atingisse posições de repouso para diferentes torções do fio de suspensão. Mas Coulomb não utilizou uma gaiola de Faraday em sua experiência, já que esse instrumento só foi descrito por Faraday em 1838.[410] Heering apresentou a seguinte conclusão:[411]

> Devido a esses argumentos parece razoável assumir que Coulomb não obteve os dados que publicou na sua Memória através de medidas. [...] A partir do nosso trabalho ao replicar as experiências de Coulomb parece bem plausível que Coulomb não encontrou a lei do inverso do quadrado através de suas medidas duvidosas de suas experiências com a balança de torção, mas por considerações teóricas.

Coulomb, de acordo com Heering, já teria suposto implicitamente que a força entre corpos eletrizados deveria se comportar de maneira análoga à lei de Newton da gravitação de 1687, ou seja, variando inversamente com o quadrado da distância entre os corpos. Teria então apresentado valores numéricos nesse artigo que se adequariam a essa lei, embora esses valores não tivessem sido obtidos pelas experiências que descreveu.

Esse artigo de Heering teve um forte impacto e muitos autores concordaram com ele, repetindo seus argumentos. Eu próprio segui nessa linha.[412]

Atualmente mudei totalmente de opinião após estudar os trabalhos originais de Coulomb. Nessa Seção apresento diversos argumentos com os quais questiono as conclusões de Heering. Passo agora a defender a ideia oposta, ou seja, que Coulomb realmente obteve que a força elétrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos eletrizados a partir das medidas experimentais que realizou com sua balança de torção. Os motivos que me fizeram mudar de opinião estão relacionadas a um conhecimento bem mais profundo das obras de Coulomb, assim como diversos trabalhos recentes que analisaram essa controvérsia e que eu não conhecia anteriormente.

11.5.1 Replicações Recentes das Experiências de Coulomb Chegando em Conclusões Opostas

Além do trabalho de Heering publicado em 1992, tenho conhecimento de duas outras replicações do trabalho de Coulomb: Martinez em 2006, além de Shech e Hatleback em 2014.[413]

Shech e Hatleback não conseguiram reobter os resultados apresentados por Coulomb em sua Primeira Memória e consideraram os resultados de Coulomb atípicos. Além disso, perceberam que as experiências com balanças de torção degeneram rapidamente quando são feitas pequenas alterações em alguns parâmetros experimentais.

Martinez, por outro lado, conseguiu reproduzir os resultados experimentais de Coulomb com sua replicação da balança de torção. Martinez não precisou usar uma gaiola de Faraday

[410] [Faraday, 1838]. Ver também a Seção 8.4 (Gaiola de Faraday) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

[411] [Heering, 1992, págs. 991 e 993].

[412] [Assis, 1994, pág. 26], [Assis, 1995, pág. 20], [Assis, 1998a, pág. 26], [Assis, 1999a, pág. 33], [Assis, 1999b, pág. 18], [Assis, 2013, pág. 29], [Assis, 2014, pág. 32], [Assis, 2015a, pág. 14], [Assis and Chaib, 2015, pág. 21], [Assis, 2018b, pág. 268], [Assis, 2018a, pág. 262] e [Assis, 2019, pág. 281].

[413] [Martinez, 2006] e [Shech and Hatleback, 2014]. Ver também [Blondel and Wolff, 2013e].

ao redor da balança de torção para obter resultados análogos aos de Coulomb. Avaliação de Martinez sobre esse assunto:[414]

> Em conclusão, todos esses resultados convergem para uma conclusão: Coulomb obteve os números que apresentou a partir da experiência. Seus resultados não foram incomuns, quase certamente foram resultados típicos. Portanto, ele estava justificado em sua afirmação de que havia demonstrado experimentalmente o que chamou com confiança de "Lei Fundamental da Eletricidade".

Logo, há divergência entre autores que conseguiram reproduzir os resultados de Coulomb ao replicar suas experiências utilizando materiais, equipamentos e procedimentos os mais próximos possíveis aos de Coulomb, e os autores que não conseguiram reproduzir os valores experimentais de Coulomb.

11.5.2 Gaiola de Faraday ao Redor da Balança de Torção

Ao reproduzir as experiências de Coulomb com sua replicação da balança de torção Heering observou que a agulha com a bola eletrizada em sua ponta dificilmente chegava a um estado de repouso.[415] Concluiu que as constantes oscilações da agulha eram causadas pela eletrização da pessoa que estava realizando as experiências. As oscilações terminaram apenas quando Heering circundou a balança de torção com uma gaiola de Faraday.

Coulomb não utilizou explicitamente uma gaiola de Faraday em sua experiência, já que esse instrumento só foi descrito por Faraday em 1838. Apesar desse fato, alguns pesquisadores levantaram a hipótese de que o próprio vidro utilizado por Coulomb em sua balança pode ter se comportado como um condutor, funcionando como uma gaiola de Faraday.[416]

Esse efeito pode muito bem ter acontecido, embora não tenha sido intencional por parte de Coulomb. Como discuti no livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, existem diversos tipos de vidro dependendo dos materiais com que são produzidos, dos processos de fabricação, das impurezas que adquirem com a passagem do tempo, do ambiente em que se localizam, etc. Alguns desses vidros comportam-se como isolantes para as experiências usuais de eletrostática, embora a maioria deles comporte-se como condutor para essas experiências.[417]

Tudo isso mostra que é razoável a hipótese levantada por Wolff e Blondel de que o cilindro de vidro ao redor da balança de torção pode muito bem ter se comportado como um condutor nas experiências originais de Coulomb, ou seja, como uma gaiola de Faraday. Já o vidro ao redor da balança de torção feita por Heering pode ter se comportado como um isolante. Essa hipótese justificaria a obtenção dos resultados por Coulomb e não por Heering. Esse último autor só conseguiu reproduzir resultados similares aos de Coulomb ao colocar uma gaiola de Faraday ao redor de sua balança. Infelizmente as balanças de torção originais de Coulomb não chegaram aos nossos dias. Ou seja, elas não existem mais e não podemos testar as propriedades do vidro utilizado por ele.

[414] [Martinez, 2006, pág. 547].
[415] [Heering, 1992].
[416] [Wolff and Blondel, 2009]. Ver também [Blondel, 1994, págs. 106-107 e 116-117].
[417] Ver, em particular, a Seção 6.3.2 (corpos que se comportam como condutores e isolantes nas experiências usuais de eletrostática) de [Assis, 2010b], [Assis, 2010a], [Assis, 2015b] e [Assis, 2017]; assim como a Seção 4.3 (diferenças entre os vidros da época de Gray e os vidros atuais) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

11.5.3 Coulomb e as Perturbações Eletrostáticas Externas Atuando sobre suas Balanças de Torção

Deve ser observado que o próprio Coulomb estava ciente pelo menos desde 1782 sobre possíveis influências exercidas por cargas elétricas externas que perturbavam o funcionamento de suas balanças de torção, tanto as utilizadas para pesquisas elétricas quanto magnéticas.[418]

Coulomb começou a trabalhar com magnetismo na década de 1770. Em particular, foi um dos ganhadores do prêmio de 1777 da Academia de Ciências de Paris relacionado às pesquisas sobre o melhor método de fabricar bússolas e sobre uma explicação das variações diurnas do magnetismo terrestre. As agulhas apoiadas sobre um pivô, ao serem desviadas de sua orientação usual pela variação da direção da força magnética terrestre, ficavam sob a ação de forças de atrito geradas pelo eixo que produziam torques da mesma ordem de grandeza que aqueles devidos ao magnetismo terrestre. Para diminuir esses torques devidos ao atrito, tal que pudesse medir as variações diurnas do magnetismo terrestre, Coulomb mudou a suspensão das agulhas. Passou a adotar agulhas suspensas por finos fios de seda. Esse método já havia sido adotado por outros pesquisadores tais como Francesco Lana Terzi (1631-1687) em 1686, Lous em 1773 etc.[419] O problema é que esse instrumento ficou extremamente sensível, sendo afetado por qualquer perturbação que ocorria na sala onde estava a agulha suspensa. Em particular, ele auxiliou Jean-Dominique Cassini de Thury (1748-1845) com uma suspensão desse tipo nas pesquisas de Cassini sobre as variações diurnas do magnetismo terrestre. Em 1782 percebeu-se que quando ocorriam pequenas descargas elétricas ao redor do instrumento, a agulha magnética oscilava simultaneamente. Para evitar esse problema, Coulomb seguiu a sugestão de Ettiene François Gattey (1756-1819) de aterrar a agulha imantada. Para isso substituiu a suspensão com fio de seda por uma suspensão com um fino fio metálico, mantendo o restante do instrumento aterrado.[420] Foi esse fio metálico que passou a usar em suas futuras balanças elétricas.

Por ter trabalhado durante muitos anos na construção e no desenvolvimento de diversas balanças de torção para suas pesquisas magnéticas e elétricas, Coulomb certamente adquiriu um grande conhecimento de como funcionavam e do que era necessário fazer para obter resultados experimentais válidos e confiáveis com elas, sendo que não necessariamente apresentou todos os detalhes dos seus procedimentos e práticas experimentais nos relatos que apresentou em suas Memórias.[421]

11.5.4 Resultados Experimentais de Coulomb que Não Podiam Ser Comparados com Previsões Teóricas Anteriores

Existe um outro argumento que sugere fortemente que Coulomb de fato realizou as experiências e medidas elétricas que descreve com sua balança de torção. Caso tivesse obtido apenas que a força entre dois pequenos corpos eletrizados era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, poderia ser argumentado que ele estava sendo influenciado pela lei da gravitação universal de Newton.

[418][Gillmor, 1971a, págs. 146-150], [Heilbron, 1999, págs. 469-470], [Heering and Osewold, 2005] e [Martinez, 2006].

[419][Gillmor, 1971a, págs. 141-142 e 162-165] e [Heilbron, 1999, págs. 185-192 e 469].

[420][Gillmor, 1971a, págs. 146-150], [Heilbron, 1999, págs. 469-470], [Heering and Osewold, 2005] e [Martinez, 2006].

[421][Heilbron, 1994].

Porém, na Terceira Memória publicada em 1788, Coulomb estudou experimentalmente a perda de carga por uma esfera eletrizada utilizando sua balança de torção.[422] A partir dessas experiências chegou à seguinte equação:

$$-\frac{d\delta}{\delta} = mdt \ , \tag{11.17}$$

na qual δ representa a densidade superficial de eletricidade em uma esfera (proporcional à sua quantidade de carga), $d\delta$ a perda de eletricidade no tempo dt, sendo m uma constante. A integração dessa equação leva a uma queda exponencial da eletricidade na esfera em função do tempo t:

$$\delta = \delta_0 e^{-mt} \ , \tag{11.18}$$

onde δ_0 representa a densidade superficial inicial de eletricidade na esfera.

Nada disso era conhecido anteriormente. Equações desse tipo não haviam sido previstas para a eletricidade por outros autores. Nas palavras de Gillmor:[423]

> Havia uma série de fatores desconhecidos por Coulomb que afetam a perda de carga nos dielétricos.[424] Contudo, as leis que ele determinou em sua Terceira Memória são exatas, especialmente sua lei exponencial para a perda de carga.

Além disso, na Quinta e na Sexta Memória publicadas em 1789 e 1791, respectivamente, ele estudou a distribuição de carga na superfície de esferas condutoras eletrizadas em contato.[425] Essas esferas podiam ter o mesmo raio ou raios diferentes. Podiam também ser de mesmo material ou de materiais diferentes. Em particular, utilizou um plano de prova[426] para coletar um pouco de carga em diferentes pontos dessas esferas e mediu essa carga coletada com sua balança elétrica. Essas medidas certamente foram muito mais difíceis e delicadas do que suas experiências da Primeira Memória na qual obteve a força resultante entre duas esferas eletrizadas. Afinal de contas, além dos efeitos agora serem menores, havia também as dificuldades envolvidas na coleta de cargas pelo plano de prova e na introdução desse plano de prova eletrizado em sua balança de torção.

Os cálculos que Coulomb fez para comparar seus resultados experimentais com possíveis valores teóricos eram extremamente simples e aproximados, já que ainda não existia em sua época uma teoria matemática apropriada para prever como deveria ser a distribuição de cargas superficiais em diferentes pontos de esferas condutoras em contato. Essas contas detalhadas foram feitas pela primeira vez por Siméon Denis Poisson (1781-1840) em 1811-1812 utilizando a função potencial elétrico introduzida por Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) ao redor de 1783.[427] As diferenças encontradas entre as medidas experimentais de Coulomb e os cálculos teóricos exatos de Poisson foram de apenas alguns pontos percentuais.[428]

William Thomson (1824-1907), também conhecido como Lorde Kelvin, fez a seguinte avaliação:[429]

---

[422] [Coulomb, 1788e]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 14.

[423] [Gillmor, 1971a, pág. 198].

[424] [Nota de Gillmor:] Um fator, por exemplo, é a ionização do ar.

[425] Essas Memórias estão traduzidas nos Capítulos 18 e 20.

[426] Ver a Nota de rodapé 25 na página 26.

[427] [Poisson, 1812a], [Poisson, 1812b], [Poisson, 1813] e [Poisson, 1814].

[428] [Gillmor, 1971a, págs. 202-210], [Potier, 1884, págs. 198, 204 e 218-219], [Heilbron, 1999, págs. 494-500] e [Blondel and Wolff, 2011c].

[429] [Thomson, 1845], [Heering, 1992] e [Falconer, 2004].

> Encontramos nos artigos de Poisson sobre eletricidade a solução analítica dos problemas correspondentes aos casos mais importantes das pesquisas experimentais de Coulomb; a correspondência dos resultados é bem satisfatória, sendo que o rigor e a beleza da análise colocam, através da correspondência matemática, a teoria da eletricidade juntamente com a teoria da gravitação, no primeiro lugar das ciências físicas.

Blondel expressou-se da seguinte maneira:[430]

> Entre as muitas medições feitas por Coulomb, algumas delas não puderam ser comparadas com resultados numéricos deduzidos de leis matemáticas. É o caso da repartição da eletricidade na superfície de duas esferas com diâmetros diferentes, colocadas em contato e depois separadas. *Os resultados são complexos e impossíveis de prever analiticamente*. Só quando Poisson conseguiu, em 1811, realizar os cálculos de aproximação que tornavam possível calcular os resultados teóricos correspondentes a esses experimentos de Coulomb, é que sua precisão pôde ser avaliada em alguns pontos percentuais.

Concluindo, hoje em dia não tenho dúvidas de que Coulomb realizou as experiências que descreveu e que obteve os resultados experimentais que apresentou em seus trabalhos.

[430][Blondel, 1994, págs. 110-111] com minha ênfase em itálico.

Capítulo 12

Segunda Memória sobre Eletricidade e Magnetismo: Onde Determinamos de Acordo com Quais Leis Atuam o Fluido Magnético e o Fluido Elétrico, Seja por Repulsão ou por Atração

Por Coulomb[431]

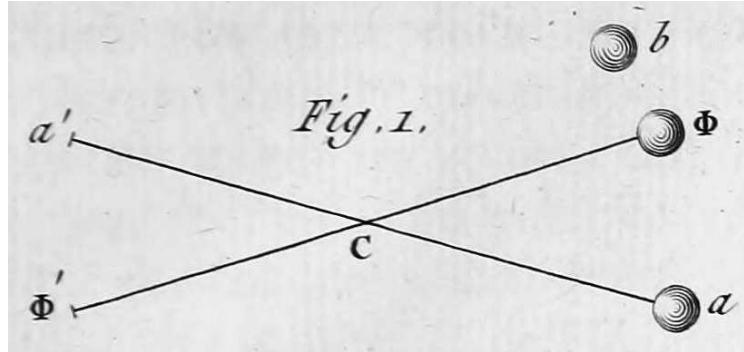
Como a balança elétrica que apresentei para a Academia, em junho de 1785,[432] permitia medir com exatidão e de uma maneira simples e direta a repulsão entre duas bolas que possuem uma eletricidade de mesma natureza, foi fácil provar, utilizando essa balança, que a ação repulsiva entre duas bolas eletrizadas com eletricidade do mesmo tipo e colocadas a diversas distâncias [entre si] seguia bem exatamente a razão inversa do quadrado das distâncias. Porém, quando quis me servir do mesmo meio para determinar a força atrativa entre duas bolas eletrizadas com uma eletricidade de natureza diferente, encontrei, ao me servir dessa balança para medir a atração entre as duas bolas, um inconveniente prático que não havia ocorrido na operação para medir a repulsão. A dificuldade prática é que, quando as duas bolas se aproximam ao se atrair, a força de atração que cresce, como veremos logo a seguir, na proporção da razão inversa do quadrado das distâncias, cresce frequentemente em uma proporção maior do que a força de torção [do fio de suspensão] que cresce apenas como o ângulo de torção. De maneira que foi apenas após termos falhado em muitas experiências, que finalmente viemos a impedir as bolas que se atraíam de se tocar utilizando um obstáculo dielétrico[433] que se opunha ao movimento da agulha. Porém, como nossa balança destina-se

[431]Esse trabalho foi apresentado em 1785 na Academia de Ciências da França e publicado em 1788, [Coulomb, 1788d], com tradução para o alemão em [Coulomb, 1890e] e com tradução parcial para o inglês em [Coulomb, 1935b].

[432]O trabalho de Coulomb com a descrição da balança elétrica está traduzido no Capítulo 10.

[433]No original: *idio-électrique*. Em português essa expressão também pode ser traduzida por idioelétrico, idielétrico ou isolante. Refere-se a substâncias que podem ser eletrizadas por atrito ou fricção. Ou seja, são substâncias que se comportam como um isolante ou mau condutor nas experiências usuais de eletrostática. Por exemplo, ao segurar um pedaço de âmbar na mão e atritá-lo contra um tecido, o âmbar fica eletrizado. O termo "idio" significa "próprio", "particular" ou "peculiar". Originalmente o termo "elétrico" foi introduzido por Gilbert (1544-1603) para caracterizar substâncias que se comportam como o âmbar, ou seja, que podem

frequentemente a medir ações menores do que um milésimo de grão,[434] a coesão da agulha com esse obstáculo atrapalha os resultados e obriga a um procedimento de tentativa e erro durante o qual uma parte da eletricidade é perdida.[435]

A Figura 1 e o cálculo a seguir ajudam a explicar no que consistem as dificuldades de operação e mostrarão ao mesmo tempo as precauções necessárias para que as experiências sejam bem sucedidas.

Seja aca' a posição natural da agulha quando o fio de torção ainda não está torcido; a representa a bola de sabugueiro[436] ligada à agulha aa' de natureza isolante; b é a bola suspensa através do furo da balança.[437] Ao eletrizar as duas bolas, uma com a eletricidade que designamos de *positiva* e a outra com a eletricidade que denominamos de *negativa*, elas se atrairão mutuamente. A bola a da agulha tendendo a se aproximar do globo b assumirá a posição $\Phi c \Phi'$. Essa posição será tal que a força de reação de torção representada por $ac\Phi$, ângulo esse pelo qual o fio de suspensão terá sido torcido, será igual à força de atração entre as duas bolas. Se essa força atrativa fosse proporcional à razão inversa do quadrado das distâncias [entre os centros das bolas eletrizadas], como encontramos para a força repulsiva em nossa Primeira Memória,[438] teríamos, ao fazer $ab = a$, $a\Phi = x$, D igual ao produto da massa elétrica das duas bolas,[439] e [ao supor] os arcos a e x muito pequenos para que eles possam medir a distância entre as duas bolas (de outra forma seria necessário considerar a corda desse arco para a distância, e o cosseno de sua metade para o braço da alavanca); teríamos, de acordo com essas suposições, para o equilíbrio entre a atração das duas bolas e a reação da torção, a fórmula

$$nx = \frac{D}{(a-x)^2} \ ,$$

ser eletrizadas por atrito, [Assis, 2010b, Seção 2.8: Nomenclatura de Gilbert: Corpos Elétricos e Não-Elétricos]. Ver ainda [Roller and Roller, 1953], [Roller and Roller, 1957] e [Roller, 1959]. Uma substância idielétrica é então aquela que é elétrica em virtude de suas próprias propriedades particulares, ou seja, que se comporta como um isolante devido à sua própria natureza ou composição química.

[434] Isto é, forças menores do que $5,2 \times 10^{-4}$ N.

[435] Ou seja, esse procedimento de tentativa e erro dura um certo tempo durante o qual parte da eletrização das bolas é perdida para o meio ambiente devido à condutividade do ar e dos suportes.

[436] Ver a Nota de rodapé 384 na página 200.

[437] Essa bola b fica sempre imóvel em relação ao solo.

[438] Essa Memória está traduzida no Capítulo 10.

[439] No original: D = *le produit de la masse électrique des deux balles*. Isto é, Coulomb está assumindo aqui que a força é diretamente proporcional ao produto das cargas elétricas nas duas bolas. Ele denomina a carga elétrica por "massa elétrica". Certamente essa suposição e essa denominação foram influenciadas pela lei da gravitação universal de Newton de acordo com a qual a força gravitacional é proporcional ao produto das massas dos dois corpos que estão interagindo, [Newton, 2008, Livro III].

ou

$$D = nx(a-x)^2 \ .$$

De onde resulta que quando $x = a$ ou 0, o valor de D será nulo, logo há um ponto Φ entre a e b no qual a grandeza D terá um valor *máximo*. O cálculo fornece para esse ponto $x = a/3$. Ao substituir esse valor de x na fórmula que representa D, no caso de equilíbrio, teremos $D = 4na^3/27$.[440] Consequentemente, todas as vezes em que D for maior do que $4na^3/27$, não haverá entre a e b uma posição Φ na qual a agulha possa permanecer em equilíbrio e [nesse caso] as bolas necessariamente se tocarão. Mas é necessário observar que, na prática, embora D seja menor do que $4na^3/27$, as bolas frequentemente se juntam, já que a flexibilidade das suspensões da agulha permite à agulha de oscilar e que, além de $a/3$, a força de atração aumenta em uma proporção maior do que a força de torção; de forma que, quando a bola Φ chega, devido à amplitude de sua oscilação, a uma distância x na qual D é maior do que $nx \cdot (a-x)^2$, as duas bolas continuam a se aproximar até que se tocam.

Foi ao me conduzir por essa teoria que consegui equilibrar, em distâncias diferentes, a força atrativa entre duas bolas eletrizadas, com a força de torção do meu micrômetro. Em seguida, ao comparar as várias experiências, concluí que a força atrativa entre duas bolas eletrizadas, uma com a eletricidade que denominados *positiva* e a outra com aquela que denominamos *negativa*, era inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre os centros dessas duas bolas, mesma proporção já encontrada para a força repulsiva.

Para garantir esse resultado tentei, para o caso da atração, um outro meio que, embora menos simples e menos direto que o primeiro, exige menos cuidados e precauções para ter sucesso; além disso, ele possui a vantagem aparente de apresentar experiências feitas com globos de um diâmetro muito grande, enquanto que na balança só podemos operar com globos pequenos. Mas essa vantagem é apenas aparente e veremos em seguida, nas diferentes Memórias que apresentarei sucessivamente à Academia, que com bolas tendo 2 ou 3 linhas de diâmetro [0,45 ou 0,68 cm] e utilizando da balança descrita em nossa Primeira Memória, podemos não apenas medir a massa total do fluido elétrico contida em um corpo que tem uma forma qualquer, mas ainda [podemos medir] a densidade elétrica de cada parte desse corpo.[441]

12.1 Segundo Método Experimental para Determinar a Lei de Acordo com a Qual um Globo com 1 ou 2 Pés de Diâmetro Atrai um Pequeno Corpo Carregado com uma Eletricidade de um Tipo Diferente da Sua

O método que vamos seguir é análogo àquele que empregamos no sétimo Volume dos *Savants étrangers* para determinar a força magnética de uma lâmina de aço em relação a seu compri-

[440]Temos $D = nx^3 - 2nax^2 + na^2x$. Logo, $dD/dx = 3nx^2 - 4nax + na^2$. Fazendo $dD/dx = 0$ obtemos duas raízes, $x = a$ e $x = a/3$. A primeira raiz faz com que $D = 0$. A segunda raiz faz com que $D = 4na^3/27$, como afirmado por Coulomb.

[441]Isto é, Coulomb vai medir não apenas o valor total da carga elétrica em um corpo, mas também a densidade superficial de carga em diferentes pontos de um condutor.

mento, espessura e largura.[442] Ele consiste em suspender uma agulha horizontalmente, sendo que somente sua extremidade esteja eletrizada e que, apresentada a uma certa distância de um globo carregado com uma eletricidade de uma natureza diferente,[443] é atraída e oscila devido à ação desse globo. Em seguida determinamos pelo cálculo, de acordo com o número de oscilações em um tempo dado, a força atrativa para distâncias diferentes, assim como determinamos a força da gravidade pelas oscilações de um pêndulo comum.[444]

Apresento aqui algumas observações que nos guiaram nas experiências que vão a seguir. Um fio de seda, tal como aquele que sai do casulo, e que pode aguentar até 80 grãos (0,424 g) sem se romper, possui uma flexibilidade de torção tal que se suspendermos horizontalmente em um fio semelhante com 3 polegadas (8,12 cm) de comprimento, no vazio, uma pequena placa circular, cujo peso e diâmetro sejam conhecidos, encontraremos pelo tempo das oscilações da pequena placa, de acordo com as fórmulas explicadas em uma Memória sobre a força de torção, impressa no Volume da Academia para o ano de 1784,[445] que ao agir com uma alavanca [tendo um braço] de 7 a 8 linhas [1,6 a 1,8 cm] para torcer a seda ao redor de

---

[442]Coulomb provavelmente está se referindo ao trabalho publicado no Volume 9 desse periódico que foi publicado em 1780 e que havia recebido o prêmio de 1777 da Academia de Ciências da França, [Coulomb, 1780] e [Coulomb, 1890c, Nota 6, pág. 84]. Esse trabalho encontra-se traduzido no Capítulo 5.

[443]Ou seja, a extremidade da agulha e o globo estão eletrizados com cargas de sinais opostos.

[444]O período T para as oscilações de ida e volta em um plano vertical de um pêndulo simples com comprimento ℓ e massa m, para pequenas amplitudes, devido apenas à ação gravitacional terrestre é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ , \tag{12.1}$$

onde g é o valor da aceleração de queda livre nesse local. O corpo de massa m sofre uma força gravitacional F nesse local dada por $F = mg$. Pela Equação (12.1) obtemos

$$F = mg = \frac{4\pi^2 \ell m}{T^2}\ . \tag{12.2}$$

Vemos então que a força gravitacional F atuando para baixo sobre o pêndulo é inversamente proporcional ao quadrado do período de oscilação T do pêndulo, ou seja, F é inversamente proporcional a T^2. Logo, essa força F também é inversamente proporcional ao quadrado do tempo t_n gasto pelo pêndulo para realizar um mesmo número n de oscilações, com $t_n = nT$. Ou seja, F é inversamente proporcional a t_n^2:

$$F = mg = \frac{4\pi^2 \ell m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \ell m n^2}{t_n^2}\ . \tag{12.3}$$

Por exemplo, se $T_A = 1\ s$ para um pêndulo A, vem que em um intervalo de tempo $t_A = 6\ s$ esse pêndulo vai realizar 6 oscilações de ida e volta cada uma. Por outro lado, se $T_B = 3\ s$ para um outro pêndulo B, então nesse mesmo intervalo de tempo de 6 s esse pêndulo B vai realizar 2 oscilações. Esse pêndulo B vai realizar 6 oscilações em um intervalo de tempo de $t_B = 6 \times 3\ s = 18\ s$, isto é, no triplo do intervalo de tempo que o pêndulo A gasta para realizar o mesmo número de 6 oscilações. Ou seja, assim como $T_B = 3T_A$, temos que $t_B = 3t_A$ para que os dois pêndulo realizem o mesmo número de oscilações.

A frequência $f = 1/T$ representa o número de oscilações por unidade de tempo. O número n de oscilações realizadas em um intervalo de tempo t_n é então dado por $n = ft_n = t_n/T$. Temos então pela Equação (12.3):

$$F = mg = \frac{4\pi^2 \ell m}{T^2} = 4\pi^2 \ell m f^2 = \frac{4\pi^2 \ell m}{t_n^2} n^2\ . \tag{12.4}$$

Vemos então que a força gravitacional F é proporcional ao quadrado do número de oscilações realizadas pelo pêndulo simples por unidade de tempo, ou seja, F é proporcional a f^2. Essa força F também é proporcional ao quadrado do número n de oscilações realizadas em um dado intervalo de tempo, ou seja, F é proporcional a n^2.

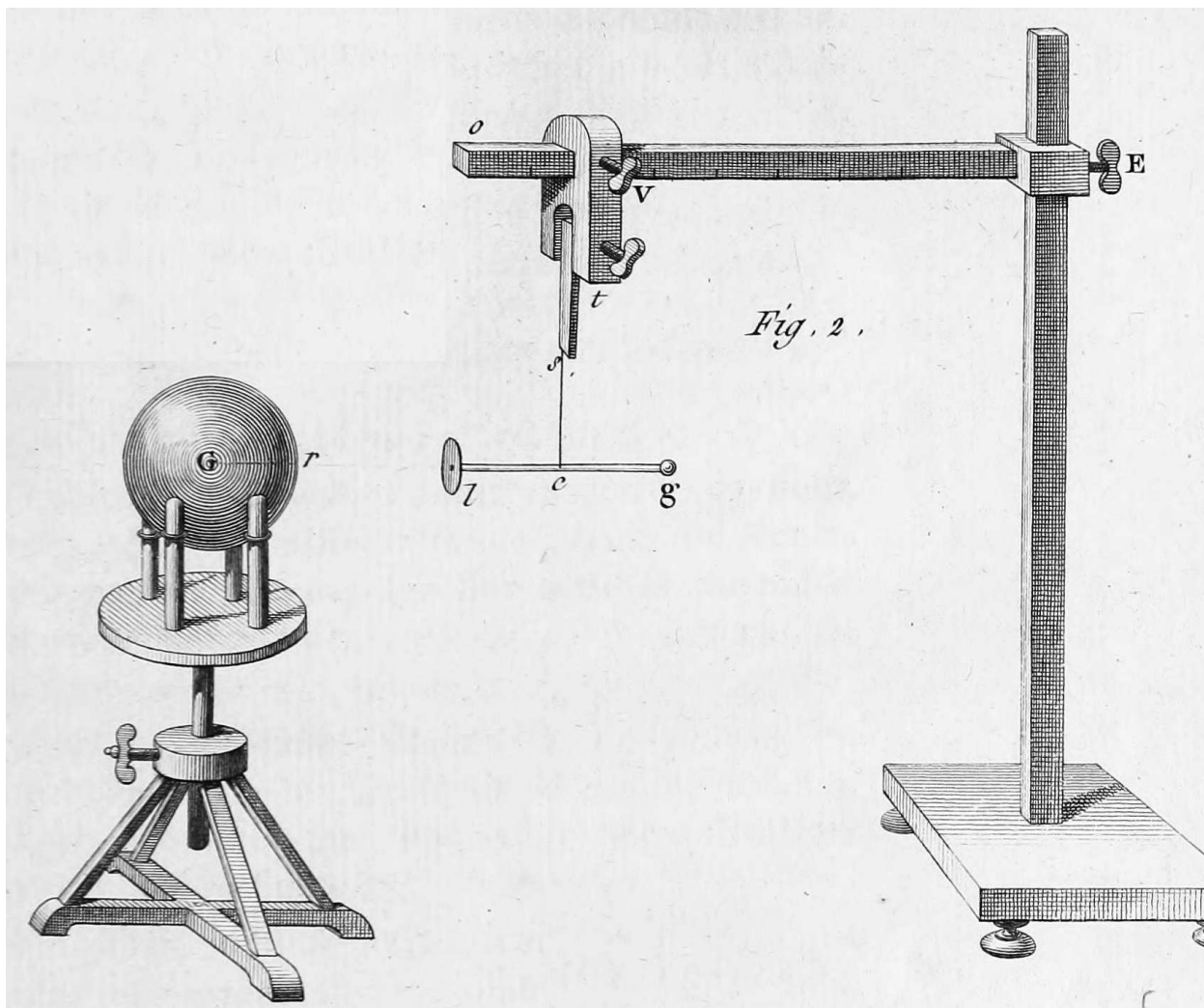
[445][Coulomb, 1787] com tradução para o inglês das Seções I e II em [Coulomb, 2012b] e [Coulomb, 2012c]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

seu eixo de suspensão será necessário empregar, para produzir um círculo inteiro de torção, na maioria das vezes apenas uma força de um sexagésimo de um milésimo de grão (0,0009 dinas).[446] Caso o fio de suspensão tenha o dobro de comprimento, ou 6 polegadas, será necessário apenas [uma força] de $\frac{1}{120.000}$ de grão. Assim, ao suspender horizontalmente uma agulha nessa linha de seda, quando a agulha estiver em um estado de repouso ou quando a seda estiver totalmente sem torção, caso, por meio de uma força qualquer, fizermos com que essa agulha realize oscilações cujas amplitudes não se afastem além de 20° ou 30° da linha na qual a torção é nula, a força de torção só poderá influenciar de uma maneira imperceptível sobre a duração das oscilações, mesmo que a força que produza essas oscilações seja de apenas $\frac{1}{100}$ de grão (0,52 dina).[447] Tendo dito isto, aqui vai como fizemos para determinar a lei de atração elétrica.

Suspendemos (Figura 2) uma agulha *lg* de goma-laca em um fio de seda *sc* de 7 a 8 polegadas de comprimento [18,9 a 21,7 cm], [composto] de um único fio, tal como sai do casulo.

[446]Isto é, uma massa $m = (1\ grão)/60.000 = 8,85 \times 10^{-10}\ kg$. Com $g = 9,8\ m/s^2$ vem que essa massa tem um peso $P = mg \approx 9 \times 10^{-9}\ N = 9 \times 10^{-4}\ dinas$.

Ver também a Nota de rodapé 405 na página 205.

[447]Ou seja, nesses casos Coulomb vai poder desprezar a força de torção do fio comparada com a força elétrica entre as bolas eletrizadas. O período das oscilações da agulha vai depender apenas da força elétrica entre as bolas eletrizadas, não dependendo da força de torção do fio de suspensão.

Fixamos na extremidade l perpendicularmente a essa agulha[448] um pequeno disco com 8 a 10 linhas (1,8 a 2,2 cm) de diâmetro, muito leve e obtido de uma folha de papel dourado.[449] O fio de seda é fixado em s, na extremidade inferior de uma pequena haste st, seca no forno e revestida de goma-laca ou de cera da Espanha.[450] Essa haste é presa em t por uma braçadeira que desliza ao longo da régua oE e que pode parar em qualquer lugar por meio do parafuso V.

G é um globo de cobre ou de papelão, que é coberto com folha de estanho, apoiado por quatro colunas de vidro revestidas de cera da Espanha e, para tornar o isolamento mais perfeito, tendo acima quatro bastões de cera da Espanha de 3 a 4 polegadas [8,1 a 10,8 cm] de comprimento. Essas quatro colunas são fixadas por suas partes inferiores a uma chapa colocada sobre um pequeno suporte ajustável que pode, como mostra a figura, ser colocado na altura que for mais cômoda para a experiência. A régua Eo também pode, por meio do parafuso E, ser colocada na altura conveniente.

Estando tudo preparado dessa maneira, colocamos o globo G de maneira que seu diâmetro

[448]No original aparece aqui *perpendiculairement à ce fil*. Certamente isso foi um lapso. Pela figura dá para ver que Coulomb quis dizer *perpendicularmente a essa agulha* lg, [Coulomb, 1890c, Nota 7, pág. 84].

[449]A agulha de goma-laca lg e o fio de seda sc comportam-se como isolantes. Já o disco de papel dourado l comporta-se como condutor.

[450]Ver a Nota de rodapé 383 na página 199.

horizontal Gr corresponda ao centro da placa l, afastada dele de algumas polegadas. Fornecemos uma faísca elétrica ao globo por meio da garrafa de Leiden,[451] tocamos a placa l com um corpo condutor, e a ação do globo eletrizado sobre o fluido elétrico da placa não eletrizada fornece a essa placa uma eletricidade de natureza diferente daquela do globo, de maneira que, ao retirar o corpo condutor, o globo e a placa se atraiam mutuamente.[452]

Experiência

O globo G tinha 1 pé (32,48 cm) de diâmetro, a placa l tinha 7 linhas (1,58 cm) [de diâmetro], a agulha de goma-laca lg tinha 15 linhas (3,38 cm) de comprimento; o fio de suspensão sc era um fio de seda como aquele que sai do casulo com 8 linhas de comprimento.[453] Quando a braçadeira estava no ponto o, a placa l tocava o globo em r e, na medida em que afastávamos a braçadeira em direção ao ponto E, a placa se afastava do centro do globo de uma quantidade dada pelas divisões 0, 3, 6, 9 e 12 polegadas [0 a 32,5 cm] e, estando o globo eletrizado com uma eletricidade chamada de *eletricidade positiva*, a placa com eletricidade negativa pelo procedimento indicado, obtivemos [os seguintes resultados]:

Primeiro teste. A placa l, colocada a 3 polegadas (8,12 cm) de distância da superfície do globo ou a 9 polegadas (24,36 cm) de seu centro, realizou 15 oscilações em 20 s.[454]

Segundo teste. A placa l afastada de 18 polegadas (48,72 cm) do centro do globo, tivemos 15 oscilações em 40 s.

Terceiro teste. A placa l afastada de 24 polegadas (64,97 cm) do centro do globo, tivemos 15 oscilações em 60 s.

12.1.1 Explicação e Resultado Dessa Experiência

Quando todos os pontos de uma superfície esférica agem por uma força atrativa ou repulsiva em razão inversa do quadrado das distâncias sobre um ponto colocado a uma distância qualquer dessa superfície, sabemos que a ação é a mesma como se toda a superfície esférica estivesse concentrada no centro da esfera.[455]

---

[451] Ver o Capítulo 12, A Garrafa de Leiden e os Capacitores, de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

[452] Isto é, a placa e o globo ficam eletrizados com cargas de sinais opostos.

Inicialmente o globo condutor G e a placa condutora l estavam descarregados. O globo foi eletrizado pela faísca vinda de uma garrafa de Leiden. Com isso a placa l que estava isolada da Terra fica polarizada, com sua parte mais próxima do globo ficando eletrizada com uma carga de sinal oposto à carga do globo, e com sua parte mais distante do globo ficando eletrizada com uma carga de sinal igual à carga do globo. Quando a placa foi aterrada na presença do globo, a carga da parte mais distante da placa foi neutralizada. Ao retirar o aterramento, a placa ficou eletrizada com uma carga de sinal oposto à carga do globo, havendo então uma atração entre eles, [Assis, 2010b, Seção 7.5].

[453] As dimensões da Figura 2 sugerem que o fio de seda sc tinha 8 polegadas (21,656 cm) de comprimento, em vez das 8 linhas (1,80 cm) escritas aqui. Certamente isso foi um lapso de Coulomb, já que anteriormente ao mencionar a Figura 2 havia dito que o fio de seda sc tinha 7 ou 8 polegadas de comprimento.

[454] O significado de cada oscilação para Coulomb corresponde à metade do período moderno de uma oscilação completa, ver as Seções 6.3 e 8.1 nas páginas 139 e 179, respectivamente. Logo, nesse primeiro teste o período moderno de ida e volta para cada oscilação é dado por $(2 \times 20s)/15 = 2,666\ s = 2,666$ segundos.

[455] O ponto considerado aqui sobre o qual está atuando a força da superfície esférica está localizado fora dessa superfície. Esse teorema foi provado por Newton no *Principia*, [Newton, 1990, págs. 221-222]:

> *Seção XII: As forças atrativas de corpos esféricos*
>
> *Proposição 70. Teorema 30: Se para cada ponto de uma superfície esférica tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem com o quadrado das distâncias a partir desses pontos, afirmo*

Porém, como na nossa experiência a placa l tem apenas 7 linhas de diâmetro e como nos testes sua menor distância ao centro da esfera era de 9 polegadas, podemos, sem erro perceptível, supor todas as linhas que vão do centro da esfera até um ponto da placa, como sendo paralelas e iguais. Consequentemente, a ação total da placa pode ser suposta como estando reunida em seu centro, assim como a ação do globo. De forma que, nas pequenas oscilações da agulha, a ação que faz a agulha oscilar será uma quantidade constante para uma distância dada e agirá ao longo da direção que liga os dois centros. Assim, ao denominar de φ à força, T ao tempo de um certo número de oscilações, teremos T proporcional a $1/\sqrt{\varphi}$.[456] Porém, se d é a distância Gl do centro do globo até o centro da placa, e se as forças atrativas forem proporcionais ao inverso do quadrado entre as distâncias ou a $1/d^2$, resultará disso que T será proporcional a d ou à distância.[457] De forma que, ao variar as distâncias nos nossos testes, o tempo para um mesmo número de oscilações deve ser proporcional à distância do centro da placa ao centro do globo. Vamos comparar essa teoria com a experiência.

	Distância entre os centros	Duração de 15 oscilações
Primeiro teste	9 polegadas	20 s
Segundo teste	18 polegadas	41 s
Terceiro teste	24 polegadas	60 s

As distâncias são aqui como os números 3, 6, 8.[458]

Os tempos para um mesmo número de oscilações :: 20, 41, 60.[459]

Pela teoria eles teriam de ser :: 20, 40, 54.

Assim, nesses três testes, a diferença entre a teoria e a experiência é de 1/10 para o último teste comparada ao primeiro e quase nula para o segundo comparado ao primeiro. Porém é necessário notar que foram necessários aproximadamente quatro minutos para realizar os três testes e que, embora a eletricidade tenha se mantido por um tempo bem longo no dia dessa experiência, contudo ela perdia 1/40 de ação por minuto. Veremos, em uma Memória que segue a essa que apresento hoje, que quando a densidade elétrica não é muito grande, a ação elétrica entre dois corpos eletrizados diminui ao longo de um tempo dado, exatamente como a densidade elétrica ou como a intensidade da ação. Assim, como nossos testes duraram quatro minutos e como a ação elétrica perdia 1/40 por minuto, do primeiro ao último teste,

que um corpúsculo localizado dentro daquela superfície não será atraído de maneira alguma por aquelas forças.

[...]

Proposição 71. Teorema 31: Supondo-se o mesmo que acima, afirmo que um corpúsculo localizado fora da superfície esférica é atraído em direção ao centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até este centro.

[456] Ver a Equação (12.3) na Nota de rodapé 444 na página 222.

[457] Vou usar α como símbolo de proporcionalidade. Como visto na Nota de rodapé 444 na página 222, a força φ que causa pequenas oscilações em um pêndulo simples é inversamente proporcional à raiz quadrada do período T de oscilação do pêndulo, ou seja, $T \; \alpha \; 1/\sqrt{\varphi}$. Logo, caso $\varphi \; \alpha \; 1/d^2$, teremos

$$T \; \alpha \; \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \; \alpha \; \frac{1}{\sqrt{(1/d^2)}} \; \alpha \; d \; .$$

Ou seja, nesse caso T será proporcional à distância d, como afirmado por Coulomb.

[458] Isto é, as distâncias são proporcionais aos números 3, 6 e 8.

[459] Isto é, os tempos são proporcionais aos números 20, 41 e 60.

a ação devida à intensidade da densidade elétrica, independente da distância, deve ter sido diminuída aproximadamente de 1/10. Consequentemente, para ter o tempo da duração corrigida de 15 oscilações no último teste, é necessário fazer $\sqrt{10} : \sqrt{9} :: 60\ s$: a quantidade procurada, a qual encontraremos como sendo de 57 segundos,[460] que difere de apenas 1/20 do número de 60 segundos encontrado pela experiência.

Chegamos então, por um método absolutamente diferente do primeiro,[461] a um resultado semelhante. Podemos assim concluir que a atração recíproca do fluido elétrico chamado de *positivo* sobre o fluido elétrico denominado comumente de *negativo*, é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias; da mesma forma que havíamos encontrado, na nossa Primeira Memória, que a ação recíproca entre um fluido elétrico de mesma natureza é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias.[462,463]

12.1.2 Primeira Observação

Percebe-se que é muito fácil, ao utilizar o método anterior, de obter por meio das oscilações da agulha elétrica as leis da força repulsiva, assim como acabamos de determinar as leis da força atrativa. Com efeito, se fizermos a placa tocar o globo eletrizado, ela vai adquirir uma eletricidade de mesma natureza que aquela do globo, e será repelida, de maneira que a agulha vai oscilar devido a essa repulsão em uma posição absolutamente oposta à primeira,[464] e o número das oscilações, em um tempo dado, comparado com a distância entre o centro da placa e o centro do globo, tornará conhecida a força repulsiva, utilizando o mesmo cálculo que acabamos de seguir para obter a força atrativa. Contudo, devemos dizer que todas as experiências nas quais queremos fazer com que o fluido elétrico atue por sua força repulsiva são executadas, como veremos a seguir, de uma maneira mais simples, mais exata e mais cômoda, por meio da balança descrita em nossa Primeira Memória.

---

[460] Isto é, seja x a quantidade procurada. Temos de resolver a seguinte equação:

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \frac{60\ s}{x} \ .$$

Dessa equação vem que $x = (180\ s)/\sqrt{10} = 56,92\ s \approx 57\ s$.

[461] No primeiro método descrito no início desse trabalho Coulomb havia encontrado a variação da força com a distância comparando os ângulos de torção do fio de suspensão para distâncias diferentes entre as esferas eletrizadas, medindo esses ângulos com as esferas em repouso entre si.

[462] [Nota de Potier:] Coulomb não forneceu informações suficientes para que possamos estimar as cargas do globo e do disco de papel dourado. Mas é claro que a experiência só pode ser bem sucedida, nessas condições, caso a carga do disco seja muito pequena em relação à carga do globo. Considerando o disco como um ponto, a atração do globo sobre o disco é dada por

$$\frac{eM}{d^2}\left[1 + \frac{e}{M}\frac{R^3}{d}\frac{(2d^2 - R^2)}{(d^2 - R^2)^2}\right] \ .$$

As variações do fator entre parênteses só serão desprezíveis caso e (a carga do disco) seja uma fração muito pequena de M (a carga do globo).

[463] Para uma dedução desse resultado apresentado por Potier na Nota de rodapé 462 ver, por exemplo, [Maxwell, 1954, Vol. I, §160, págs. 250-252].

[464] No caso da Figura 2, caso o disco l e o globo G fiquem eletrizados com cargas de mesmo sinal, então o disco vai ser repelido pelo globo e o fio de seda cs ficará torcido. No equilíbrio o disco l ficará o mais afastado possível de G, tal que a ordem das letras nesse caso seria $Grgcl$. A agulha poderia então oscilar ao redor dessa nova posição de equilíbrio.

12.1.3 Segunda Observação

Se quiséssemos nos servir do mesmo método para determinar a quantidade de eletricidade que é compartilhada entre um globo eletrizado e um corpo condutor que tenha um formato qualquer, ao ser colocado em contato com esse globo, aqui vai como se poderia fazer isso. Após ter eletrizado o globo e determinado, nesse primeiro estado, através das oscilações, sua ação elétrica sobre a placa da agulha, para uma distância dada, logo em seguida fazemos com que o globo seja tocado pelo corpo condutor que deve adquirir uma porção da eletricidade do globo. Ao separar o corpo do globo, determinamos mais uma vez, pelas oscilações da agulha, a quantidade de eletricidade que sobrou no globo.[465] A diferença dessa quantidade com aquela que o globo possuía antes do contato vai fornecer a quantidade adquirida pelo corpo que entrou em contato. É supérfluo avisar que experiências semelhantes só podem ser bem sucedidas em dias muito secos, nos quais os corpos isolados perdem lentamente sua eletricidade; que é necessário levar em conta essa diminuição da eletricidade na redução das experiências apresentadas a seguir; que é necessário evitar que se forme qualquer corrente de ar na sala onde trabalhamos; afastar todo corpo condutor de pelo menos 3 pés [97 cm] do corpo eletrizado e até mesmo da agulha. Porém repetimos que, quando formos determinar na sequência, tanto pela experiência quanto pela teoria, a maneira pela qual o fluido elétrico se distribui nas diferentes partes do corpo, veremos que todas essas experiências são muito mais bem sucedidas com a balança elétrica do que pelo método das oscilações que acabamos de explicar.

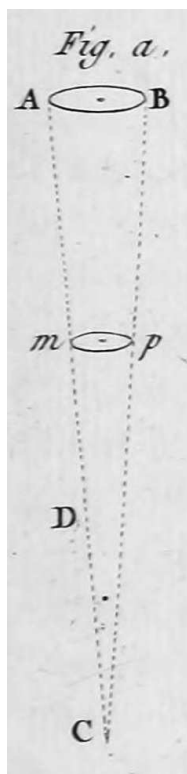
12.2 Experiências para Determinar a Lei de Acordo com a Qual Atua o Fluido Magnético, Seja por Atração ou por Repulsão

Os corpos imantados atuam um sobre o outro por atração e por repulsão a distâncias finitas, assim como os corpos eletrizados. O fluido magnético parece possuir, se isso não for por sua natureza, mas ao menos por essa propriedade, uma analogia com o fluido elétrico. De acordo com essa analogia, podemos supor que esses dois fluidos atuam de acordo com as mesmas leis. Em todos os outros fenômenos de atração ou de repulsão que a natureza nos apresenta, seja na coesão dos corpos, seja em suas elasticidades, seja nas afinidades químicas, as forças de atração e de repulsão parecem atuar apenas a distâncias muito pequenas; de onde pareceria resultar que elas não seguem as mesmas leis que a eletricidade e o magnetismo. De fato, a teoria e o cálculo da atração e repulsão entre os elementos dos corpos nos ensina que todas as vezes em que as moléculas elementares dos corpos se atraem ou se repelem por forças que diminuem em uma razão menor do que o cubo das distâncias, por exemplo, como as distâncias, os corpos podem agir uns sobre os outros a distâncias finitas. Porém, no caso em que a ação entre as moléculas diminui na proporção do cubo das distâncias ou em uma razão maior, nesse caso os corpos só podem agir uns sobre os outros a distâncias infinitamente

[465]Coulomb está aqui assumindo que a força exercida pelo globo sobre uma placa eletrizada é proporcional à quantidade total de carga elétrica que ele possui.

pequenas.[466,467]

466[Nota de Coulomb:] *Sobre a ação atrativa e repulsiva entre os corpos de acordo com a lei das distâncias.*

A Figura a representa um cone ou uma pequena pirâmide muito pontuda na qual todas as partes atraem o ponto C de acordo com a razão inversa $(n+2)$ das distâncias [isto é, com a força sendo inversamente proporcional à distância elevada à potência $(n+2)$].

Seja $x = Cp$, então a ação da zona circular pm sobre o ponto C será $mdx \cdot x^2/x^{2+n}$. Logo a integral será $\frac{m}{1-n}\left(k + x^{1-n}\right)$. Para obter k, é necessário supor a pirâmide truncada, ou que a ação desapareça em D quando $x = CD = A$, o que fornece para a integração completa $\frac{m}{1-n}(-A^{1-n} + x^{1-n})$, onde é necessário notar que quando A é igual a 0, caso n seja maior do que 1, [então] A^{1-n} será igual a $1/0$, ou infinito; caso n seja menor do que 1 [e ainda supondo $A = 0$], nesse caso (A^{1-n}) será igual a 0; ou, se quisermos, toda a força atrativa será igual a $mx^{1-n}/(1-n)$.

Isso quer dizer que, no caso em que n é maior do que 1, ou quando a repulsão ou atração diminui em uma razão igual ou maior do que o cubo das distâncias, o valor da constante é infinito em relação ao valor da variável que exprime a maior ou menor extensão do cone. Dessa maneira, a atração ou repulsão só ocorre no ponto de contato, e a ação das partes afastadas é infinitamente pequena em relação à ação das partes em contato. Porém, no caso em que n é menor do que 1, isto é, todas as vezes em que a ação diminui em uma razão menor do que o cubo das distâncias, nesse caso a ação das partes afastadas influi sobre a ação total que é nula para uma pirâmide infinitamente pequena, e proporcional a x^{1-n} para a pirâmide cujo comprimento é x.

Parece resultar desse cálculo que a coesão, a elasticidade e todas as afinidades químicas nas quais os elementos dos corpos só parecem atuar muito próximos do ponto de contato, e nas quais a atração eletiva parece depender da forma desses elementos, só podem agir mutuamente em uma razão muito próxima da

Talvez vamos ter oportunidade de voltar a esse assunto na sequência de nossas Memórias sobre eletricidade.

Empregamos nessa nova pesquisa dois métodos para determinar pela experiência de acordo com qual lei age o fluido magnético. O primeiro desses métodos consiste em suspender uma agulha imantada, apresentando a ela ao longo de seu meridiano magnético uma outra agulha imantada, colocada convenientemente, e determinando pelo cálculo e pela observação, a distâncias diferentes, com qual força o fluido magnético de uma das agulhas age sobre o fluido magnético da outra. No segundo método, utilizamos uma balança magnética, aproximadamente similar à nossa balança elétrica, descrita na Primeira Memória. Porém, antes de apresentar os detalhes de nossas experiências, é necessário lembrar de algumas propriedades conhecidas das agulhas imantadas que nos serão úteis.

Uma agulha de 0 a 24 polegadas (0 a 64,97 cm) de comprimento, feita de bom aço e bem temperada, imantada pelo método do toque duplo, tal como o Sr. Aepinus descreveu e praticou de acordo com sua excelente teoria do magnetismo e da eletricidade,[468] adquire um polo em cada extremidade. Seu centro magnético[469] se localiza aproximadamente em seu centro.[470]

No caso de duas agulhas imantadas, os polos de mesmo nome se repelem e os polos de um nome diferente se atraem. Essa atração ou repulsão aumenta na medida em que diminui a distância entre as extremidades das agulhas.

Se suspendermos horizontalmente uma agulha imantada de modo que ela possa girar livremente ao redor de seu centro, ela apontará sempre na mesma direção, a qual chamamos de seu *meridiano magnético*. Esse meridiano formará um ângulo com o meridiano do mundo.[471] Esse ângulo vai variar um pouco durante o dia, de acordo com a hora, com uma espécie de movimento periódico. Ele variará a cada ano, por um outro movimento que provavelmente é igualmente periódico, mas cuja duração, para cada ponto da Terra, ainda nos é desconhecida.

Caso uma agulha, suspensa dessa maneira horizontalmente, seja colocada em oscilação, ela se afastará igualmente dos dois lados de seu meridiano magnético; e ela voltará sempre para lá, por uma força que é fácil de determinar, se observarmos a duração das oscilações e se conhecermos a forma e o peso da agulha (ver o sétimo Volume dos *Savants étrangers, Mémoires de l'Académie*).[472]

---

razão inversa do cubo das distâncias. Além disso, talvez todas as afinidades químicas dependam de duas ações, uma repulsiva e outra atrativa, análogas às ações que encontramos na eletricidade e no magnetismo.

[467] Na tradução em alemão desse trabalho de Coulomb aparece uma Nota com alguns esclarecimentos adicionais, [Coulomb, 1890e, Nota 9, pág. 85]. Lá se afirma que o caso em que as forças diminuem de acordo com o cubo das distâncias não é imediatamente resolvido pela consideração feita por Coulomb na Nota de rodapé, pois para $n = 1$ e $A = 0$ é obtida a forma indefinida 0^0. Mas como para $n = 1$ a integração da expressão diferencial estabelecida por Coulomb, a saber, $mdx \cdot x^2/x^3 = mdx/x$, leva ao valor $m(\ln x - \ln A)$, vemos que também nesse caso, para $A = 0$, o valor da constante $-\ln A$ é infinitamente grande em relação ao valor da variável $\ln x$. Logo a apresentação dada por Coulomb na Nota de rodapé também é correta nesse caso em que $n = 1$ e $A = 0$.

[468] Ver a Seção 4.6 e a Nota de rodapé 147 nas páginas 43 e 69, respectivamente.

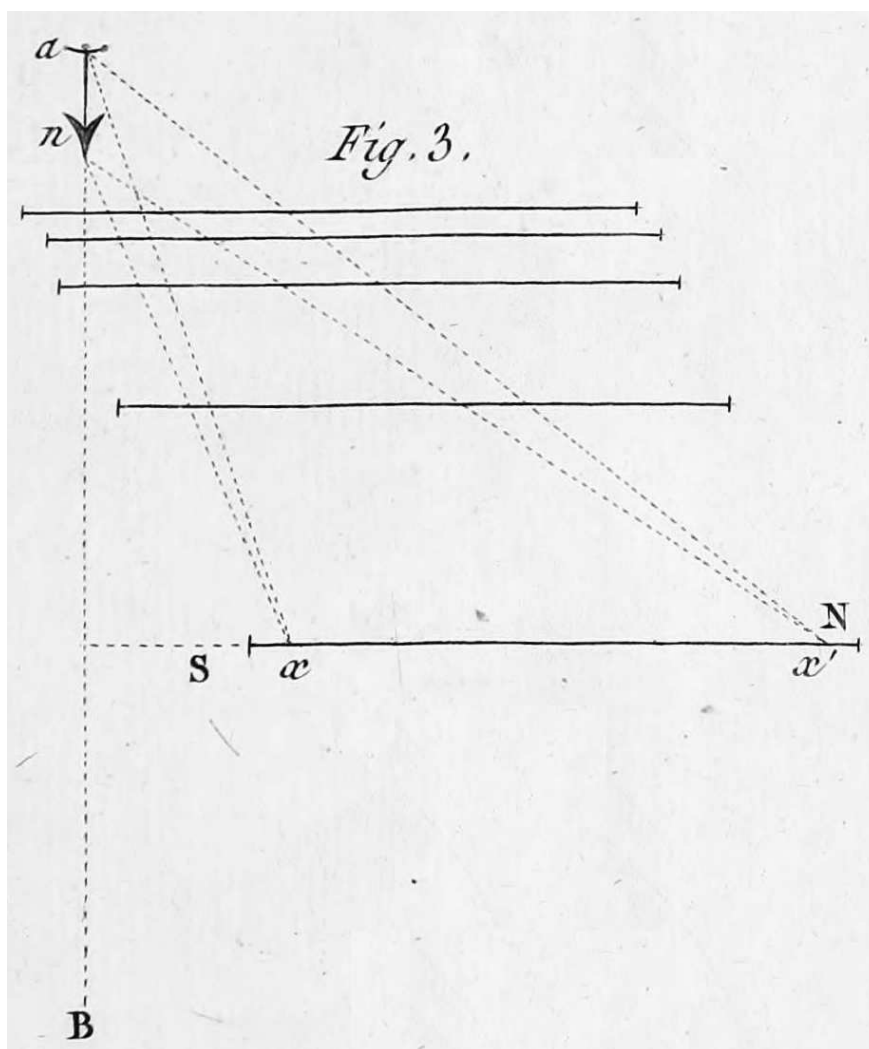
[469] Ver a Nota de rodapé 112 na página 55.

[470] Isto é, o centro magnético vai estar aproximadamente no meio da agulha, em seu ponto central.

[471] Ver a Nota de rodapé 95 na página 51. Esse ângulo é chamado de declinação magnética.

[472] Ver a Nota de rodapé 442 na página 222.

12.2.1 Preparação das Experiências

Peguei um fio de aço excelente, passado pela fieira.[473] Ele tinha 25 polegadas (67,68 cm) de comprimento, e $1\frac{1}{2}$ linha (0,33 cm) de diâmetro. Imantei-o pelo método de toque duplo: seu centro magnético ficou próximo de seu centro. Em seguida suspendi, por meio de um fio de seda, tal como sai do casulo, de 3 linhas de comprimento,[474] uma agulha imantada com 3 polegadas (8,12 cm) de comprimento. Quando essa agulha ficou em repouso, tracei seu meridiano magnético, o qual prolonguei até 2 pés [65 cm] de distância do centro de suspensão. Em seguida tracei perpendiculares sobre esse meridiano magnético, Figura 3.[475]

[473]Ver a Nota de rodapé 330 na página 172.

[474]Novamente deve haver um lapso aqui, assim como descrito na Nota de rodapé 453 na página 225. Nesse caso o fio de seda deve ter 3 polegadas (8,12 cm) de comprimento, em vez de 3 linhas (0,68 cm).

[475]Essas linhas que foram traçadas perpendicularmente ao meridiano magnético também eram horizontais. O meridiano magnético é representado pela linha anB da Figura 3. O fio imantado que vai interagir com a agulha an é representado por SN. Seus polos ou centros de ação estão representados pelos pontos x e x'. Coulomb vai mostrar que eles não estão localizados exatamente nas extremidades do fio. Vemos por essa Figura 3 que a distância nx entre o polo Norte da agulha e o polo Sul do fio é sempre menor do que a distância nx' entre o polo Norte da agulha e o polo Norte do fio. Ou seja, a maior interação entre o fio e a agulha ocorre entre seus polos opostos. Para que a agulha não seja desviada de seu meridiano magnético pelo fio imantado, a força resultante sobre seus polos deve estar ao longo desse meridiano.

Coloquei meu fio de aço ao longo dessas perpendiculares e o fiz deslizar até que a agulha *na* retomou a direção de seu meridiano magnético, assim como ela estava orientada naturalmente antes que o fio de aço fosse apresentado para ela. Observei em seguida, quando a agulha parava sobre seu meridiano, [e] dependendo se meu fio imantado estivesse mais ou menos afastado da agulha suspensa, de quanto a extremidade desse fio ultrapassava o meridiano magnético, ou ficava na parte interna [do meridiano magnético].

Primeira Experiência[476]

	Distância do fio até a extremidade da agulha	A extremidade [do fio imantado] ultrapassa o meridiano magnético de
Primeiro teste	1 polegada	+10 linhas $(+2,25$ cm)
Segundo teste	2 polegadas	+9 linhas $(+2,03$ cm)
Terceiro teste	4 polegadas	+8 linhas $(+1,80$ cm)
Quarto teste	8 polegadas	−4 linhas $(-0,90$ cm)
Quinto teste	16 polegadas	−42 linhas $(-9,49$ cm)

Segunda Experiência

Suspendi horizontalmente uma agulha imantada de 2 polegadas [5,4 cm] de comprimento por seu centro. Livre e solicitada apenas pela força magnética do globo terrestre, ela realizava 34 oscilações em 60 segundos. Utilizei-me novamente do mesmo fio imantado da experiência anterior, que tinha 25 polegadas de comprimento: porém, em vez de colocá-lo horizontalmente e perpendicularmente ao meridiano magnético, como acabei de fazer, ele foi colocado verticalmente nesse meridiano a 2 polegadas (5,4 cm) de distância da extremidade da agulha suspensa.[477] O polo Sul do fio vertical correspondia ao polo Norte da agulha e em seguida, ao baixá-lo verticalmente, sempre à distância de 2 polegadas da extremidade da agulha, contamos o número de oscilações que a agulha fazia em 60 segundos, dependendo se a extremidade do fio de aço estava mais ou menos abaixo do nível da agulha. Aqui vai o resultado dessa experiência.

	A extremidade do fio	Número de oscilações em 60 s
Primeiro teste	no nível da agulha	120
Segundo teste	abaixo por 6 linhas [1,356 cm]	122
Terceiro teste	abaixo por 1 polegada [2,707 cm]	122
Quarto teste	abaixo por 2 polegadas [5,414 cm]	115
Quinto teste	abaixo por 3 polegadas [8,121 cm]	112
Sexto teste	abaixo por 4 polegadas [10,828 cm]	98
Sétimo teste	abaixo por 8 polegadas [21,656 cm]	39

[476]O sinal + na próxima Tabela indica que a extremidade do fio ultrapassou o meridiano magnético da agulha. Já o sinal − indica que a extremidade do fio está antes do meridiano magnético, como ilustrado na Figura 3. Esses sinais não foram incluídos por Potier na reimpressão dessa Memória de Coulomb, [Potier, 1884, pág. 128]. Quando Coulomb fala da distância do fio até a extremidade da agulha, deve-se entender a menor distância entre a extremidade n da agulha e qualquer ponto ao longo de uma reta infinita passando ao longo do fio. No caso da Figura 3, essa distância é medida ao longo da reta anB. Ela é medida entre a extremidade n da agulha e o cruzamento dessa reta anB com a reta ortogonal a ela passando ao longo do fio SN.

[477]Ver a Nota de rodapé 476 para o significado dessa distância entre o fio e a extremidade da agulha.

Terceira Experiência

Suspendemos uma agulha de 4 linhas (0,90 cm) de comprimento no lugar da primeira. O fio de aço foi colocado a 3 polegadas (8,12 cm) da extremidade dessa agulha, verticalmente, como na experiência anterior, da qual seguimos todos os procedimentos. A agulha livre, sendo solicitada apenas pela força magnética da Terra, realizava 53 oscilações em 60 segundos.

	A extremidade do fio de aço	Número de oscilações em 60 s
Primeiro teste	no nível da agulha	152
Segundo teste	abaixo por 1 polegada [2,707 cm]	152
Terceiro teste	abaixo por 2 polegadas [5,414 cm]	148
Quarto teste	abaixo por 4 polegadas [10,828 cm]	120
Quinto teste	abaixo por 8 polegadas [21,656 cm]	58

12.2.2 Explicação e Resultado Dessas Três Experiências

As três experiências anteriores provam que o centro de ação[478] de cada metade de nosso fio está situado a uma distância muito pequena da extremidade desse fio. De forma que, no nosso fio de aço com 25 polegadas de comprimento, podemos, sem erro perceptível, supor todo o fluido magnético condensado perto da extremidade desse fio, sobre 2 ou 3 polegadas de comprimento. De fato, na primeira experiência, o fio de aço é colocado horizontalmente e perpendicularmente à direção do meridiano magnético ao longo do qual se encontra a agulha suspensa. Essa agulha é solicitada por duas forças, a força magnética do globo terrestre, que a mantém no meridiano, e a força magnética dos diferentes pontos do fio de aço imantado. Mas como, na nossa primeira experiência, a agulha se encontra, em todos os testes, orientada ao longo de seu meridiano magnético, resulta que todas as forças magnéticas do fio de aço de 25 polegadas de comprimento, agindo sobre a agulha, estão em equilíbrio entre si: assim, nos três primeiros testes, nos quais as distâncias são de 1, 2 e 4 polegadas, as forças magnéticas das últimas 8 a 10 linhas da extremidade do fio, que ultrapassam o meridiano, estão em equilíbrio com as forças de todo o restante do fio; de modo que parece que podemos aproximadamente supor que a metade do fluido magnético, da qual a metade do fio está carregada, está concentrada próxima das últimas dez linhas de sua extremidade.[479]

A segunda e a terceira experiência fornecem os mesmos resultados. Nessas duas experiências, o fio de aço é colocado verticalmente no meridiano magnético da agulha. Consequentemente, a ação da parte superior do fio estando direcionada muito obliquamente em relação à agulha suspensa, além de agir a uma grande distância, deve ter pouca influência sobre as oscilações da agulha. Porém, vemos dessas duas experiências que o maior número de oscilações da agulha suspensa ocorre quando a extremidade do fio estava um pouco menos de 1 polegada abaixo do nível da agulha suspensa: assim, a força média da metade inferior do fio de aço tinha a resultante localizada a 8 ou 10 linhas acima de sua extremidade, como

[478]No original: *centre d'action*. Isto é, o polo magnético.

[479]No original (minha ênfase em itálico): "les forces magnétiques des 8 à 10 dernières lignes de l'extrémité de l'*aiguille*, qui dépassent le méridien, sont en équilibre avec les forces de tout le reste de l'*aiguille*; en sorte qu'il paraît que l'on peut à peu près supposer que la moitié du fluide magnétique, dont la moitié de l'*aiguille* est chargée, est concentrée vers les dix dernière lignes de son extrémité." Me parece que por um lapso Coulomb escreveu sobre a extremidade da agulha e sobre todo o restante da agulha, quando de fato estava se referindo à extremidade do fio e ao restante do fio (cujas torques sobre a agulha se equilibram). Devido a isso, escrevi três vezes "fio" no final dessa frase em vez de "agulha".

acabamos de encontrar pela primeira experiência, de onde resulta que no fio de aço de 25 polegadas de comprimento que utilizamos, e que havia sido imantado pelo método de toque duplo, podemos, sem erro perceptível, supor que o fluido magnético está concentrado a 10 linhas de sua extremidade. Era necessário obter esse primeiro resultado antes de tentar determinar a lei de acordo com a qual a atração e a repulsão ocorrem em relação à distância: veremos, em outra Memória, que a concentração do fluido magnético próxima da extremidade das agulhas pelo método de toque duplo é uma consequência necessária dessa maneira de imantar.

12.3 O Fluido Magnético Atua por Atração ou Repulsão em uma Razão Composta Diretamente da Densidade do Fluido e Inversamente do Quadrado da Distância Entre Suas Moléculas

Não há necessidade de provar a primeira parte dessa proposição;[480] vamos para a segunda parte.

Acabamos de ver que o fluido magnético de nosso fio de aço com 25 polegadas de comprimento estava concentrado em suas extremidades, ao longo de um comprimento de 2 ou 3 polegadas; que o centro de ação de cada metade desse fio[481] estava aproximadamente localizado a 10 linhas (2,25 cm) de suas extremidades. Portanto, ao afastar de algumas polegadas nosso fio de aço de uma agulha muito curta e na qual, como veremos na sequência, o fluido magnético pode ser suposto concentrado a 1 ou 2 linhas das extremidades [0,226 ou 0,452 cm], podemos calcular a ação mútua do fio sobre a agulha e da agulha sobre o fio, ao supor o fluido magnético no fio de aço concentrado a 10 linhas de suas extremidades, e no caso de uma agulha com 1 polegada [2,7 cm] de comprimento [supondo o fluido magnético como estando concentrado] a 1 ou 2 linhas das extremidades. Essas reflexões nos guiaram na experiência a seguir.

Quarta Experiência

Suspendemos um fio de aço pesando 70 grãos (3,72 g), de 1 polegada de comprimento, imantado pelo método de toque duplo, em um fio de seda de 3 linhas de comprimento,[482] formado de um único fio de casulo; e o deixamos entrar em repouso ao longo do meridiano magnético. Em seguida, colocamos verticalmente ao longo desse meridiano, a diferentes distâncias, o fio de aço de 25 polegadas de comprimento, de maneira que sua extremidade estivesse sempre 10 linhas abaixo do nível da agulha suspensa:[483] em cada teste mudávamos a distância e, ao fazer a agulha suspensa oscilar, contávamos o número de oscilações que ela fazia em um mesmo número de segundos. Resultou dessas experiências:

---

[480]Ou seja, Coulomb considera que não é necessário provar que a força magnética entre duas partículas magnéticas seja proporcional ao produto das quantidades de fluido magnético contidas nessas duas partículas. Discuto essa afirmação de Coulomb na Seção 13.4, página 255.

[481]Por um lapso Coulomb escreveu aqui dessa agulha, *de cette aiguille*.

[482]Novamente parece haver um lapso aqui, assim como nas Notas de rodapé 453 e 474 nas páginas 225 e 231, respectivamente. O fio de seda deve ter 3 polegadas (8,12 cm) de comprimento, em vez de 3 linhas (0,68 cm).

[483]Dessa forma o polo magnético inferior do fio ficava no mesmo nível horizontal que a agulha suspensa.

Primeiro teste. A agulha livre vibra em virtude [unicamente] da ação do globo terrestre, na razão de 15 oscilações em 60 s.

Segundo teste. O fio colocado a 4 polegadas [10,83 cm] do centro da agulha, ela vibra na razão de 41 oscilações em 60 s.

Terceiro teste. O fio colocado a 8 polegadas do centro, a agulha vibra na razão de 24 oscilações em 60 s.

Quarto teste. O fio colocado a 16 polegadas do centro, a agulha vibra na razão de 17 oscilações em 60 s.

12.3.1 Explicação e Resultado Dessa Experiência

Quando um pêndulo é suspenso livremente e solicitado por forças direcionadas ao longo de uma dada direção, que o fazem oscilar, as forças são medidas pela razão inversa do quadrado dos tempos de um mesmo número de oscilações ou, o que dá no mesmo, pela razão direta do quadrado do número de oscilações realizadas em um mesmo tempo.[484]

Porém, na experiência anterior, a agulha oscila em virtude de duas potências diferentes: uma é a força magnética da Terra, a outra é a ação de todos os pontos do fio sobre os pontos da agulha. Em nossa experiência, todas as forças atuam no plano do meridiano magnético e, estando a agulha suspensa horizontalmente, a força verdadeira que a faz oscilar depende da parte de todas essas forças que é decomposta ao longo de uma direção horizontal.

Mas acabamos de ver, nas três experiências anteriores, que o fluido magnético, estando concentrado nas extremidades de nosso fio, pode ser suposto como estando concentrado a 10 linhas da extremidade do fio. Como a agulha suspensa tem 1 polegada de comprimento, e como a extremidade boreal[485] é atraída a uma distância de 3,5 polegadas [9,47 cm] e a extremidade austral é repelida pelo polo inferior do fio,[486] cuja distância é de 4,5 polegadas [12,18 cm], podemos supor, sem erro perceptível, que a distância média na qual o polo inferior do fio de aço exerce sua ação sobre os dois polos da agulha é de 4 polegadas [10,83 cm]. Consequentemente, se a ação do fluido magnético for como a razão inversa do quadrado das distâncias, a ação do polo inferior do fio de aço sobre a agulha será proporcional a $1/4^2$, $1/8^2$, $1/16^2$ ou a 1, 1/4, 1/16.

Porém, como as forças horizontais que fazem a agulha oscilar são proporcionais ao quadrado do número de oscilações feitas em um mesmo tempo, e como apenas em virtude da força magnética do globo terrestre a agulha livre realiza 15 oscilações em 60 s, essa última força será medida pelo quadrado dessas 15 oscilações ou por 15^2. No segundo teste, as forças reunidas do globo terrestre e do fio de aço fazem com que a agulha realize 41 oscilações em 10 s. Portanto, essas duas forças reunidas são medidas por 41^2, consequentemente, a força devida apenas à ação do fio de aço imantado é medida pela diferença entre esses quadrados; assim ela é proporcional a $\overline{41}^2 - \overline{15}^2$. Teremos então para a ação do fio sobre a agulha:

[484] Ver a Nota de rodapé 444 na página 222.

[485] Ou seja, a extremidade com o polo Norte. Ver a Nota de rodapé 96 na página 52.

[486] No original aparece aqui "da agulha" (*de l'aiguille*), mas certamente Coulomb está se referindo ao polo inferior do fio, S, que está repelindo a extremidade austral (ou Sul) da agulha.

	Distância	Força dependente da ação magnética do fio de aço
Para o segundo teste	4 polegadas	$\overline{41}^2 - \overline{15}^2 = 1456$
Para o terceiro teste	8 polegadas	$\overline{24}^2 - \overline{15}^2 = 351$
Para o quarto teste	16 polegadas	$\overline{17}^2 - \overline{15}^2 = 64$

O segundo e o terceiro teste, nos quais as distâncias estão [entre si] como 1 : 2, fornecem muito aproximadamente, para as forças, a razão inversa do quadrado das distâncias.[487] O quarto teste fornece um número demasiado pequeno; porém é necessário notar que, nesse quarto teste, a distância do polo inferior do fio de aço ao centro da agulha é de 16 polegadas, e que a distância do polo superior ao centro dessa mesma agulha é de aproximadamente $\sqrt{16^2 + 23^2}$. Assim, a ação do polo inferior estando representada por $1/16^2$, a ação horizontal do polo superior será $\frac{16}{(16^2+23^2)^{3/2}}$. De maneira que a ação do polo inferior está para a ação do polo superior aproximadamente :: 100 : 19. De onde resulta que, sendo as oscilações da agulha produzidas pela ação desses dois polos e aquela [ação] do polo superior atuando em um sentido oposto àquela do polo inferior, o quadrado das oscilações que seriam produzidas apenas pela ação do polo inferior do fio imantado é diminuída de 19/100 devido à ação oposta da parte superior do mesmo fio. Assim, para ter apenas a ação da parte inferior do fio, é necessário, ao supor x como sendo o valor verdadeiro dessa força, fazer $(x - 19x/100) = 64$, de onde resulta $x = 79$. Substituindo essa quantidade no resultado do quarto teste, encontramos:

	Distância	Força
Segundo teste	4 polegadas	1456
Terceiro teste	8 polegadas	351
Quarto teste	16 polegadas	79

e essas forças são aproximadamente como os números 16, 4, 1 ou como a razão inversa do quadrado das distâncias.[488]

Repeti várias vezes essa experiência suspendendo agulhas de 2 e 3 polegadas [5,41 e 8,12 cm] de comprimento, e sempre encontrei que, ao fazer as correções necessárias que acabo de explicar, a ação, seja repulsiva, seja atrativa do fluido magnético, era inversamente proporcional ao quadrado das distâncias.

[487] Isto é, a razão entre os quadrados das distâncias é muito aproximadamente a razão entre os números de oscilações feitas em um mesmo tempo, com esses números sendo devidos apenas à interação entre o fio e a agulha (descontando a influência do globo terrestre), a saber:

$$\frac{(1/4)^2}{(1/8)^2} \approx \frac{1456}{351} , \qquad \text{ou seja,} \qquad 4 \approx 4,15 .$$

[488] Gillmor fez o seguinte comentário em relação a esse ponto, [Gillmor, 1971a, pág. 190, Nota n]:

> Caso 1456 seja escolhido como unidade, as razões
>
> $$\frac{1}{1456} : \frac{1}{351} : \frac{1}{79}$$
>
> são como $1 : 4,15 : 18,4$. Caso 79 seja escolhido como unidade, as razões de $79 : 351 : 1456$ são como $1 : 4,4 : 18,4$. No caso da lei do inverso do quadrado das distâncias, as razões exatas deveriam estar como $1 : 4 : 16$.

12.3.2 Primeira Observação

Pudemos perceber, no decorrer dessa experiência, que supusemos que nosso fio foi imantado pelo método de toque duplo. Se apresentarmos alternadamente a uma mesma distância seu polo boreal e seu polo austral à extremidade de uma agulha imantada pelo método de toque duplo, o polo boreal do fio imantado vai atrair o polo austral da agulha exatamente com a mesma força com que o polo austral desse fio repelirá o polo austral da agulha, e *vice versa* para o polo boreal da agulha. Essa propriedade que, como veremos na sequência, é uma consequência necessária da teoria do magnetismo, será provada também pela experiência ao utilizar a balança magnética, da qual forneceremos mais tarde a descrição e as utilizações.

12.3.3 Segunda Observação

Sendo dada a lei da razão inversa do quadrado das distâncias, seria fácil determinar pelo cálculo se, na primeira experiência na qual o fio imantado é colocado horizontalmente e perpendicularmente ao meridiano magnético, e na qual encontramos, no último teste, que é necessário afastar de aproximadamente 42 linhas a extremidade do fio do meridiano da agulha, o cálculo forneceria, para a direção da resultante de todas as ações de cada metade desse fio, uma linha que passaria a 9 ou 10 linhas da extremidade desse fio. Vamos apresentar o cálculo que determina essa distância, de acordo com o último teste da primeira experiência na qual a agulha tem 3 polegadas de comprimento, e na qual o fio de aço imantado tendo 25 polegadas de comprimento é colocado horizontalmente e perpendicularmente ao meridiano magnético a 16 polegadas de distância da extremidade da agulha.

Seja x na Figura 3[489] o ponto onde passa essa resultante para o polo que está mais próximo da linha meridiana da agulha; x' o ponto no qual supomos concentrada na outra extremidade desse fio todo o fluido magnético. Quanto ao fluido magnético da agulha suspensa, embora seu centro de ação esteja a 2 ou 3 linhas de suas extremidades, podemos supô-lo em suas extremidades já que cada polo do fio atua sobre os dois polos dessa agulha; e que se, por essa suposição, fizermos o polo n da agulha mais próximo de 2 ou 3 linhas do polo S do fio de aço, fazemos ao mesmo tempo o polo a da agulha mais afastado do polo S pela mesma quantidade; assim o erro da suposição encontra-se aproximadamente compensado.

Mas encontramos pela experiência que a distância da extremidade do fio até a linha meridiana da agulha é, no último teste, de 3,5 polegadas.[490] Assim, ao fazer $x = Sx = Nx'$, distância da extremidade do fio até o centro de ação, teremos as seguintes fórmulas para a força que os centros de ação do fio exercem sobre cada extremidade da agulha, ao longo de uma direção perpendicular à agulha:

Ação do polo S sobre o polo n:

$$\frac{3,5+x}{[(16)^2+(3,5+x)^2]^{3/2}} \ .$$

Ação do polo S sobre o polo a:

$$\frac{3,5+x}{[(19)^2+(3,5+x)^2]^{3/2}} \ .$$

Ação do polo N sobre o polo n:

[489]Essa Figura 3 encontra-se na página 231.

[490]O valor de 3,5 polegadas é equivalente a 42 linhas, sendo ambos equivalentes a 9,5 cm.

$$\frac{28,5 - x}{[(16)^2 + (28,5 - x)^2]^{3/2}} \, .$$

Ação do polo N sobre o polo a:

$$\frac{28,5 - x}{[(19)^2 + (28,5 - x)^2]^{3/2}} \, .$$

Mas como, nessa experiência, a agulha de aço está colocada ao longo de seu meridiano magnético e como cada uma das forças anteriores age perpendicularmente a essa agulha com o mesmo braço de alavanca para fazê-la girar ao redor de seu ponto de suspensão, resulta que todas essas forças estão em equilíbrio entre si.[491] De onde tiramos a seguinte equação:

$$\frac{3,5 + x}{[(16)^2 + (3,5 + x)^2]^{3/2}} + \frac{3,5 + x}{[(19)^2 + (3,5 + x)^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{28,5 - x}{[(16)^2 + (28,5 - x)^2]^{3/2}} + \frac{28,5 - x}{[(19)^2 + (28,5 - x)^2]^{3/2}} \, .$$

Porém, como já vimos que x deve ser menor do que 1 polegada, podemos, como primeira aproximação, o desprezar no denominador de nossa equação, na qual os números são muito grandes comparados com x, ou fazer x igual a 1/2 polegada, que se aproxima de seu verdadeiro valor.

Assim, resulta do cálculo da fórmula o valor $Sx = x = 56/75$ polegadas, aproximadamente 9 linhas (2,03 cm), como nos dois primeiros testes.

Por um cálculo semelhante encontraremos que, quando a extremidade do fio de aço estava afastada de 8 polegadas da extremidade da agulha suspensa, a distância do ponto x ao meridiano era aproximadamente de 12,5 linhas. Porém, como a experiência fornece nesse caso 4 linhas de distância do meridiano até a extremidade da agulha, resulta que, nesse teste, é necessário retirar 4 linhas para ter a distância do centro de ação até a extremidade da agulha. Assim o cálculo fornece também aqui 8,5 linhas para a distância do centro de ação até as extremidades da agulha.

No terceiro teste, no qual a distância da extremidade da agulha até o fio de aço é de 4 polegadas, o cálculo fornecerá aproximadamente 2 linhas para a distância do centro de ação até o meridiano; mas encontramos pela experiência que, nesse teste, a extremidade do fio ultrapassava o meridiano de 8 linhas. Assim, nesse último teste, o cálculo fornece o centro de ação das extremidades do fio de aço localizado a 10 linhas de suas extremidades.

Assim, resulta da experiência e do cálculo que, todas as vezes em que os fios de aço de 25 polegadas de comprimento atuam um sobre o outro, podemos supor os centros de ação ou, o que dá no mesmo, todo o fluido magnético reunido a 9 ou 10 linhas das extremidades desses fios, e fazer os cálculos de acordo com essa suposição. Nas agulhas muito curtas, o centro de ação é mais próximo das extremidades. Teremos oportunidade, na sequência, de determinar a lei dessa diminuição em relação ao comprimento das agulhas, quando fornecermos a maneira mais vantajosa de imantar as agulhas e de formar os ímãs artificiais.

Determinaremos ao mesmo tempo a curva que, no caso de um fio de aço imantado, representa a densidade do fluido magnético desde sua extremidade até seu ponto médio

[491]Ou seja, é nulo o torque resultante para fazer com que a agulha gire ao redor do fio de suspensão.

no qual está localizado seu centro magnético. Porém é fácil de prever, de acordo com as experiências anteriores, que o lugar geométrico dessa densidade não pode ser uma linha reta, como acreditaram alguns autores.

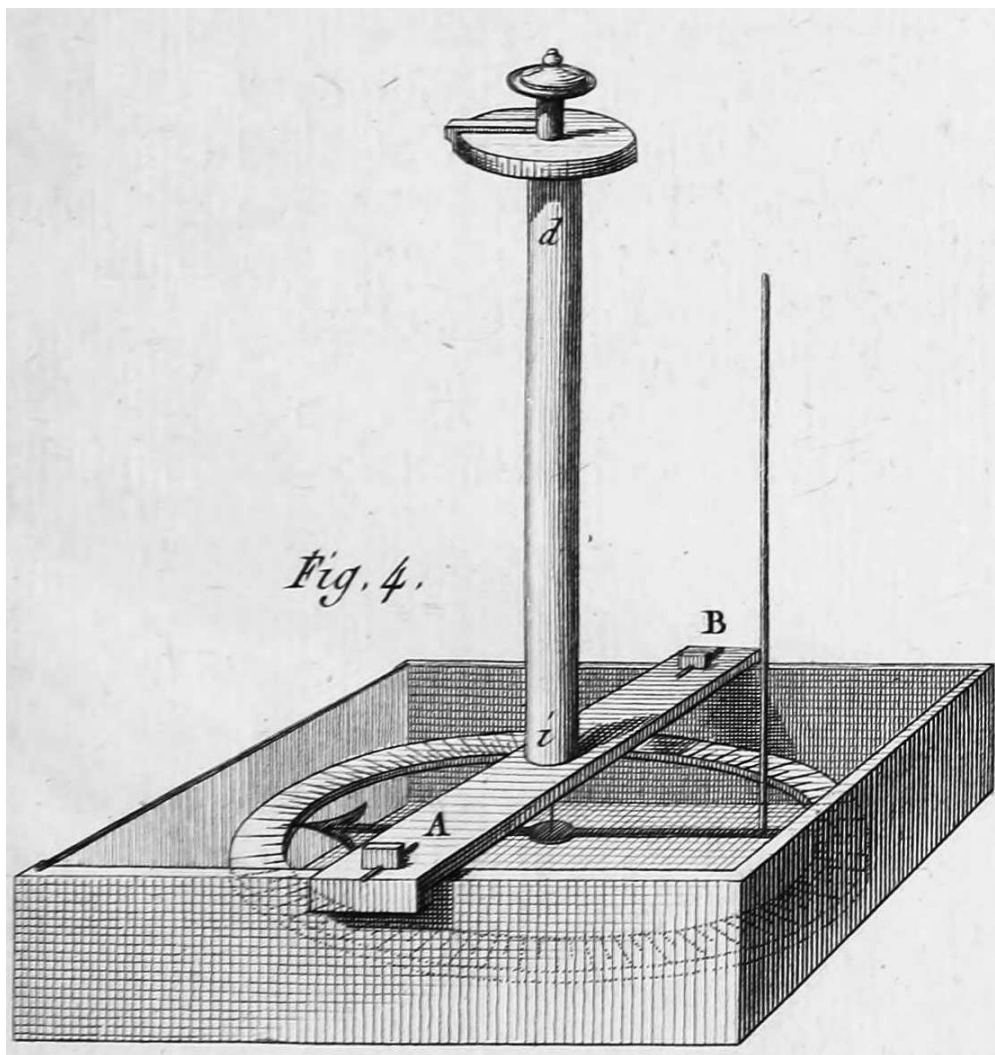
12.4 Segundo Método para Determinar a Lei de Atração e de Repulsão do Fluido Magnético

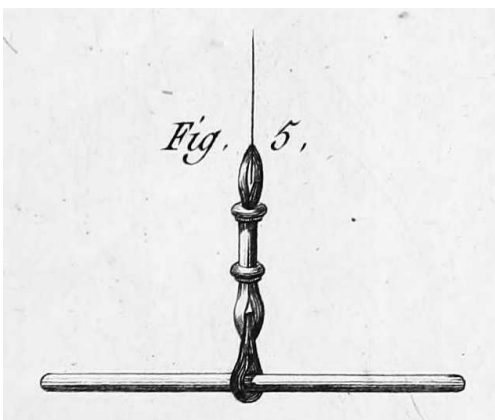
Após ter encontrado, pelas experiências anteriores, que no caso de uma agulha de 25 polegadas[492] de comprimento, e com um motivo ainda mais forte nas agulhas mais curtas, o fluido magnético pode ser suposto como concentrado nas últimas 2 ou 3 polegadas em direção às suas extremidades e que, nas agulhas de 20 a 25 polegadas, o centro de ação pode ser suposto a 9 ou 10 linhas de cada extremidade, foi fácil construir uma balança magnética utilizando os mesmos princípios que me serviram para construir a balança elétrica que descrevi na minha Primeira Memória. Mas devo observar que a forma e os detalhes que vou dar das medidas da balança magnética, podem e devem ser modificados na medida em que for prescrito pela prática. Procurei apenas, nesse primeiro teste, dar uma forma simples a essa balança, tal que seja barata e que apesar disso fosse suficiente para as experiências que pretendia realizar.

12.5 Descrição da Balança Magnética

Fiz com que fosse construída uma caixa quadrada de 3 pés (97,45 cm) de lado e 18 polegadas (48,73 cm) de altura, Figura 4.[493]

[492]Na edição do Potier aparece aqui 23 polegadas por um erro de digitação, já que no original está escrito 25 polegadas, que corresponde a 67,675 cm, [Potier, 1884, pág. 136] e [Coulomb, 1788d, pág. 600].

[493]O fio vertical localizado à direita na Figura 4 é imantado e vai ser usado nas experiências para determinar a lei de força entre polos magnéticos.

As bordas são fixadas apenas com pinos, encaixes e cavilhas de madeira. A 9 polegadas [24,36 cm] acima do fundo, é colocado um círculo horizontal, de madeira bem seca, ou de cobre vermelho,[494] de 2 pés e 10 polegadas (92,03 cm) de diâmetro, dividido de maneira comum em 360°. Sobre essa caixa é colocada uma travessa AB que suporta em seu centro uma haste oca id, de 30 polegadas (81,21 cm) de comprimento, terminada em d por um micrômetro de torção, semelhante àquele que descrevemos para a balança elétrica. A pinça desse micrômetro prende a extremidade de um fio de cobre amarelo,[495] vendido como número 12 no comércio, cujos 6 pés pesam 5 grãos (0,1365 gramas por metro), e do qual determinamos a força na Memória sobre as forças de torção dos fios de metal, impressa no *Volume da Academia para 1784*.[496] A parte inferior desse fio é presa por uma pinça dupla,[497] tendo a forma de um tira-linhas,[498] representada na Figura 5.

[494]Ver a Nota de rodapé 352 na página 185.
[495]Ver a Nota de rodapé 213 na página 106.
[496][Coulomb, 1787] com tradução para o inglês das Seções I e II em [Coulomb, 2012b] e [Coulomb, 2012c]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.
[497]Ver a Nota de rodapé 288 na página 151.
[498]Ver a Nota de rodapé 382 na página 199.

Essa pinça dupla é dividida, como indica a figura, ao longo de quase todo seu comprimento, para formar uma braçadeira nas duas extremidades, que pode ser aberta e fechada por meio de dois anéis deslizantes. A extremidade inferior prende um anel de chumbo ou de cobre; esse anel é destinado a carregar a agulha de aço imantado, com a qual queremos experimentar.

Antes de começar as experiências com essa balança, é necessário que, quando a tensão é nula, a agulha imantada esteja colocada naturalmente ao longo de seu meridiano magnético. Isso é fácil de obter, ao colocar inicialmente no anel suspenso no tira-linhas um fio de cobre vermelho, com as mesmas dimensões que o fio de aço imantado com o qual pretendemos experimentar.[499] Em seguida, deixando o indicador do micrômetro fixo sobre a primeira divisão desse micrômetro, giramos todo o micrômetro (cujo tubo, como vimos para a balança elétrica, pode deslizar e girar dentro do tubo que forma a haste *id*, Figura 4), até que a agulha de cobre pare naturalmente ao longo da direção do meridiano magnético, que já havia sido traçado de antemão.

A caixa deve ser colocada sobre esse meridiano magnético, de maneira tal que a direção desse meridiano corresponda às divisões 0-180 do círculo horizontal,[500] que já dissemos estar elevado a 9 polegadas acima de seu fundo.

Após essa preparação, substituímos a agulha de aço no lugar da agulha de cobre, e estamos prontos para começar as operações.

Daremos aqui apenas as experiências e resultados que nos são absolutamente necessários para determinar a lei de acordo com a qual atua o fluido magnético, quando as moléculas magnéticas[501] são colocadas a diferentes distâncias entre si.

[499]Esse fio de cobre não está imantado.
[500]Isto é, o meridiano magnético passa pelas marcações de 0° e 180° do transferidor.
[501]No original: *molécules aimantaires*.

12.5.1 Primeiro Resultado. — A força resultante de todas as forças magnéticas que o globo terrestre exerce sobre cada ponto de uma agulha imantada é uma quantidade constante, cuja direção, paralela ao meridiano magnético, passa sempre pelo mesmo ponto da agulha, em qualquer orientação na qual essa agulha seja colocada em relação a esse meridiano

Já havia tentado provar esse princípio em uma Memória sobre as agulhas imantadas, impressa no Volume VII dos *Savants étrangers*.[502] Porém, as experiências que apresentei nesse trabalho podiam estar sujeitas a algumas contestações. A experiência que vai a seguir é direta e me parece decisiva.

Experiência

Suspendi horizontalmente na balança um fio de aço imantado tendo 22 polegadas (59,56 cm) de comprimento e $1\frac{1}{4}$ linha (0,27 cm) de diâmetro. De acordo com a disposição de nossa balança, essa agulha fica orientada ao longo de sua direção magnética,[503] sua extremidade Norte corresponde ao ponto 0 do grande círculo de 2 pés e 10 polegadas de diâmetro, sendo nula a torção do fio e o ponteiro do micrômetro estando sobre o ponto 0, ou sobre a primeira divisão desse micrômetro.

Torcemos o fio de cobre de suspensão em ângulos diferentes por meio do botão com o ponteiro do micrômetro, o que força a agulha a se afastar de seu meridiano magnético. A cada operação, observamos o ângulo no qual ela ficava afastada de seu meridiano e a força de torção que era necessário utilizar para produzir esse ângulo, e obtivemos os seguintes resultados:[504]

	Torção do fio de	A agulha parou a
Primeiro teste	1 círculo $= 360°$	$10,5°$ de seu meridiano
Segundo teste	2 círculos	$21,25°$ de seu meridiano
Terceiro teste	3 círculos	$33°$ de seu meridiano
Quarto teste	4 círculos	$46°$ de seu meridiano
Quinto teste	5 círculos	$63,5°$ de seu meridiano
Sexto teste	5,5 círculos	$85°$ de seu meridiano

12.5.2 Resultado e Explicação Dessa Experiência

Nossa agulha imantada é suspensa aqui por um fio de cobre que tem o número 12 no comércio. Vimos em uma Memória impressa no Volume de 1784 que,[505] para um mesmo fio de suspensão, a força de torção é proporcional ao ângulo de torção. Assim, no primeiro teste, a força de torção é de $360° - 10,5°$, e no segundo teste é de $720° - 21,25°$.

[502] Ver a Nota de rodapé 442 na página 222. Chamamos atenção, em particular, do Primeiro Princípio Fundamental, Subseção 5.0.2 na página 52. Uma discussão e ilustração desse primeiro princípio fundamental encontra-se na Seção 6.1.

[503] Isto é, ao longo do meridiano magnético.

[504] Apresento uma ilustração dessa experiência na Seção 13.1, página 249.

[505] [Coulomb, 1787] com tradução para o inglês das Seções I e II em [Coulomb, 2012b] e [Coulomb, 2012c]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

Se compararmos, de acordo com essa experiência, a força de torção com o ângulo com que a agulha se afasta de seu meridiano, encontraremos a cada teste, muito exatamente, que os senos do ângulo formado pelo meridiano magnético e pela direção da agulha nos testes sucessivos são proporcionais aos ângulos de torção.[506] De onde segue, como vimos no Volume VII dos *Savants étrangers*,[507] que a força resultante da ação magnética do globo terrestre é uma força constante dirigida paralelamente ao meridiano magnético e passando sempre a igual distância da extremidade da agulha, qualquer que seja a orientação na qual essa agulha é colocada em relação a seu meridiano. Aqui vai o cálculo comparado com a experiência.

Sejam A o ângulo de torção de um teste qualquer, que deve servir de termo de comparação; B o ângulo pelo qual a agulha se afasta de seu meridiano nesse teste; A' o ângulo de torção encontrado em um outro teste; B' o ângulo pelo qual a agulha se afasta de seu meridiano nesse teste.

Teremos geralmente, de acordo com a teoria,

$$A : A' :: \text{sen}\, B : \text{sen}\, B' \ ,$$

de onde

$$\log A' = \log A + \log \text{sen}\, B' - \log \text{sen}\, B \ .$$

Vamos pegar o segundo teste como termo de comparação. Ao corrigir o ângulo de torção do ângulo com que a agulha se afasta de seu meridiano, esse ângulo será de 699°, e seu logaritmo será

$$2,8444 \ ;$$

o ângulo B sendo de $21°15'$, $\log \text{sen}\, B$ será

$$9,5592 \ .$$

Ao comparar essas duas quantidades, de acordo com a fórmula, com o ângulo pelo qual a agulha se afasta de seu meridiano magnético nos outros testes, encontraremos que:

O segundo e o terceiro teste comparados fornecem, pela teoria, para a força de torção do terceiro teste, 1052°. A experiência fornece para a força de torção do terceiro teste 1047°. Diferença: 5°. Erro da experiência: $-\frac{1}{210}$.

O segundo e o quarto teste comparados fornecem, pela teoria, para a força de torção, 1388°. A experiência fornece para a força de torção do quarto teste[508] 1394°. Diferença: −6°. Erro da experiência: $+\frac{1}{232}$.

O segundo e o quinto teste comparados fornecem, pela teoria, para a força de torção, 1726°. A experiência fornece para a força de torção do quinto teste $1736\frac{1}{2}°$. Diferença: $-10\frac{1}{2}°$. Erro da experiência: $+\frac{1}{169}$.

O segundo e o sexto teste comparados fornecem, pela teoria, para a força de torção, 1921°. A experiência fornece para o sexto teste[509] 1895°. Diferença: 66°. Erro da experiência: $-\frac{1}{75}$.

Portanto, encontramos a maior concordância entre a teoria e a experiência, o que prova, ao mesmo tempo, a verdade da teoria e a exatidão do método; exatidão que só podemos atribuir à simplicidade do procedimento, pois a caixa e todas as partes que formam a balança foram feitas sem muito cuidado.

[506] Mostro isso detalhadamente na Seção 13.1 na página 249.

[507] Ver a Nota de rodapé 442 na página 222.

[508] Por um lapso no original aparece escrito aqui terceiro teste em vez de quarto teste.

[509] Por um lapso no original aparece escrito aqui quinto teste em vez de sexto teste.

12.5.3 Primeira Observação

Após essa propriedade ter sido estabelecida de uma maneira que me parece incontestável, será fácil, por meio de nossa balança, de comparar agora mesmo e sem cálculo, a força de diferentes agulhas imantadas,[510] seja entre elas, seja com o *torque*[511] de um peso que atuasse na extremidade de uma alavanca dada.[512]

Trata-se apenas, para essa operação, de suspender horizontalmente uma após a outra, em nossa balança, as diferentes agulhas que queremos comparar, de maneira que elas fiquem livremente ao longo do meridiano magnético, quando é nula a torção do fio de suspensão. Em seguida torcemos o fio de suspensão por meio do micrômetro, de maneira que as agulhas suspensas formem, em todos os testes, um mesmo ângulo com o meridiano magnético, e concluiremos dessa experiência que, como o ângulo formado com o meridiano magnético é constante, o *torque* da força com a qual cada agulha é trazida de volta a seu meridiano pela ação magnética da Terra é proporcional ao ângulo de torção que a experiência vai fornecer.

Teremos oportunidade, em uma outra Memória, de retornar com detalhe a esse assunto, assim como sobre muitos outros temas relativos ao magnetismo.

12.6 Utilização da Balança Magnética para Determinar a Lei de Acordo com a Qual as Partículas Magnéticas Agem entre Si a Distâncias Diferentes

Imantamos[513] um fio de bom aço, passado pela fieira, com 24 polegadas (64,97 cm) de comprimento, com $1\frac{1}{2}$ linha (0,34 cm) de diâmetro e o suspendemos horizontalmente em nossa balança magnética. Inicialmente buscamos encontrar com que força o magnetismo terrestre trazia de volta essa agulha até seu meridiano, e encontramos que ao torcer o fio de suspensão de 2 círculos $-$ 20°, a agulha parava a 20° de seu meridiano magnético, de maneira que, para os ângulos de 20° a 24° e abaixo, sendo os senos aproximadamente proporcionais aos arcos, era necessário, para afastar essa agulha de 1° de seu meridiano magnético, uma força de torção muito próxima de 35°.[514]

Em seguida colocamos um outro fio imantado com as mesmas dimensões, verticalmente ao longo do meridiano magnético, a 11 polegadas e 2 linhas (30,22 cm) do centro de suspensão da primeira agulha, colocando a extremidade desse fio cerca de 1 polegada abaixo do nível

[510]No original: *la force de diffèrentes aiguilles aimantées*. Coulomb está se referindo aqui ao grau de imantação de diferentes agulhas.

[511]No original: *momentum*. Ver a Nota de rodapé 116 na página 57.

[512]Ou seja, esse procedimento permite que sejam comparados entre si os momentos magnéticos de diferentes agulhas imantadas. Ele também permite que o torque magnético exercido pela Terra sobre uma bússola específica seja comparado com o torque exercido por um dado peso ao atuar sobre uma alavanca em uma dada distância de seu fulcro. Ou seja, o torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha imantada pode ser facilmente comparado com um torque gravitacional conhecido.

[513]No original o título dessa Seção aparece como: *Usage de la balance magnétique, pour déterminer la loi suivant laquelle les parties aimantaires agissent l'une sur l'autre à différentes distances*. Estou seguindo aqui a versão em alemão e traduzindo *les parties aimantaires* por "*as partículas magnéticas*" (*die magnetischen Theilchen*), [Coulomb, 1890e, pág. 37]. Ver ainda as Notas de rodapé 146 e 770 nas páginas 68 e 389, respectivamente.

[514]Ou seja, $(720° - 20°)/20 = 35°$.

da agulha suspensa horizontalmente;[515] de maneira que, caso as duas agulhas, uma suspensa horizontalmente, a outro colocada verticalmente no meridiano da primeira, se tocassem, elas se encontrariam a 1 polegada de suas extremidades. Porém, como eram os polos Norte, ou os polos de mesmo nome de cada agulha, que se encaravam, elas se repeliam mutuamente, e a agulha horizontal, suspensa na balança, foi repelida da direção de seu meridiano, e só parou quando a força de repulsão dos polos de mesmo tipo[516] ficou em equilíbrio com a força diretriz do globo terrestre. Vão aqui os resultados de testes diferentes.[517]

Experiência

Primeiro teste. A agulha suspensa horizontalmente sem torcer o fio de torção, foi repelida e parou a 24° de seu meridiano magnético.

Segundo teste. Tendo torcido [a parte superior do fio de suspensão] de 3 círculos, a agulha parou a 17° de seu meridiano magnético.

Terceiro teste. Tendo torcido [a parte superior do fio de suspensão] de 8 círculos, a agulha parou a 12° de seu meridiano magnético.

12.6.1 Explicação e Resultado Dessa Experiência

Dissemos que a agulha livre e solicitada unicamente pela ação magnética do globo terrestre era mantida a 20° de seu meridiano por uma força de torção de 2 círculos − 20°. Assim, quando a agulha formava um ângulo de 20° com seu meridiano magnético, a força que a impelia na direção desse meridiano era de 700°. Consequentemente, como, no primeiro teste, ela ficava em repouso a 24° de seu meridiano, ela era mantida aí com uma força de 840°.[518] Mas como, pela repulsão das agulhas [durante o primeiro teste], o fio de suspensão estava torcido de 24°, a repulsão total era de 864°.[519]

No segundo teste, a agulha parava a 17° de seu meridiano magnético. Assim, ela era trazida de volta a esse meridiano pela ação magnética da Terra,[520] com uma força de 595°.[521] Mas a torção [da parte superior do fio de suspensão] que mantinha a agulha nessa distância era de 3 círculos + 17°. Assim, como essa força de torção agia no mesmo sentido que a força magnética da Terra, a ação dos dois polos da agulha era medida por 1692°.[522]

No terceiro teste, a agulha estava apenas a 12° de seu meridiano magnético. Assim a ação do globo terrestre é medida apenas por uma força de 420°.[523] Mas encontramos nesse

[515]Esse fio imantado vertical aparece no lado direito da Figura 4 na página 240. Quando sua extremidade inferior está 1 polegada abaixo do nível da agulha horizontal, o polo magnético inferior do fio fica no mesmo nível horizontal que a agulha suspensa.

[516]Por um lapso no original apareceu aqui "força de repulsão dos polos opostos".

[517]Esse procedimento é ilustrado e discutido detalhadamente na Seção 13.2 na página 250.

[518]Por um erro tipográfico, no original aparece aqui 849°, [Coulomb, 1788d, pág. 608]. Potier corrigiu esse erro e colocou o valor correto de 840°, [Potier, 1884, pág. 143].

Esse valor é obtido da seguinte maneira. Como visto na Nota de rodapé 514, é necessária uma força de torção de 35° para cada 1° de afastamento da agulha de seu meridiano magnético. Como a agulha nesse teste ficou afastada de 24°, a força de torção necessária para ocasionar esse desvio foi de $24 \times 35° = 840°$.

[519]A maneira de obter esse valor está detalhada na Seção 13.2 na página 250.

[520]No original: *action aimantaire de la Terre*.

[521]Ou seja, $17 \times 35° = 595°$.

[522]Ou seja, a ação repulsiva entre os polos Norte das duas agulhas imantadas era medida por 1692°. A maneira de obter esse valor está detalhada na Seção 13.2 na página 250.

[523]Ou seja, $12 \times 35° = 420°$.

teste que, para trazer a agulha a essa distância de 12°, era necessário torcer [a parte superior do] fio de suspensão de 8 círculos + 12° = 2892°. Assim, a força repulsiva entre as duas agulhas, situadas a 12° de distância, é medida, nesse último teste, por uma torção de

$$2892° + 420° = 3312° .$$

Assim, em nossas experiências, nas quais as distâncias são 24°, 17°, 12°, a razão inversa do quadrado das distâncias é medida pelos números 1/576, 1/280, 1/144, que está muito próximo de 1/4, 1/2, 1. Mas as experiências fornecem para as forças repulsivas correspondentes

$$864, \qquad 1692, \qquad 3312,$$

que são também, muito aproximadamente, como os números 1/4, 1/2, 1.[524] Assim, ao supor todo o fluido magnético concentrado a 10 linhas da extremidade de nossas agulhas de 24 polegadas de comprimento, como vimos anteriormente que era permissível fazer, resulta que a ação repulsiva do fluido magnético é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias.

Pudemos desprezar, nessa operação, a ação dos outros polos das agulhas; pois, como a ação é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias, e como as agulhas têm 2 pés de comprimento, esses outros polos encontram-se sempre a uma distância ao menos quatro vezes maior do que as primeiras distâncias, além disso, atuam muito obliquamente em relação ao comprimento das agulhas, [logo] a ação deles não pode alterar nosso resultado de uma maneira muito perceptível.[525] Porém, caso houvesse uma diferença menor entre as distâncias dos diferentes polos da agulha em relação à experiência anterior, seria necessário, no cálculo, levar em consideração a ação recíproca entre todos os polos e o comprimento [do braço] da alavanca sobre a qual atua cada uma dessas ações. Esse cálculo não teria uma dificuldade maior do que o cálculo que fizemos acima para determinar o centro de ação das extremidades das agulhas, ou [para determinar] o ponto, próximo dessas extremidades, no qual é permitido supor concentrado o fluido magnético.

Podemos ainda, por meio da balança magnética que acabamos de descrever, provar de uma maneira incontestável que o fluido magnético nos fios de aço imantados pelo método de toque duplo é concentrado próximo das extremidades desses fios.

Aqui vai a operação precisa que leva a esse resultado. Tendo colocado no meridiano magnético de nossa balança uma régua vertical de 2 linhas (0,451 cm) de espessura correspondendo à extremidade da agulha suspensa, deslizamos verticalmente ao longo dessa régua o fio de aço imantado, de maneira que os polos de mesmo nome se encaravam, a régua estando entre eles. Como as duas extremidades ou os dois polos dos fios de aço e da agulha se repeliam, torcemos, por meio do micrômetro, o fio de suspensão, até que deixamos a agulha horizontal em contato com a régua, de maneira que sobre apenas a espessura da régua ou 2 linhas de distância entre os pontos mais próximos das duas agulhas. Porém, como o fio de aço que colocamos atrás da régua é vertical, todos os pontos das duas agulhas que se encontram a 4 ou 5 linhas [0,90 ou 1,13 cm] de distância do cruzamento possuem apenas uma força muito fraca para se repelir mutuamente, devido à distância entre eles e à obliquidade de suas ações; de maneira que a força de torção que é necessário empregar para manter a agulha suspensa horizontalmente em contato com a régua é proporcional à densidade das 2 ou 3 linhas do fluido magnético que estão perto dos pontos das duas agulhas, que estão apenas

---

[524] Ver a Seção 13.2 na página 250.

[525] Heilbron estimou que a influência dos polos distantes era menor do que 1% da ação entre os polos próximos, [Heilbron, 1999, pág. 96].

a 2 linhas de distância entre si. Assim, ao deslizar verticalmente nosso fio de aço ao longo da régua, apresentaremos a essa pequena distância de 2 linhas da agulha todos os pontos desse fio, e a força de torção da suspensão para manter a agulha suspensa horizontalmente em contato com a régua será proporcional à densidade do fluido magnético do ponto do fio vertical que, em cada teste, se encontrar a 2 linhas de distância da agulha. Se realizarmos essa experiência, encontraremos que, se for necessária uma força de 8 círculos quando o ponto de intersecção está a 2 linhas da extremidade do fio, são necessários apenas 2 ou 3 círculos de torção a 1 polegada e no máximo um semi-círculo de torção a 2 polegadas; e que quando o fio de aço vertical tem sua extremidade 3 polegadas abaixo da extremidade da agulha suspensa horizontalmente, a repulsão é praticamente nula. Encontraremos a mesma coisa para a atração dos polos de nomes diferentes,[526] porém é necessário observar que, para confiar no resultado dessa experiência, é necessário utilizar apenas agulhas muito temperadas de um aço excelente e de não fornecer a elas um grau muito forte de magnetismo. Caso contrário, como nessa operação as duas agulhas no ponto de cruzamento só estão a 2 linhas de distância, caso a força do fluido magnético seja tal que o fluido possa se deslocar nas partes das agulhas que estão muito próximas entre si, os resultados não mais serão comparáveis. Veremos em outra Memória que a força coercitiva que impede o fluido magnético de se deslocar, uma vez concentrado pela operação de toque duplo, é uma quantidade constante que varia de acordo com a natureza e a têmpera do aço; mas que, quando um ponto da agulha está imantado até a saturação, essa força coercitiva, que podemos comparar ao atrito na mecânica, se equilibra com a resultante de todas as forças, sejam repulsivas, sejam atrativas de todo o fluido magnético difundido na agulha, sendo a força de cada ponto diretamente proporcional às densidades [dos fluidos magnéticos] e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias.

12.7 Recapitulação dos Assuntos Contidos Nessa Memória

Das pesquisas anteriores resulta o seguinte:

1. Que a ação, seja repulsiva, seja atrativa entre dois globos eletrizados e, consequentemente, entre duas moléculas elétricas,[527] é diretamente proporcional às densidades do fluido elétrico das duas moléculas eletrizadas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias.[528]

2. Que em uma agulha tendo de 20 a 25 polegadas de comprimento, imantada pelo método de toque duplo, o fluido magnético pode ser suposto concentrado a 10 linhas das extremidades da agulha.

[526] Por um descuido aparece no original atração dos polos "de mesmo nome", *pour l'attraction des pôles du même nom*. Alteramos a frase para atração dos polos de nomes diferentes, isto é, atração entre o polo Norte da agulha suspensa e o polo Sul do fio vertical, ou atração entre o polo Sul da agulha suspensa e o polo Norte do fio vertical.

[527] No original: *molécules électriques*. Ou seja, entre duas partículas eletrizadas.

[528] O que Coulomb está chamando aqui de "densidade do fluido elétrico" pode ser entendido como a carga elétrica de cada molécula eletrizada. Está então afirmando que a força entre duas partículas eletrizadas é diretamente proporcional ao produto de suas cargas elétricas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Discuto a primeira parte dessa afirmação na Seção 13.3 na página 253.

3. Que quando uma agulha está imantada, ela é sempre levada de volta a esse meridiano por uma força constante paralela ao meridiano, qualquer que seja a orientação na qual ela é colocada em um plano horizontal em relação a seu meridiano magnético, e cuja resultante passa sempre pelo mesmo ponto da agulha suspensa.

4. Que a força atrativa e repulsiva do fluido magnético é exatamente, assim como no caso do fluido elétrico, diretamente proporcional às densidades [do fluido magnético] e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre as moléculas magnéticas.[529]

[529] No original: *molécules magnétiques*. Discuto a primeira parte dessa afirmação na Seção 13.4 na página 255.

Capítulo 13

Observações sobre a Segunda Memória de Coulomb

13.1 Sobre o Segundo Método Experimental para Determinar a Lei de Interação do Fluido Magnético

A próxima figura representa o método experimental discutido na Subseção 12.5.1:

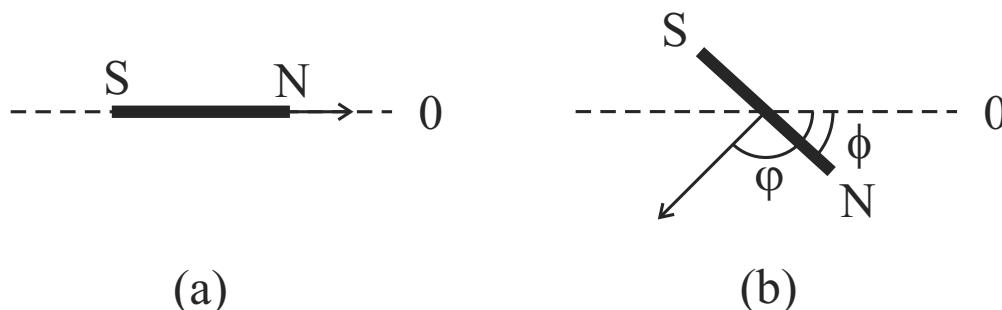



Figura 13.1: Procedimento experimental de Coulomb.

A linha tracejada indica a direção do meridiano magnético. Apresento na Figura 13.1 (a) a situação inicial da experiência na qual a agulha de bússola SN (ou o fio imantado SN) está ao longo do meridiano magnético com sua extremidade N apontando para o ponto 0 do círculo graduado. Essa agulha imantada é presa na parte inferior do fio de suspensão. A seta é o ponteiro do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão. Suponho que inicialmente essa seta também aponte para o ponto 0.

Em seguida a parte superior do fio é girada de um ângulo φ no sentido horário. Observa-se que a agulha imantada também gira no sentido horário, até parar desviada de um ângulo ϕ em relação ao meridiano magnético, como mostrado na Figura 13.1 (b). Nessa situação de repouso, o torque exercido pela torção $\varphi - \phi$ do fio de suspensão é equilibrado pelo torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha imantada SN. Esses dois torques atuam em sentidos opostos, com o fio de suspensão tendendo a girar a agulha imantada no sentido horário e a Terra tendendo a girá-la no sentido anti-horário.

Coulomb varia o ângulo φ e observa o ângulo ϕ adquirido pela agulha imantada para cada valor de φ.

A partir desses resultados experimentais, Coulomb compara na Subseção 12.5.2 o torque

exercido pelo fio de suspensão, medido por $\varphi - \phi$, com o ângulo ϕ com que a agulha imantada se afasta de seu meridiano. Conclui dessa comparação que os senos de ϕ nos testes sucessivos são proporcionais aos ângulos de torção $\varphi - \phi$. Apresento aqui uma Tabela com esses valores:

	sen ϕ	Ângulo $\varphi - \phi$ de torção do fio de suspensão
Primeiro teste	$\text{sen}\, 10,5^\circ = 0,182$	$360^\circ - 10,5^\circ = 349,5^\circ$
Segundo teste	$\text{sen}\, 21,25^\circ = 0,362$	$720^\circ - 21,25^\circ = 698,75^\circ$
Terceiro teste	$\text{sen}\, 33^\circ = 0,545$	$1080^\circ - 33^\circ = 1047^\circ$
Quarto teste	$\text{sen}\, 46^\circ = 0,719$	$1440^\circ - 46^\circ = 1394^\circ$
Quinto teste	$\text{sen}\, 63,5^\circ = 0,895$	$1800^\circ - 63,5^\circ = 1736,5^\circ$
Sexto teste	$\text{sen}\, 85^\circ = 0,996$	$1980^\circ - 85^\circ = 1895^\circ$

Escolhendo os valores do primeiro teste como padrão de comparação, obtemos a seguinte Tabela:

	$\text{sen}\, \phi_1/\text{sen}\, \phi_j$	$(\varphi_1 - \phi_1)/(\varphi_j - \phi_j)$
1° e 2° testes, $j = 2$	$0,182/0,362 = 0,503$	$349,5/698,75 = 0,500$
1° e 3° testes, $j = 3$	$0,182/0,545 = 0,334$	$349,5/1047 = 0,334$
1° e 4° testes, $j = 4$	$0,182/0,719 = 0,253$	$349,5/1394 = 0,251$
1° e 5° testes, $j = 5$	$0,182/0,895 = 0,203$	$349,5/1736,5 = 0,201$
1° e 6° testes, $j = 6$	$0,182/0,996 = 0,183$	$349,5/1895 = 0,184$

Dessa Tabela pode ser visto que $\text{sen}\, \phi$ é proporcional a $\varphi - \phi$, como afirmado por Coulomb.

13.2 Sobre a Utilização da Balança Magnética para Determinar a Força entre os Polos Magnéticos

O procedimento experimental de Coulomb na Seção 12.6 é ilustrado na Figura 13.2.

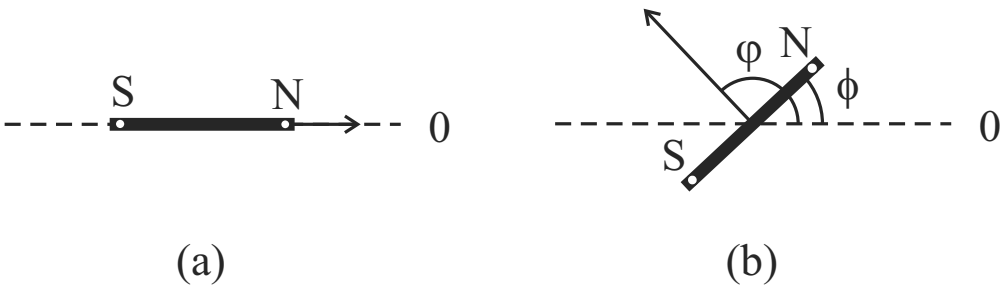



Figura 13.2: Utilização da balança magnética para determinar o torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha imantada.

A linha tracejada indica a direção do meridiano magnético. A Figura 13.2 (a) apresenta a situação inicial da experiência na qual a agulha imantada SN (ou o fio imantado SN) de 24 polegadas está em equilíbrio horizontal ao longo do meridiano com sua extremidade N apontando para o ponto 0 do círculo graduado. As bolas brancas indicam as posições dos centros de ação dessa agulha, ou seja, a localização de seus polos magnéticos, a cerca de 1 polegada de cada extremidade. O centro da agulha imantada é preso na parte inferior do fio

de suspensão. A seta é o ponteiro do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão. Suponho que inicialmente essa seta também aponte para o ponto 0.

Na Figura 13.2 (b) Coulomb torce a parte superior do fio de suspensão no sentido anti-horário de um ângulo φ, fazendo com que a agulha imantada gire nesse sentido até parar em um ângulo ϕ em relação ao meridiano magnético. O torque no sentido anti-horário devido à torção do fio de suspensão é proporcional ao ângulo $\varphi - \phi$. No equilíbrio esse torque é contrabalançado pelo torque magnético no sentido horário ocasionado pelo globo terrestre que faz com que a agulha imantada tenda a retornar ao meridiano magnético. Esse torque magnético devido à Terra é proporcional ao seno do ângulo ϕ. Para ângulos pequenos (ou seja, com $\phi \ll 1$ *radiano* ou $\phi \ll 57,3°$), podemos supor $\operatorname{sen}\phi \approx \phi$, com ϕ expresso em radianos. Coulomb observou que ao girar a parte superior do fio de suspensão com $\varphi = 720°$, a agulha imantada parou em um ângulo de $\phi = 20°$. A torção resultante do fio foi então de $720° - 20° = 700°$. Conclui então que é necessária uma força de torção resultante de $700°/20 = 35°$ para afastar a agulha horizontal de 1 grau de seu meridiano magnético. A partir dessa força de torção estimou o torque exercido pelo magnetismo terrestre ao atuar sobre essa agulha imantada.

Em seguida volta-se à situação na qual o fio de suspensão não está torcido, com a agulha imantada horizontal apontando ao longo do meridiano magnético, Figura 13.3 (a).

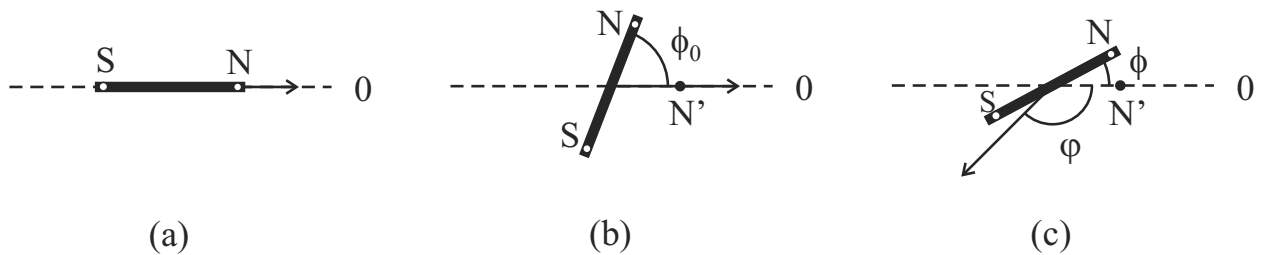



Figura 13.3: Utilização da balança magnética para determinar a força entre dois polos magnéticos.

É colocada uma agulha imantada vertical $S'N'$ (ou um fio imantado vertical $S'N'$) ao longo do meridiano magnético da agulha horizontal, com os polos de mesmo tipo próximos entre si. Isso ocasiona uma repulsão entre esses polos que faz com que a parte inferior do fio de suspensão seja torcida até que a agulha suspensa horizontalmente pare em uma nova situação de equilíbrio. Na Figura 13.3 (b) temos o polo Norte N' da agulha imantada vertical representado pela bola preta. Essa agulha vertical também tem 24 polegadas, assim como a agulha imantada suspensa horizontalmente. O polo N' é colocado no mesmo plano horizontal da agulha suspensa, de tal forma que, caso o polo N' e a agulha horizontal se encostassem, os polos de mesmo nome N e N' coincidiriam no mesmo ponto. O polo Sul da agulha vertical, S', não está representado nessa Figura. Ele está a cerca de 22 polegadas acima do plano da agulha horizontal. Devido à repulsão entre os polos Norte das duas agulhas, a parte inferior do fio de suspensão é torcida pela colocação do polo N' da agulha vertical nessa posição, até que a agulha horizontal pare em uma orientação desviada de um ângulo ϕ_0 em relação ao meridiano magnético, Figura 13.3 (b). Estou supondo aqui que esse desvio foi no sentido anti-horário. Nessa situação o torque de repulsão entre os polos de mesmo nome tende a girar a agulha horizontal no sentido anti-horário. No equilíbrio esse torque é contrabalançado por outros dois torques que tendem a girar a agulha horizontal no sentido horário, a saber, o torque devido à torção da parte inferior do fio de suspensão e o torque magnético devido à ação do globo terrestre sobre a agulha imantada.

Na Figura 13.3 (c) o ponteiro do micrômetro ligado à parte superior do fio de suspensão é girado de um ângulo φ no sentido horário, fazendo com que a agulha horizontal gire no sentido horário, aproximando-se do meridiano magnético até parar em um ângulo ϕ. Nesse caso a torção total do fio de suspensão é dada pelo ângulo $\varphi + \phi$.

Apresento na Tabela a seguir os valores desses ângulos no caso da Figura 13.3 (c) de acordo com as experiências da Seção 12.6:

	φ	ϕ	$\varphi + \phi$	$35 \times \phi$	$\alpha = (\varphi + \phi) + (35 \times \phi)$
Primeiro teste	0°	24°	24°	840°	864°
Segundo teste	1080°	17°	1097°	595°	1692°
Terceiro teste	2880°	12°	2892°	420°	3312°

Vou representar pelo ângulo α o torque de repulsão exercido pelo polo Norte N' da agulha vertical ao atuar sobre a agulha horizontal. No equilíbrio esse torque de repulsão é contrabalançado por outros dois torque atuando no sentido contrário, a saber, o torque devido à torção total do fio de suspensão (representado por $\varphi + \phi$) e o torque devido à ação magnética do globo terrestre atuando sobre a agulha horizontal (representado por $35 \times \phi$).[530] Coulomb obtém α pela seguinte equação que descreve o equilíbrio entre esses três torques na Figura 13.3 (c):

$$\alpha = (\varphi + \phi) + (35 \times \phi) . \tag{13.1}$$

Esses valores de α estão dados na última coluna da Tabela anterior.

A partir dos valores de ϕ e de α, Coulomb conclui que a repulsão entre o polo Norte N da agulha suspensa horizontalmente e o polo N' da agulha vertical é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre esses polos. Para chegar a essa conclusão ele despreza as ações dos outros polos entre si, já que estão muito mais afastados do que os polos mais próximos N e N'. Além disso, estima as distâncias entre esses polos N e N' pelo ângulo ϕ entre eles. Na próxima Tabela apresento (utilizando o grau como unidade) os valores de ϕ, $1/\phi^2$ e α:

	ϕ	$1/\phi^2$	α
Primeiro teste	24	0,00174	864
Segundo teste	17	0,00346	1692
Terceiro teste	12	0,00694	3312

Escolhendo os valores do primeiro teste como padrão de comparação, obtemos a seguinte Tabela:

	$(1/\phi_1^2)/(1/\phi_j^2)$	α_1/α_j
1° teste, $j = 1$	$0,00174/0,00174 = 1$	$864/864 = 1$
1° e 2° testes, $j = 2$	$0,00174/0,00346 = 0,503$	$864/1692 = 0,511$
1° e 3° testes, $j = 3$	$0,00174/0,00694 = 0,251$	$864/3312 = 0,261$

Os números da segunda e da terceira coluna são muito próximos entre si, sendo dados aproximadamente por 1, 1/2 e 1/4.

Essa proximidade entre os valores da segunda e da terceira coluna justifica a conclusão de Coulomb de que as forças entre os polos magnéticos são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias entre esses polos.

[530] Já que Coulomb está assumindo para esses ângulos pequenos que $\operatorname{sen} \phi \approx \phi$. Além disso, Coulomb estimou que era necessária uma força de torção representada por 35° para cada 1 grau de afastamento da agulha horizontal em relação à direção do meridiano magnético.

13.3 A Proporcionalidade da Força Elétrica em Relação ao Produto das Cargas: Definição ou Lei Experimental?

Hoje em dia apresenta-se a lei de Coulomb dizendo que a força entre duas partículas eletrizadas com cargas q_1 e q_2, separadas por uma distância d muito maior que seus tamanhos, é proporcional a

$$\frac{q_1 q_2}{d^2} \ . \tag{13.2}$$

Gillmor, Blondel e Wolff apresentaram uma discussão muito importante relacionada à proporcionalidade da força elétrica em relação ao produto das cargas.[531] Em particular, essa proporcionalidade é uma definição da quantidade de carga ou é uma lei experimental?

Em sua Primeira Memória Coulomb mostrou experimentalmente que a força entre duas pequenas bolas eletrizadas com cargas de mesmo sinal era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros. Para isso comparou a força elétrica com a força de torção do fio de sua balança. Na Segunda Memória ele mostrou que a mesma lei é válida no caso atrativo com cargas de sinais opostos. Nesse caso estudou o período de oscilação de uma pequena bola eletrizada colocada diante de uma grande bola eletrizada parada em relação ao solo. No final dessa Segunda Memória apresentou então a conclusão de suas experiências com as seguintes palavras, ver a página 247:

> Das pesquisas anteriores resulta o seguinte: Que a ação, seja repulsiva, seja atrativa entre dois globos eletrizados e, consequentemente, entre duas moléculas elétricas, é diretamente proporcional às densidades do fluido elétrico das duas moléculas eletrizadas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias.

Ou seja, a força F entre duas partículas eletrizadas é proporcional ao produto das quantidades totais de fluido elétrico nas duas partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Embora ele tenha dito que esses resultados são uma consequência de suas pesquisas anteriores, em nenhum momento Coulomb testou experimentalmente a proporcionalidade da força em relação ao produto das quantidades de carga das partículas que estavam interagindo. Nas próximas Memórias ele vai utilizar essa proporcionalidade para interpretar várias experiências. Para Coulomb parece ter sido evidente que a força entre dois pequenos corpos eletrizados tinha de ser proporcional ao produto das cargas elétricas desses corpos.

Blondel e Wolff afirmam que Coulomb de fato *define* implicitamente a quantidade de carga de uma partícula eletrizada a partir da proporcionalidade em relação à força elétrica que essa partícula exerce sobre uma outra partícula eletrizada.[532] Ou seja, quanto maior for a força observada, maior será a quantidade da carga na partícula. Vamos supor que na situação inicial uma partícula eletrizada com uma certa carga q_1 exerce uma força F_1 em outro partícula eletrizada 2. Se a força medida sobre essa mesma partícula eletrizada 2 dobrar ou triplicar, então a quantidade de carga na partícula que está exercendo a força será, por definição, duas ou três vezes maior do que q_1.

[531] [Gillmor, 1971b], [Gillmor, 1971a, págs. 190-192], [Blondel and Wolff, 2013d]. Ver também a Seção 14.1 (força eletrostática ou força de Coulomb) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

[532] [Blondel and Wolff, 2013d].

A analogia com a lei da gravitação universal de Newton, de acordo com a qual a força gravitacional entre duas partículas é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, é subjacente a todo o trabalho de Coulomb. Essa analogia estaria representada, por exemplo, por sua escolha da expressão "massa elétrica" para designar aquilo que é chamado hoje em dia de "carga elétrica". Já no início da Segunda memória Coulomb usou explicitamente que a força era proporcional ao produto das cargas ao introduzir a seguinte expressão:[533]

> D igual ao produto da massa elétrica das duas bolas.

Como citado por Peter Heering, as seguintes palavras de H. G. Hammon mostram uma conclusão semelhante:[534]

> Coulomb não descreveu qualquer experiência para estabelecer a dependência da força em relação às quantidades de carga nas esferas. Suas afirmações sobre a dependência da força em relação às cargas foram feitas claramente por analogia com a lei da gravitação de Newton. Isso indica, talvez mais fortemente do que qualquer outro aspecto da história, o caráter da lei de Coulomb como uma *definição* da quantidade de carga. Sua escolha do produto simples das quantidades de carga é certamente a escolha mais simples, mas não é a *única* escolha possível.

Um outro exemplo da importância do trabalho de Newton na obra de Coulomb está contido na suposição de Coulomb ao considerar a ação de uma casca esférica eletrizada sobre um outro corpo eletrizado como se toda a casca esférica estivesse concentrada em seu centro. Ver, por exemplo, a Subseção 12.1.1 e a Nota de rodapé 455 na página 225.

De acordo com Gillmor, Blondel e Wolff, teria sido possível a Coulomb dar um fundamento experimental à proporcionalidade da força elétrica em relação ao produto das cargas. Para fazer isso ele teria de encontrar uma maneira de quantificar o conceito de carga elétrica sem usar o conceito de força. Feito isso, poderia então utilizar sua balança de torção para verificar experimentalmente a relação da força em função da quantidade de carga nas esferas que estão interagindo.

Em sua Quarta Memória Coulomb vai investigar se a distribuição de carga entre dois condutores depende ou não de suas composições químicas. Para fazer isso ele introduz em sua balança elétrica uma bola de cobre eletrizada, deixando-a em uma posição fixa em relação ao solo. Essa bola entra em contato com uma outra bola condutora inicialmente descarregada. Essa última bola está na extremidade de uma agulha isolante horizontal presa por seu centro a um fio vertical que pode ser torcido. Após o contato, as duas bolas se repelem a uma grande distância. Ele aproxima a segunda bola da primeira até uma certa distância d por meio da torção que pode fornecer à parte superior do fio de suspensão. A medida do ângulo total de torção lhe fornece uma medida da força repulsiva entre as duas bolas eletrizadas a essa distância d. Vamos chamar essa força de F_1. Em seguida ele coloca uma terceira bola em contato com a primeira bola de cobre. Essa terceira bola é condutora, tem o mesmo diâmetro que a bola de cobre, mas é feita de um material diferente, estando inicialmente descarregada. A eletricidade da bola de cobre é dividida entre ela e essa terceira bola pelo contato entre elas. Em seguida a terceira bola é afastada da balança. Como a bola de cobre perdeu um pouco de sua carga, a bola da agulha aproxima-se dela. Coulomb então

[533] Ver a Nota de rodapé 439 na página 220.
[534] [Heering, 1992, pág. 993] e [Heering, 1994, pág. 64].

diminui a torção do fio até que a bola da agulha e a bola de cobre voltem à mesma distância d anterior. Novamente a força repulsiva entre essas bolas é medida pelo novo ângulo de torção. Vamos chamá-la de F_2. Ele observou que essa força era essencialmente a metade da força anterior, isto é, $F_2 = F_1/2$. Como Coulomb está *supondo ou assumindo* a proporcionalidade entre a força elétrica e a quantidade de carga, ele concluiu então que a terceira bola adquiriu exatamente a metade do fluido elétrico da primeira bola de cobre ao entrar em contato com ela. Como essa terceira bola tem o mesmo diâmetro que a bola de cobre, mas é feita de um material diferente, isso significa que a divisão de carga entre duas bolas condutoras no contato entre elas não depende do material de que são feitas. Esse resultado experimental não poderia ser previsto a priori, já que não é algo trivial ou óbvio pois nessa experiência foram utilizadas bolas feitas de materiais diferentes. Argumentos de simetria não podem ser utilizados nesse caso.

Esse procedimento poderia ter sido invertido para se chegar experimentalmente que a força elétrica é proporcional ao produto das cargas entre os corpos que estão interagindo. Para isso seria necessário utilizar a primeira e a terceira bola não apenas de mesmo tamanho, mas também de mesmo material (as duas bolas feitas de cobre, por exemplo). Por questões de simetria pode-se *postular* que o fluido elétrico vai se dividir igualmente entre as duas bolas quando entram em contato, estando uma delas inicialmente eletrizada e a outra descarregada, já que ambas são condutoras, possuem o mesmo formato, o mesmo tamanho, sendo feitas do mesmo material. Em seguida, seguindo o mesmo procedimento experimental apresentado no parágrafo anterior, concluiria que $F_2 = F_1/2$. Nesse caso viria da experiência que, ao supor a força inicial entre duas cargas q_1 e q_2 sendo dada F_1, ao dividir apenas uma das cargas pela metade, a força exercida entre $q_1/2$ e q_2 também cai pela metade, sendo dada por $F_1/2$. Só que nesse caso esse fato seria estabelecido experimentalmente através dos ângulos de torção medidos em sua balança elétrica.

13.4 A Proporcionalidade da Força Magnética em Relação ao Produto das Intensidades dos Polos: Definição ou Lei Experimental?

Hoje em dia apresenta-se a lei de Coulomb para a magnetostática dizendo que a força entre dois polos magnéticos com intensidades p_1 e p_2 separados por uma distância d é proporcional a

$$\frac{p_1 p_2}{d^2} \ . \tag{13.3}$$

Assim como no caso da força elétrica, pode-se fazer uma pergunta análoga. Essa proporcionalidade da força em relação ao produto dos polos é uma definição de intensidade de polo ou uma lei experimental?

O título da Seção 12.3 da Segunda Memória de Coulomb é o seguinte:

> O Fluido Magnético Atua por Atração ou Repulsão em uma Razão Composta Diretamente da Densidade do Fluido e Inversamente do Quadrado da Distância Entre Suas Moléculas.

Ou seja, Coulomb está afirmando que a força magnética entre duas partículas é proporcional ao produto das quantidade totais de fluido magnético nas duas partículas e inversamente

proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Logo em seguida a esse título Coulomb afirmou o seguinte:[535]

> Não há necessidade de provar a primeira parte dessa proposição; vamos para a segunda parte.

Coulomb apresentou uma outra formulação dessa lei no final da Segunda Memória, a saber:[536]

> Das pesquisas anteriores resulta o seguinte: Que a força atrativa e repulsiva do fluido magnético é exatamente, assim como no caso do fluido elétrico, diretamente proporcional às densidades [do fluido magnético] e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre as moléculas magnéticas.

Para provar que a força entre as moléculas magnéticas era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, utilizou agulhas cilíndricas de aço longas e finas imantadas homogeneamente pelo método de toque duplo. De suas experiências concluiu que em uma agulha cilíndrica tendo de 54 a 68 cm de comprimento (20 a 25 polegadas), um diâmetro de 0,3 cm (1,5 linha), imantada pelo método de toque duplo, o fluido magnético pode ser suposto concentrado a 2,3 cm (10 linhas) das extremidades da agulha.[537]

Usou então essas agulhas em sua balança de torção para determinar a força entre os polos magnéticos de duas agulhas imantadas. Com isso concluiu experimentalmente a segunda parte da citação acima, a saber, que a força atrativa e repulsiva do fluido magnético é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre esses polos.

Como visto nas citações dessa Seção, Coulomb mencionou explicitamente que não haveria necessidade de provar que a força entre as supostas moléculas ou partículas magnéticas era proporcional às suas densidades de fluido, isto é, ao produto de suas quantidades de fluido magnético. Ele também não fez experiências para mostrar que a força entre os polos de duas agulhas imantadas era proporcional ao produto de suas intensidades de polo magnético. Ele dá a entender que essa proporcionalidade deveria ser aceita sem provas. Assim como no caso da força elétrica discutido na Seção 13.3, parece que para ele era evidente que a força entre duas partículas magnéticas tinha de ser proporcional ao produto de suas quantidades de fluido magnético. Da mesma forma, a força entre os centros de ação de duas agulhas imantadas tinha de ser proporcional ao produto de suas intensidades de polo magnético. Ele utiliza essa proporcionalidade para interpretar várias experiências. Ele também usa essa proporcionalidade para estimar a variação da densidade de fluido magnético ao longo do comprimento de uma agulha imantada.

Gillmor, Blondel e Wolff também discutiram a proporcionalidade da força em relação ao produto das intensidades de polo magnético.[538] De acordo com esses autores, Coulomb teria considerado desnecessário provar essa proporcionalidade devido à analogia que assumia entre a força magnética e a força gravitacional newtoniana. Isso fica evidente pela sua terminologia magnética apresentada na Seção 4.5. Em particular, a quantidade de fluido magnético em uma partícula é indicada pelas expressões "intensidade de massa", "intensidade magnética" e

[535] Ver a Nota de rodapé 480 na página 234.
[536] Ver a página 248.
[537] Ver a página 247.
[538] [Gillmor, 1971b], [Gillmor, 1971a, págs. 190-192], [Blondel and Wolff, 2013d].

"massa do fluido magnético".[539] O termo "massa" nesse contexto magnético é uma indicação clara da influência das ideias de Newton sobre Coulomb. Uma outra indicação direta de que Coulomb estava sendo influenciado pela força gravitacional de Newton também no caso do magnetismo é a seguinte citação de seu trabalho de 1777:[540]

> Portanto, parece que resulta da experiência que não são os turbilhões que produzem os diferentes fenômenos magnéticos e que, para explicar esses fenômenos magnéticos, é necessário recorrer a forças atrativas e repulsivas da mesma natureza daquelas que somos obrigados a utilizar para explicar o peso dos corpos e a física celeste.

O torque de reação exercido por um fio metálico é diretamente proporcional ao ângulo de torção do fio. Logo esse ângulo serve como medida da força magnética. Nessa Segunda Memória Coulomb utilizou esse fato para estabelecer que a força entre polos magnéticos era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os polos. Coulomb poderia utilizar um procedimento análogo para testar experimentalmente a proporcionalidade da força em relação ao produto das intensidades de polo magnético, ou seja, para verificar se a força é ou não proporcional a esse produto. Para isso poderia utilizar o procedimento experimental descrito nas Seções 12.6 e 13.2. Ele poderia usar uma longa agulha imantada suspensa horizontalmente ao longo do meridiano magnético por um fio vertical preso ao centro da agulha e colocado em sua balança de torção. Então observaria o ângulo de torção ϕ_1 quando um primeiro fio imantado vertical fosse colocado ao longo do meridiano magnético com os polos de mesmo nome colocados próximos entre si e no mesmo plano horizontal, como ilustrado na Figura 13.3. Ao retirar esse fio vertical a agulha horizontal volta a se orientar ao longo do meridiano magnético. Ele então poderia testar vários fios imantados feitos do mesmo material que o primeiro fio, tendo também o mesmo formato e tamanho que ele, sendo todos eles imantadas pelo mesmo método de toque duplo. Vamos chamá-los de fios 2, 3, 4, 5, ... Ao colocar um de cada vez verticalmente ao longo do meridiano magnético da primeira agulha horizontal, no mesmo local e altura que havia colocado anteriormente o primeiro fio, com os polos de mesmo nome no mesmo plano horizontal (por exemplo, com o polo Norte N da agulha horizontal e com o polo Norte N' do fio vertical no mesmo plano horizontal, com esses dois polos próximos entre si), verificaria os ângulos ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5, ..., de afastamento da agulha horizontal em relação ao meridiano magnético. Ele então poderia definir que o fio vertical que afastar a agulha horizontal do mesmo ângulo ϕ_1 ocasionado pelo primeiro fio, teria a mesma intensidade de polo magnético que ele, já que exercem a mesma ação sobre a agulha horizontal quando colocados no mesmo ponto. Vamos supor que o quarto fio exerça a mesma ação sobre a agulha que o primeiro fio, isto é, $\phi_4 = \phi_1$. Ele então poderia postular que, ao colocar juntos o primeiro e o quarto fios, com os polos de mesmo nome lado a lado, eles teriam em conjunto o dobro da intensidade de polo que o primeiro fio sozinho. Poderia então utilizar um procedimento análogo ao que utilizou na Segunda Memória para verificar se a força exercida pelos dois polos Norte desses dois fios juntos, ao atuarem sobre o polo Norte da agulha horizontal, tinha ou não o dobro do valor da força exercida apenas pelo polo Norte do fio 1 ao atuar sobre o polo Norte da agulha horizontal. A força nesse caso seria medida pelo ângulo de torção da agulha horizontal em relação ao seu meridiano magnético.

Ou seja, ele poderia inicialmente estabelecer que dois polos magnéticos possuem a mesma intensidade quando, estando à mesma distância de um terceiro polo magnético, exercem a

[539] Ver as Notas de rodapé 98, 841 e 913.

[540] Ver a página 56 dessa tradução em português.

mesma força F sobre esse terceiro polo magnético. Postularia então que dois polos de mesma intensidade, ao serem colocados lado a lado, teriam o dobro da intensidade de apenas um desses polos. Em seguida verificaria se a força exercida por esses dois polos juntos, ao atuarem em conjunto sobre o terceiro polo, tem ou não o dobro da intensidade que a força F exercida por um desses polos ao atuar sozinho sobre o terceiro polo. Nesse caso a intensidade da força magnética seria estimada pelo ângulo de torção de sua balança magnética (supondo ainda que em todos esses casos a estimativa das forças magnéticas é feita com os polos sempre à mesma distância, sendo essa distância bem maior que a espessura das agulhas). Essa seria uma possibilidade de estabelecer experimentalmente que a força entre polos magnéticos é proporcional ao produto das intensidades magnéticas.

Capítulo 14

Terceira Memória sobre Eletricidade e Magnetismo: Sobre a Quantidade de Eletricidade que um Corpo Isolado Perde em um Tempo Dado, Seja pelo Contato com o Ar Mais ou Menos Úmido, Seja ao Longo dos Suportes Mais ou Menos Dielétricos

Por Coulomb[541]

Quando um corpo condutor eletrizado é isolado por suportes dielétricos,[542] a experiência mostra que a eletricidade desse corpo diminui e é destruída bem rapidamente. O tema dessa Memória é o de determinar de acordo com quais leis ocorre essa diminuição. O conhecimento dessa lei é absolutamente necessário para poder submeter ao cálculo, na sequência, os outros fenômenos da eletricidade. Afinal de contas, as experiências destinadas a avaliar esses fenômenos não podem ser executadas instantaneamente, não podendo ser comparadas entre si sem conhecer as alterações que elas sofrem no tempo decorrido entre uma e outra [experiência].

Duas causas parecem contribuir principalmente para a perda de eletricidade nos corpos: a primeira, é provável que não exista na natureza algum suporte perfeitamente isolante, isto é, que não existe qualquer corpo que seja inteiramente impenetrável à eletricidade quando ela é levada a uma intensidade muito alta; além disso, mesmo que existisse esse corpo, como o ar está sempre carregado de um certo grau de umidade, essa umidade se liga à superfície dos corpos dielétricos em uma quantidade maior ou menor, dependendo se o ar está mais ou menos úmido e dependendo se o corpo dielétrico, por sua própria natureza, possui uma afinidade maior ou menor com a água do que partes do ar possuem; de forma

[541]Esse trabalho foi apresentado em 1785 na Academia de Ciências da França e publicado em 1788, [Coulomb, 1788e], com tradução para o alemão em [Coulomb, 1890a].

[542]No original: *soutiens idio-électriques*. Ou seja, suportes isolantes. Ver a Nota de rodapé 433 na página 219.

que frequentemente ocorre que as partes aquosas espalhadas sobre a superfície do corpo dielétrico que serve de apoio a um corpo eletrizado ficam mais próximas entre si do que no ar ambiente; e como essas partes aquosas são condutoras de eletricidade, nesse caso, quando o corpo dielétrico que serve de apoio não possui um comprimento suficiente, a eletricidade se perde mais facilmente ao longo da superfície do corpo dielétrico que serve de apoio do que pelo contato com o ar.

A segunda causa é que, estando o corpo eletrizado cercado pelo ar atmosférico, esse ar, composto de diferentes elementos, é mais ou menos dielétrico, seja pela natureza desses elementos, seja pela afinidade deles com as moléculas aquosas; afinidade que varia ainda de acordo com o grau de calor, de forma que o ar pode ser considerado como composto de uma infinidade de elementos em parte dielétricos, em parte condutores. Porém, como um corpo condutor sempre se carrega com uma parte da eletricidade do corpo que o toca, e como, carregado dessa eletricidade, ele é repelido por esse corpo, resulta que cada molécula do ar que toca um corpo eletrizado se carrega com a eletricidade desse corpo mais ou menos rapidamente, dependendo se a densidade elétrica do corpo[543] é maior ou menor, e dependendo se o ar está mais ou menos carregado de umidade ou de partes condutoras de eletricidade. Assim que uma molécula do ar é carregada de eletricidade, ela é repelida pelo corpo eletrizado e substituída por outra [molécula] que se eletriza, sendo repelida por sua vez. Com cada uma dessas moléculas levando embora uma parte da eletricidade do corpo eletrizado que elas cercam, a densidade elétrica [do corpo] diminui mais ou menos rapidamente, de acordo com o estado da atmosfera. A explicação que acabamos de fornecer sobre a maneira pela qual a eletricidade é perdida pelo contato com o ar, cujas moléculas infinitamente pequenas se movem com muita facilidade, não é aplicável à maneira como a experiência ensina que a eletricidade é perdida ao longo das superfícies dos suportes que se tornaram dielétricos imperfeitos pelo contato com o ar úmido; já que, nesse segundo caso, as partes aquosas adquirem um grau bem forte de adesão com a superfície desses suportes; além do que essa aderência é às vezes maior que a ação repulsiva que o corpo eletrizado exerce sobre a molécula aquosa para a qual ele transmitiu uma parte de sua eletricidade. Daí vem que, sendo esse resultado confirmado pela experiência, quando a molécula aquosa mais próxima do corpo eletrizado é carregada de eletricidade, essa eletricidade passa parcialmente para a próxima molécula, sem que essa molécula se desloque, e assim por diante de molécula em molécula até alcançar uma certa distância do corpo. Assim a densidade [elétrica] de cada molécula vai diminuir na medida em que estiver mais afastada do corpo eletrizado, já que estando essas moléculas aquosas separadas por um pequeno intervalo dielétrico,[544] é necessário um certo grau de força para que a eletricidade possa passar de uma molécula para outra. A resistência que esse pequeno intervalo dielétrico opõe ao escoamento do fluido elétrico parece só poder ser representada por uma pequena quantidade constante para um intervalo constante e deve, consequentemente, ser proporcional à diferença de ação entre duas moléculas consecutivas. Veremos mais tarde que o cálculo e as experiências que determinam a lei da densidade do fluido elétrico ao longo de suportes dielétricos imperfeitos estão de acordo com o raciocínio anterior.

Portanto, as pesquisas a seguir devem ter dois objetivos: O primeiro determinar de

[543]No original: *la densité électrique du corps*. Isto é, a carga elétrica sobre a superfície do corpo.

[544]No original: *intervalle idio-électrique*. Ou seja, cada partícula ou molécula aquosa que puder ser eletrizada se comportaria como um condutor. De acordo com Coulomb essas moléculas estariam separadas entre si por um pequeno intervalo dielétrico, isto é, por um pequeno intervalo isolante ao longo da superfície do suporte.

acordo com qual lei a eletricidade é perdida no contato com o ar; o segundo determinar de acordo com qual lei essa mesma eletricidade é perdida ao longo da superfície dos suportes dielétricos. Mas como em todas as experiências que podemos realizar os corpos condutores carregados de eletricidade são sempre apoiados por corpos dielétricos, naturalmente essas experiências devem sempre apresentar um resultado composto da perda da eletricidade pelo contato com o ar e da perda da eletricidade ao longo da superfície do suporte dielétrico, a menos que alguém consiga apoiar o corpo com um suporte dielétrico cuja superfície seja proporcionalmente menos carregada de umidade ou de partes condutoras que as moléculas do ar ambiente; nesse caso, ao diminuir bastante a superfície de contato entre o corpo eletrizado e seu suporte, a diminuição de eletricidade do corpo será devida totalmente ao contato com o ar. Após esse raciocínio, tentei, para servir de apoio ao corpo eletrizado, vários materiais dielétricos, e encontrei que, quando a densidade elétrica do corpo apoiado não era muito grande, um pequeno cilindro de cera da Espanha ou de goma-laca,[545] com um diâmetro de meia linha [0,11 cm] e com 18 a 20 linhas [4,1 a 4,5 cm] de comprimento, era quase sempre suficiente para isolar perfeitamente uma bola de sabugueiro[546] com 5 a 6 linhas [1,1 a 1,4 cm] de diâmetro. Encontrei igualmente que, quando o ar estava seco, um fio de seda muito fino que passou pela cera da Espanha fervente e que formou em seguida apenas um pequeno cilindro de no máximo 1/4 de linha [0,06 cm] de diâmetro cumpriu o mesmo objetivo, desde que déssemos a esse fio um comprimento de 5 a 6 polegadas [13,5 a 16,2 cm]. Um fio de vidro, obtido de uma lâmpada sopradora de vidro,[547] com 5 ou 6 polegadas de comprimento, isola a bola somente em dias muito secos e quando ela é carregada de um grau muito fraco de eletricidade; ocorre o mesmo com um fio de cabelo ou de seda que não são revestidos de cera da Espanha ou, o que funciona ainda melhor, de goma-laca pura.

14.1 Primeira Parte: Experiência para Determinar a Perda da Eletricidade pelo Contato com o Ar

Apresentei na minha Primeira Memória sobre eletricidade a descrição da balança que uso em todas as experiências elétricas. Podemos nos lembrar, ao olhar a figura dessa balança,[548] que uma agulha horizontal formada por um fio de seda revestido de cera da Espanha ou mesmo por uma palha terminada por um pequeno cilindro de goma-laca, tem uma bolinha de sabugueiro de 4 ou 5 linhas de diâmetro [0,90 a 1,1 cm] em sua extremidade; que essa agulha é suspensa horizontalmente por um fio de prata com 28 polegadas (75,80 cm) de comprimento e que, ao agir sobre uma alavanca com [um braço de] 4 polegadas (10,83 cm) para torcer o fio de suspensão ao redor de seu eixo, é necessário empregar uma força de apenas 1/340 de um grão (0,153 dinas) para girá-la de 360°;[549] que as forças de torção são geralmente proporcionais ao ângulo de torção, de maneira que, por exemplo, para torcer nosso fio de 36° ou para fazer a agulha variar de 36°, é necessário empregar [uma força] de apenas $\frac{1}{3400}$ de grão. Devemos ainda lembrar que a força de torção desse fio de suspensão é medida de uma maneira bem simples por meio de um micrômetro colocado no alto da haste

[545]Ver a Nota de rodapé 383 na página 199.

[546]Ver a Nota de rodapé 384 na página 200.

[547]No original: *lampe d'émailleur*. Instrumento utilizado para amolecer o vidro e lhe dar formas diferentes. Em geral dotada de maçarico que torna a chama mais intensa para esmaltar ou trabalhar o vidro.

[548]Ver as Figuras 1 e 3 nas páginas 197 e 199, respectivamente.

[549]Ver a Nota de rodapé 392 na página 202.

de nossa balança e que, ao apresentar à bola da agulha uma segunda bola de mesmo tamanho isolada como a bola da agulha, a ação recíproca entre elas, quando estão carregadas de uma eletricidade de mesma natureza, tende a afastá-las entre si; que ao torcer o fio de suspensão por meio do micrômetro, é fácil de medir essa ação, a qual encontramos, nessa [primeira] Memória, exatamente como [sendo proporcional] ao inverso do quadrado da distância entre as bolas.

Aqui vai o método que me pareceu o mais simples e mais exato para determinar, por meio dessa mesma balança, a lei de acordo com a qual um corpo eletrizado perde sua eletricidade em um tempo dado.

Suspendi em um fio de seda muito fino, revestido de cera da Espanha e terminado por um pequeno cilindro de goma-laca de 18 a 20 linhas (4 a 4,5 cm) de comprimento, uma bolinha de sabugueiro semelhante àquela da agulha; o introduzi através do orifício da tampa da minha balança, como havia feito na Primeira Memória, e o coloquei da mesma maneira.

Por meio de um alfinete de cabeça grande que carreguei de eletricidade e que está isolado como na Primeira Memória, eletrizei igualmente as duas bolas, o que é muito fácil [de obter] fazendo-as tocar uma à outra. Quando essas bolas são eletrizadas, elas se repelem mutuamente e a agulha só entra em repouso quando a distância entre as duas bolas é tal que a força de torção é igual à força repulsiva [entre elas]: um exemplo fará com que a operação seja melhor compreendida do qualquer outra explicação.

Suponho que a bola da agulha é repelida a 40°; ao torcer o fio de suspensão, eu a trago a uma distância menor, por exemplo a 20°, o que ainda suponho que tenha sido obtido ao torcer o fio de suspensão de 140°. Observo o instante no qual essa bola corresponde muito precisamente a 20°. À medida que a eletricidade é perdida, as bolas se aproximam alguns minutos após a operação; assim, para poder observá-las sempre à mesma distância de 20°, destorço, por meio do indicador [do micrômetro], o fio de suspensão de 30°, e a força de torção estando diminuída desses 30°, as bolas se repelem um pouco acima de 20°. Espero o instante no qual a bola da agulha chega nos 20°, e meço muito exatamente o tempo transcorrido entre essas duas operações; suponho que esse tempo seja de três minutos. Resultará dessa operação que na primeira observação, sendo a distância entre as bolas de 20°, a força repulsiva tinha por medida $140° + 20°$; que três minutos depois a força repulsiva, na mesma distância de 20°, era somente $110° + 20°$, quer dizer que ela diminuiu de 30° [em três minutos,] ou de 10° por minuto: assim, como a força média entre as duas operações era medida por 145°, e como ela diminuiu de 30° em três minutos ou de 10° por minuto, a força elétrica diminuía de 10/145 por minuto.

Foi de acordo com esse método[550] que formei a primeira Tabela que representa as observações feitas em 28 de maio, 29 de maio, 22 de junho e 2 de julho. Escolhi essas quatro observações entre uma infinidade de outras, já que o higrômetro indicava esses quatro dias com diferenças consideráveis no grau de umidade do ar, e porque o grau de calor era aproximadamente o mesmo.

14.1.1 Observações sobre a Próxima Tabela

Nessa Tabela a primeira coluna representa o instante da observação; a segunda, a distância entre as bolas; a terceira, o grau de torção dado pelo micrômetro; a quarta, a duração do tempo transcorrido entre duas observações consecutivas; a quinta, a perda da força elétrica no tempo transcorrido entre duas observações; a sexta, a força média de repulsão entre duas

[550] Uma ilustração desse método encontra-se nas Figuras 15.1 e 15.2 da Seção 15.1.

observações consecutivas, medida pela torção média; enfim, a sétima coluna indica a razão da força elétrica perdida em 1 minuto, para a força total.[551]

Primeira tabela para determinar a quantidade de eletricidade perdida durante um minuto pelo contato com o ar							
	Horário da experiência (manhã)	Distância entre as bolas	Torção do micrômetro	Tempo decorrido entre duas observações consecutivas	Força elétrica perdida entre duas observações	Força média entre duas observações	Razão da força elétrica perdida pelo corpo durante 1 minuto, para a força média do corpo
Primeira experiência em 28 de maio. Higrômetro, 75°; termômetro 15, 5°; barômetro $28^P\ 3^l$							
1° teste	6h 32m 30s	30	120				
				5m 45s	20	140	1/40
2° teste	6h 38m 15s	30	100				
				6m 15s	20	120	1/38
3° teste	6h 44m 30s	30	80				
				8m 30s	20	100	1/42
4° teste	6h 53m 0s	30	60				
				10m	20	80	1/40
5° teste	7h 3m 0s	30	40				
				14m	20	60	1/42
6° teste	7h 17m 0s	30	20				
Segunda experiência em 29 de maio. Higrômetro, 69°; termômetro 15, 5°; barômetro $28^P\ 4^l$							
1° teste	5h 45m 30s	30	130				
				7m 30s	20	150	1/56
2° teste	5h 53m 0s	30	110				
				9m 30s	20	130	1/61
3° teste	6h 2m 30s	30	90				
				9m 45s	20	110	1/54
4° teste	6h 12m 15s	30	70				
				20m 45s	30	75	1/58
5° teste	6h 33m 30s	30	40				
				18m	20	60	1/54
6° teste	6h 51m 0s	30	20				
Terceira experiência em 22 de junho. Higrômetro, 87°; termômetro 15, 75°; barômetro $27^P\ 11^l$							
1° teste	11h 53m 45s	20	80				
				3m	20	90	1/13,5
2° teste	11h 56m 45s	20	60				
				3m	20	70	1/11
3° teste	11h 59m 45s	20	40				
				5m 15s	20	50	1/13,5
4° teste	12h 5m 0s	20	20				
				11m 15s	25	28	1/13,5
5° teste	12h 16m 15s	20	5				
Quarta experiência em 2 de julho. Higrômetro, 80°; termômetro 15, 75°; barômetro $28^P\ 2^l$							
1° teste	7h 43m 40s	20	80				
				5m 20s	20	90	1/14
2° teste	7h 49m 0s	20	60				
				8m 20s	20	70	1/19
3° teste	7h 57m 20s	20	40				
				12m	20	50	1/30
4° teste	8h 9m 15s	20	20				
				8m 15s	10	35	1/19
5° teste	8h 17m 30s	20	10				

Vemos, de acordo com essa sétima coluna, que a razão da força elétrica perdida em relação à força total foi representada, no mesmo dia e no mesmo estado de umidade do ar, por uma quantidade constante; que essa variação varia apenas na medida em que o higrômetro anunciou uma variação na umidade do ar, de onde resulta que, para um mesmo estado do ar, a perda da eletricidade é sempre proporcional à densidade elétrica.

Estando determinada pelas experiências anteriores a lei da perda da densidade elétrica, é fácil de obter pelo cálculo o estado elétrico de duas bolas após um tempo dado. Consideremos por exemplo a primeira experiência de nossa Tabela na qual vimos que a ação

[551] Um exemplo detalhado dos cálculos dessa Tabela encontra-se na Seção 15.1.

elétrica entre duas bolas, nas quais a eletricidade inicial era a mesma, diminuía em 1/41 partes em cada minuto. Uma vez que a densidade elétrica diminui, como acabamos de ver, proporcionalmente às densidades, temos

$$-\left(\frac{d\delta}{\delta}\right) = mdt \ ,$$

onde δ representa a densidade de cada bola.[552] Porém, como essa densidade diminui, como veremos na próxima Seção, em 1/82 partes por minuto, caso $dt = 1$ minuto, teremos

$$m = \left(\frac{1}{82}\right) \ .$$

Assim, nessa experiência,

$$-\frac{d\delta}{\delta} = \left(\frac{dt}{82}\right) \ .$$

Multiplicando pelo módulo μ do sistema logarítmico,[553] teremos

$$-\mu\frac{d\delta}{\delta} = \left(\frac{\mu dt}{82}\right) \ ,$$

cuja integral fornece

$$\frac{\mu t}{82} = \log\left(\frac{D}{\delta}\right) \ ,$$

com D representando a densidade inicial do fluido elétrico de cada bola e, consequentemente,

$$\frac{2\mu t}{82} = \frac{\mu}{41}t = \log\left(\frac{D^2}{\delta^2}\right) \ .$$

[552]Seja uma esfera de raio r eletrizada uniformemente com uma carga q. O símbolo δ pode representar tanto q quanto a densidade superficial de carga $q/(4\pi r^2)$. Sendo δ_0 o valor de δ no instante inicial $t = 0$, a integração dessa equação fornece:

$$\delta = \delta_0 e^{-mt} \ . \qquad (14.1)$$

[553]O módulo do sistema de logaritmos é utilizado para a conversão de bases. Se temos o logaritmo de um número N na base a e queremos obter seu logaritmo na base b, podemos usar a relação

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N \ .$$

O fator $\log_a b$ é denominado módulo do sistema de logaritmos de base a com relação ao sistema de base b.

Para conversão entre logaritmos naturais e decimais usamos

$$\log_{10} N = \log_{10} e \cdot \log_e N \qquad \text{ou} \qquad \log N = 0,4343 \ln N \ .$$

Isto é,

$$\mu = \log e = \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{2,30258} = 0,4343.$$

Porém, sendo a distância [entre as bolas] constante, D^2 é proporcional à ação inicial e δ^2 é proporcional à ação quando o tempo $= t$. Assim, ao utilizar as tabelas [de logaritmo] comuns, como o módulo $\mu = 0,4343$, teremos

$$\frac{0,4343}{41}t = \log\left(\frac{D^2}{\delta^2}\right) .$$

Se procurarmos, de acordo com essa fórmula, o valor de δ nessa primeira experiência, encontraremos que no primeiro teste $D^2 = 150$, no sexto teste $\delta^2 = 50$; assim,

$$\frac{0,4343}{41}t = \log\frac{150}{50} = \log 3 ,$$

e, consequentemente,

$$t = \left(\frac{41\log 3}{0,4343}\right) = 45 \text{ minutos} .$$

O primeiro teste começou às 6h 32m 30s; o sexto teste ocorreu apenas às 7h 17m; o que fornece 44m 30s, ao invés dos 45 minutos encontrados pela experiência.

14.1.2 Segunda Observação

A razão dada na sétima coluna da Tabela representa exatamente a porção da força perdida em um minuto pelo corpo eletrizado em relação à força total, mas essa razão é o dobro da razão da perda da densidade de cada corpo em relação à densidade total; é fácil de se convencer disso pelas seguintes reflexões.

Vimos nas nossas duas primeiras Memórias que quando dois globos eletrizados atuam um sobre o outro, a ação recíproca entre eles era diretamente proporcional às densidades elétricas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre esses dois globos. Assim, como nas nossas experiências as duas bolas são iguais[554] e como elas receberam no instante inicial uma dose igual de eletricidade, ao chamar de δ à densidade elétrica e ao chamar a distância entre as duas bolas de a, a ação recíproca entre elas será proporcional a (δ^2/a^2), e a variação dessa ação no intervalo de tempo dt será igualmente proporcional a[555]

$$\frac{2\delta d\delta}{a^2} .$$

Assim a razão dessa variação de ação em relação à ação será igual a $(2d\delta/\delta)$. Mas $(d\delta/\delta)$ é a razão da perda da densidade de cada bola em relação à sua densidade e, consequentemente, essa razão tem por medida a metade da razão dada em nossas experiências pela perda da ação em relação à ação. Assim, em 28 de junho, fornecendo nossa Tabela o valor médio de

[554]Elas possuem o mesmo tamanho, o mesmo formato e são feitas do mesmo material.

[555]No original aparece aqui, [Coulomb, 1788e, pág. 620]:

$$\text{“}\left(\frac{2\delta d\delta}{a^2} + (d\delta)^2\right) .$$

Assim, ao desprezar $(d\delta)^2$, a razão dessa variação de ação em relação à ação será igual a $(2d\delta/\delta)$.”

Potier substituiu essa equação e essa frase pela equação e pela frase que coloquei nessa tradução, [Potier, 1884, pág. 155].

1/41 para a razão da força elétrica perdida em um minuto para a força total, resulta que, nesse mesmo dia, a densidade elétrica [de cada uma] das bolas diminuía em 1/82 partes por minuto.[556]

Por uma sequência de experiências do mesmo tipo encontrei igualmente que, embora as bolas fossem de tamanhos bem diferentes, embora a massa de eletricidade[557] e a densidade elétrica de cada bola fossem bem diferentes, [ainda assim] a razão da força elétrica perdida em um minuto para a força total sempre permanecia uma quantidade constante. Por exemplo, embora em 28 de junho eu tenha apresentado à bola da agulha uma bola de tamanho dobrado, e que tenha fornecido a essa bola uma densidade elétrica maior ou menor que aquela da [bola da] agulha, a perda da força elétrica por minuto era sempre de 1/41 partes da força total. Contanto que prestemos atenção, veremos que se em um tempo dado a densidade diminuir proporcionalmente à sua intensidade, o resultado fornecido pela experiência é uma consequência necessária da teoria. Afinal de contas, sendo a ação entre duas bolas de tamanho e de densidade diferentes representada por $m(D\delta/a^2)$, na qual m é um coeficiente constante que depende da superfície das bolas, e na qual D e δ representam as densidades [das duas bolas,] e a representa a distância, a variação da força repulsiva dividida por essa força tem por medida

$$\left(\frac{dD}{D}\right) + \left(\frac{d\delta}{\delta}\right) \ ,$$

grandeza essa que será sempre uma quantidade constante, quaisquer que sejam os valores de δ, D e m, desde que, para um mesmo intervalo de tempo dt,

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\delta}{\delta} \ = \text{uma quantidade constante} \ .$$

Porém, um aspecto fornecido pela experiência e que me parece merecer a maior atenção é que, qualquer que seja o formato que um corpo eletrizado possui e qualquer que seja seu tamanho, a diminuição da densidade elétrica, em relação a essa densidade, possui aproximadamente em todos os casos como medida um valor constante quando o ar está seco e quando o grau de eletricidade não é muito grande.[558] Realizei essa experiência com um globo de 1 pé de diâmetro [32,5 cm], com cilindros de todas as espessuras e de todos os comprimentos; substituí as bolas em minha balança elétrica por círculos de papel ou de metal; até mesmo, em um dia muito seco, coloquei em uma das bolas um pequeno fio de cobre com 10 linhas de comprimento [2,26 cm] e com 1/4 de linha de diâmetro [0,0565 cm] e, ao observar a diminuição da eletricidade, encontrei, no dia em que realizei essa experiência, que a densidade elétrica diminuía em todos esses corpos, qualquer que fosse o formato que possuíssem, de

[556]De acordo com a Nota de rodapé 552 na página 264, ver a Equação (14.1), se uma esfera eletrizada possui uma carga q_0 no instante inicial $t = 0$, sua carga no tempo t é dada por:

$$q = q_0 e^{-mt} \ . \tag{14.2}$$

Nesse caso específico Coulomb encontrou $m = 1/82$ partes por minuto. Logo, após transcorrido um intervalo de tempo de 1 minuto a carga na esfera será de:

$$q = q_0 e^{-1/82} = q_0 e^{-0,0122} = 0,988 q_0 \ . \tag{14.3}$$

Isso significa que em 1 minuto essa esfera terá perdido $1,2\%$ de sua carga inicial.

[557]No original: *masse d'électricité*. Isto é, o valor total da carga elétrica em cada bola.

[558]Isto é, quando o corpo não está altamente eletrizado.

1/100 partes por minuto. Mas devemos apenas alertar que os corpos com formatos diferentes só fornecem essa igualdade de diminuição na densidade elétrica depois que essa densidade diminuiu além de um certo ponto; que nos formatos pontudos, quando lhes comunicamos uma eletricidade muito intensa, eles perdem rapidamente uma parte dessa eletricidade, de acordo com as leis que determinaremos ao falar da eletricidade das pontas; porém, quando a eletricidade é reduzida além de um certo ponto, nesse caso, qualquer que seja a densidade elétrica, sua diminuição durante o intervalo de tempo dt será uma quantidade constante.

Uma segunda conclusão que tirei da experiência é que a natureza do corpo não influencia de forma alguma na lei de diminuição da eletricidade. Assim, em 28 de junho, onde vemos pela nossa Tabela que a eletricidade diminuía de 1/82 por minuto para bolas de sabugueiro, ela diminuía da mesma quantidade para uma bola de cobre e, o que parece mais extraordinário, para uma bola de natureza dielétrica formada com cera da Espanha e que havíamos carregado de eletricidade ao fazê-la tocar em um corpo altamente eletrizado. Teremos oportunidade na sequência de voltar a todos esses resultados, quando formos determinar pela experiência e pelo cálculo as leis dos outros fenômenos elétricos.

14.1.3 Terceira Observação

Se quisermos procurar agora, de acordo com a Tabela que representa a diminuição da eletricidade em um minuto, a correspondência entre o estado mais ou menos úmido do ar e essa diminuição da eletricidade, montaremos então a pequena Tabela a seguir:[559,560]

	Higrômetro	Quantidade de água que 1 pé cúbico de ar possui em dissolução	Eletricidade perdida em cada minuto
Em 29 de maio	69	6,197 grãos	1/60
Em 28 de maio	75	7,205 grãos	1/41
Em 2 de julho	80	8,045 grãos	1/29
Em 22 de junho	87	9,221 grãos	1/14

Nessa Tabela a primeira coluna marca o dia no qual foi feita a experiência; a segunda, o estado do higrômetro do Sr. de Saussure;[561] a terceira, a quantidade de água que o ar possui em dissolução por pé cúbico quando o termômetro está entre 15 e 16°, avaliada de acordo com uma pequena Tabela do Capítulo X, página 173, do livro *Hygrométrie* do Sr. de Saussure,[562,563] a qual exprime para todos os graus do termômetro a quantidade de água dissolvida no ar relativamente ao grau marcado pelo higrômetro desse autor.

Se, de acordo com essa Tabela, procurarmos determinar pelo cálculo uma lei entre a diminuição da eletricidade e a quantidade de água contida em 1 pé cúbico de ar, quando o termômetro está entre 15° e 16°, temperatura na qual ele se encontrava no momento das

[559][Nota de Potier:] Ou seja, 9,68 g, 11,28 g, 12,42 g e 14,26 g por metro cúbico.

[560]No primeiro caso, por exemplo, temos uma densidade volumétrica de massa dada por 6,197 grãos por pé cúbico, ou seja, $6,197 \times 0,05311\ g$ por $(0,3248\ m)^3$, isto é, $9,6\ g/m^3$, como calculado por Potier.

[561]Horace-Bénédict de Saussure (1740-1799) foi um naturalista e geólogo suíço. Construiu em 1783 um higrômetro usando um fio de cabelo humano sob tensão.

[562][de Saussure, 1783] com tradução para o alemão em [de Saussure, 1784].

[563]Por um lapso Coulomb escreveu 7,295 grãos na terceira linha dessa Tabela correspondente ao dia 28 de maio. Corrigi para o valor dado por de Saussure, 7,205 grãos quando o higrômetro marca 75°, [de Saussure, 1783, 172].

quatro experiências, ao denominar de m à potência que exprime essa razão, e ao comparar a primeira experiência com as outras três, teremos:[564]

Primeira e segunda experiências:

$$\frac{60}{41} = \left(\frac{7,197}{6,180}\right)^m \quad , \qquad \text{de onde} \qquad m = 2,76 \ ;$$

Primeira e terceira experiências:

$$\frac{60}{29} = \left(\frac{8,045}{6,180}\right)^m \quad , \qquad \text{de onde} \qquad m = 2,76 \ ;$$

Primeira e quarta experiências:

$$\frac{60}{14} = \left(\frac{9,221}{6,180}\right)^m \quad , \qquad \text{de onde} \qquad m = 3,04 \ ,$$

e a quantidade média fornece $m = 3,04$.

De maneira que parece que a diminuição da força ou, o que dá no mesmo, da densidade elétrica, é proporcional ao cubo do peso de água contida em 1 volume de ar.

Porém, como esse resultado depende de vários elementos, que talvez ainda não estejam determinados de uma maneira muito certa, existe a necessidade de confirmá-lo por pesquisas mais diretas. Foi baseado nesse ponto de vista que imaginei, para completar meu trabalho, em confinar os corpos eletrizados em diferentes tipos de ar, de fornecer a esse ar graus diferentes de densidade e umidade, buscando em seguida determinar em cada estado desses ares a lei de diminuição da eletricidade. Mas logo percebi que essa operação demandaria muito tempo, paciência e instrumentos que não possuía, ou que até mesmo ainda não existem para medir com exatidão o grau de pureza de cada ar e seu grau de umidade. Devido a isso fui obrigado, com pesar, de renunciar pelo menos por hora a um trabalho sobre o qual desejo poder retornar na sequência.

[564]Os valores numéricos que Coulomb está usando aqui para a quantidade de água que 1 pé cúbico de ar possui em dissolução não batem com os valores da Tabela anterior, [Coulomb, 1890a, pág. 86, Nota 13]. Usando esses valores obteríamos na primeira e na segunda experiência:

$$\frac{60}{41} = \left(\frac{7,205}{6,197}\right)^m \quad , \qquad \text{de onde} \qquad m = \frac{\log(60/41)}{\log(7,205/6,197)} = 2,53 \ ;$$

na primeira e na terceira experiência:

$$\frac{60}{29} = \left(\frac{8,045}{6,197}\right)^m \quad , \qquad \text{de onde} \qquad m = \frac{\log(60/29)}{\log(8,045/6,197)} = 2,79 \ ;$$

na primeira e quarta experiências:

$$\frac{60}{14} = \left(\frac{9,221}{6,197}\right)^m \quad , \qquad \text{de onde} \qquad m = \frac{\log(60/14)}{\log(9,221/6,197)} = 3,66 \ .$$

A média desses 3 valores fornece: 2,99. Esse valor é próximo do valor que Coulomb vai calcular, a saber, 3,04.

14.1.4 Quarta Observação

Me assegurei nos vários testes que compõem a Tabela geral de nossas experiências, pelo método descrito a seguir, que a eletricidade era perdida unicamente pelo contato com o ar e não ao longo dos corpos dielétricos que formavam os suportes.

Estando as bolas contidas na balança elétrica suspensas por um único fio de seda revestido de cera da Espanha, terminado por um fio de goma-laca de 18 linhas (4,06 cm) de comprimento, busquei a quantidade de eletricidade que se perdia em um minuto e que se encontra na Tabela das experiências. Em seguida toquei a bola com quatro fios absolutamente similares àquele que servia de suporte, e determinei nesse estado a diminuição da eletricidade em um minuto, a qual encontrei ser a mesma que no caso em que havia um único suporte. Fica claro que, havendo nessa experiência quatro suportes ao invés de um único, caso uma parte perceptível da eletricidade fosse perdida pelos suportes, a diminuição teria de ser sensivelmente maior quando a bola era tocada por quatro fios revestidos de cera da Espanha do quando ela era suspensa por um único fio. Porém, como a experiência provou o contrário, resulta que a eletricidade se perdia unicamente pelo contato com o ar, e não ao longo dos corpos dielétricos que formavam os suportes.

14.1.5 Quinta Observação

Na medida em que aumenta o grau de calor indicado pelo termômetro, também aumenta a quantidade de água que um determinado volume de ar possui em dissolução, embora o higrômetro do Sr. de Saussure, que serviu de comparação em nossas experiências, permaneça no mesmo grau. Porém, como parece que a diminuição mais ou menos rápida da eletricidade depende da quantidade de água ou do número de partes condutoras que encontram-se em um mesmo volume de ar, deve resultar disso que, para o mesmo grau higrométrico, a eletricidade deve se perder mais rapidamente nos dias quentes que nos dias frios. Efetivamente é isso que a experiência sempre confirma. Porém, resta saber se em graus diferentes de calor a diminuição de eletricidade depende unicamente da quantidade de água contida em dissolução em um volume determinado de ar.

Nesse caso ainda faltam experiências. Encontramos de fato no excelente trabalho de higrometria do Sr. de Saussure (Capítulo X, página 181), uma Tabela que representa a correspondência dos graus de seu higrômetro com a quantidade de água contida em dissolução em um pé cúbico de ar para cada grau do termômetro. Contudo o Sr. de Saussure afirma que ele não se responsabiliza por essa Tabela, que a publicou apenas para apresentar um modelo da redução das experiências que ele planeja realizar no futuro. Assim, todos os resultados que poderíamos obter ao comparar, de acordo com essa Tabela, a perda elétrica com a quantidade de água que está em dissolução em um pé cúbico de ar,[565] para cada 1° observado de calor e do higrômetro, seria apenas hipotética. Em geral, podemos apenas dizer que parece que na medida em que aumenta o grau de calor, a eletricidade não é perdida tão prontamente quanto ela deveria se perder, ao calcular de acordo com essa Tabela a quantidade de água contida em dissolução em um pé cúbico de ar. Ou seja, ao admitir como verdade a Tabela do Sr. de Saussure, um pé cúbico de ar tendo, por exemplo, 6 grãos de água em dissolução, torna-se mais dielétrico ou menos condutor de eletricidade na medida em que aumenta o calor.

[565] Por um lapso aparece no original “em um pé cúbico de água”.

14.1.6 Sexta Observação

Antes de terminar essa Primeira Parte de minha Memória, devo ainda avisar que, embora o termômetro, o higrômetro e até mesmo o barômetro marquem em dias diferentes os mesmos graus, contudo a diminuição da eletricidade não é sempre a mesma. Me parece que só podemos explicar essas variações pela composição do ar formado de elementos diferentes mais ou menos dielétricos cuja densidade e cujas proporções variam quase continuamente e que possuem graus de afinidade diferentes com os vapores aquosos. A única observação que me parece bem geral é que, quando o clima muda subitamente e o higrômetro varia perceptivelmente em algumas horas da umidade ao seco, a perda da eletricidade em relação à sua densidade permanece durante algum tempo maior do que ela deveria ser de acordo com esse grau de secura indicada pelo higrômetro, e vice-versa, quando o higrômetro passa subitamente do seco para o úmido. Assim, por exemplo, caso em doze ou quinze horas o higrômetro passe do úmido ao seco de 8° ou 10° e se fixe em seguida nesse grau de secura durante vários dias, observaremos frequentemente que, caso a densidade elétrica diminua no primeiro dia de acordo com essa marcha do higrômetro, de 1/50 por minuto, alguns dias depois, embora a secura indicada pelo higrômetro continue a mesma, a densidade elétrica diminui apenas em 1/100 partes por minuto. A causa desse fenômeno não dependeria de que os vapores aquosos, após permanecerem um certo tempo no ar, obtenham cada vez mais adesão, e que o fio de cabelo do higrômetro atrai apenas as partes aquosas que ainda estão livres e que possuem um grau mais fraco de adesão com o ar que as primeiras; de onde resultaria que, nas variações súbitas, o higrômetro somente anunciaria a quantidade das partes *aquosas* que estão livres no ar, ao invés da quantidade absoluta dessas partes? O que pareceria vir em apoio a essa opinião é que o estado das diminuições elétricas se fixa quase sempre ao fim de algumas horas, em relação ao higrômetro, quando a rápida variação da secura ou da umidade ocorre com um vento forte e que é apenas com um tempo calmo que algumas vezes ocorre o contrário. No entanto, pode ser que esse fenômeno só tenha sido produzido pela umidade ou secura dos corpos que se aproximam da agulha.

Essa observação, assim como a terceira, depende, como dissemos, de vários elementos higrométricos que ainda são incertos, os resultados são apenas hipotéticos e não se deve confundi-los com os pontos principais dessa Memória que parecem ter por base uma sequência de experiências regulares.

14.2 Segunda Parte: Sobre a Quantidade de Eletricidade Perdida ao Longo dos Suportes Dielétricos Imperfeitos

Vimos na Primeira Parte dessa Memória que quando a eletricidade é perdida pelo contato com o ar, a diminuição momentânea da eletricidade era muito exatamente proporcional à densidade elétrica do corpo eletrizado. Podemos nos lembrar que, para nos conduzir nas experiências apropriadas para chegar a esse resultado, tivemos que procurar isolar o corpo eletrizado sobre um suporte o mais dielétrico possível.

Para seguir o mesmo método, seria necessário, na pesquisa atual, apoiar os corpos por isolantes cuja idieletricidade[566] fosse de tal forma imperfeita que a perda da eletricidade

[566]No original: *idio-électricité*. Ou seja, cuja propriedade isolante desses materiais. Ver a Nota de rodapé 433 na página 219.

ao longo desses suportes ocorresse em uma razão muito maior do que a quantidade de eletricidade que o corpo perde em contato com o ar. Porém, percebemos que quanto maior for essa razão, mais rapidamente será perdida a eletricidade do corpo eletrizado. E como, na prática experimental, a partir do instante em que, na nossa balança elétrica, a bola apoiada pela agulha é eletrizada, a agulha oscila por alguns minutos, como ela também oscila todas as vezes em que tocamos no micrômetro, para aumentar ou diminuir a torção do fio de suspensão; vemos então que, caso a eletricidade seja perdida muito rapidamente, em cada observação a eletricidade estará quase que totalmente aniquilada antes que a agulha entre em repouso e que possamos determinar sua posição de uma maneira precisa. Portanto, esse inconveniente prático nos obrigou a utilizar suportes que possuíssem forças dielétricas suficientes para, sem eletrizar toda vez as bolas, fazer várias observações consecutivas. Em seguida é fácil de determinar pelo cálculo, nessas experiências, a parte da eletricidade perdida pelo contato com o ar e a parte perdida ao longo do suporte.

A segunda Tabela foi formada da mesma maneira que a primeira, assim como indicam os cabeçalhos. Porém, a bola introduzida no orifício da balança e que é destinada a repelir a bola da agulha, ao invés de estar isolada, como nas experiências da Primeira Parte, por um pequeno cilindro de goma-laca de 15 a 18 linhas de comprimento, era sustentada por um fio de seda de um único fio, tal como sai do casulo; esse fio tem 15 polegadas [40,6 cm] de comprimento.

Segunda tabela para determinar a perda da eletricidade ao longo de suportes dielétricos imperfeitos							
	Horário da experiência	Distância entre as bolas	Torção do micrômetro	Tempo decorrido entre duas observações consecutivas	Força elétrica perdida entre duas observações	Força média entre duas observações	Razão da força elétrica perdida em 1 minuto, para a eletricidade que resta no corpo
Primeira experiência em 28 de maio.							
1° teste	10h 0m 0s	30	150				
				2m 30s	30	165	1/14
2° teste	10h 2m 30s	30	120				
				5m 30s	40	130	1/18
3° teste	10h 8m 0s	30	80				
				5m	20	100	1/25
4° teste	10h 13m 0s	30	60				
				16m 30s	40	70	1/29
5° teste	10h 29m 30s	30	20				
				21m	20	40	1/42
6° teste	10h 50m 30s	30	0				
				16m 30s	10	25	1/41
7° teste	11h 7m 0s	30	10				
Segunda experiência em 29 de maio.							
1° teste	7h 34m 0s	30	150				
				2m 40s	20	170	1/23
2° teste	7h 36m 40s	30	130				
				4m 50s	20	150	1/29
3° teste	7h 41m 30s	30	110				
				6m 50s	20	130	1/44
4° teste	7h 48m 20s	30	90				
				7m 25s	20	110	1/43
5° teste	7h 55m 45s	30	70				
				11m 45s	20	90	1/53
6° teste	8h 7m 30s	30	50				
				17m 30s	20	70	1/61
7° teste	8h 25m 0s	30	30				
				17m 30s	15	50	1/58
8° teste	8h 42m 30s	30	15				
				22m 30s	14	38	1/56
9° teste	9h 5m 0s	30	1				

As duas experiências dessa segunda Tabela foram feitas em 28 e 29 de maio, assim como as

experiências da primeira Tabela. A primeira Tabela determina a quantidade de eletricidade perdida pelo contato com o ar. Assim, ao comparar o resultado dessa primeira Tabela com aquele da segunda, será fácil determinar a quantidade de eletricidade perdida a cada instante ao longo dos suportes.

Mas uma observação bem importante oferecida por essa segunda Tabela é que a diminuição da eletricidade, inicialmente muito mais rápida quando a densidade é grande[567] do que ela deveria ocorrer caso ela fosse produzida apenas pelo contato com o ar, passa a ser nas duas experiências da segunda Tabela, quando a densidade elétrica da bola suspensa pelo fio de seda é reduzida além de certo ponto, precisamente a mesma que ocorria no caso em que a idieletricidade do isolante é perfeita ou, para me expressar melhor, quando a perda da eletricidade é devida inteiramente ao contato com o ar, como na primeira Tabela.

Certamente resulta dessa observação que nosso fio de seda com 15 polegadas de comprimento isola perfeitamente quando a ação recíproca entre as duas bolas é medida na primeira experiência de nossa segunda Tabela, por uma força de torção de 40° e abaixo, já que nesse caso a perda elétrica é de apenas 1/42 [partes] por minuto, a mesma [taxa] que havia sido encontrada no mesmo dia na primeira Tabela, e que era, assim como está provado na Primeira Parte dessa Memória, devida unicamente ao contato com o ar. Resulta igualmente dessa mesma observação que, na segunda experiência de nossa segunda Tabela, o fio de seda com 15 polegadas de comprimento isolava perfeitamente no caso em que a ação repulsiva entre as duas bolas era de 70° e abaixo, já que então a perda da ação elétrica era de apenas 1/60, assim como havíamos encontrado no mesmo dia na primeira Tabela. De fato, como as forças repulsivas são medidas, para uma distância constante, pelo produto das densidades das duas bolas iguais,[568] tentaremos conhecer agora a razão entre a densidade inicial e os graus de densidade da bola suspensa pelo fio de seda, quando esse fio de seda começa a isolar perfeitamente essa bola.

14.2.1 Determinação da Densidade Elétrica da Bola Suspensa pelo Fio de Seda, Quando Esse Fio Começa a Isolar Perfeitamente

Uma aplicação do cálculo desenvolvido na Primeira Parte dessa Memória e comparado com o resultado da primeira experiência de nossa segunda Tabela bastará para tornar conhecido o método que devemos seguir nessa pesquisa. Na primeira experiência de nossa segunda Tabela que começou às 10 horas, fornecemos uma quantidade igual de fluido elétrico às duas bolas, já que essas bolas são iguais e tivemos o cuidado de fazê-las se tocar depois que elas estavam eletrizadas. A bola apoiada pela agulha estando isolada por meio da goma-laca perdia nesse dia 1/82 partes de seu fluido elétrico por minuto, e perdia esse fluido unicamente pelo contato com o ar. A bola suspensa pelo fio de seda perdia sua eletricidade pelo contato com o ar e ao longo de seu suporte dielétrico imperfeito. Foi apenas ao redor de dez horas e quarenta minutos[569] que o fio de seda começou a isolar perfeitamente essa segunda bola, e

[567] Isto é, quando é grande a densidade superficial de carga na bola eletrizada.

[568] Ou seja, como a força é proporcional ao produto das cargas das duas bolas de mesmo tamanho.

[569] No original está escrito dez horas e quarenta minutos, [Coulomb, 1788e, pág. 630]. Potier colocou aqui $10^h\ 50^m$, [Potier, 1884, pág. 164]. Mantive o horário escrito por Coulomb já que ele obteve esse valor ao fazer a média entre o tempo do quinto e do sexto teste na primeira experiência da segunda Tabela, isto é, (10h 29m 30s + 10h 50m 30s)/2 = 10h 40m. Foi ao redor desse horário que a razão entre a força elétrica perdida por minuto e a força inicial alcançou o valor de 1/42 partes por minuto, ou seja, o mesmo valor que

nesse caso a ação repulsiva entre as duas bolas tinha por medida 40°. Porém às 10 horas, no início da experiência, a ação repulsiva entre as duas bolas, ambas carregadas de uma mesma quantidade de fluido elétrico, tinha por medida 180°, assim como indica o primeiro teste dessa experiência. Assim a densidade elétrica de cada bola, às 10 horas, era proporcional a $\sqrt{180}$, já que a ação, para uma distância constante, é sempre proporcional ao produto das densidades e já que as densidades, no primeiro teste, eram iguais. Mas vimos na Primeira Parte dessa Memória que a diminuição da eletricidade, pelo contato com o ar, era expressa pela fórmula $\frac{d\delta}{\delta} = -mdt$,[570] na qual m, em nossa primeira experiência, era igual a 1/82. Essa fórmula integrada fornece

$$\log\left(\frac{D}{\delta}\right) = \frac{0,4343}{82}t \ ,$$

na qual D é a densidade inicial da bola, δ sua densidade no final de um tempo t, sendo 0,4343 o módulo do sistema logarítmico decimal das tabelas comuns. Dessa forma teremos

$$\log\delta = \log D - \frac{0,4343}{82}t \ .$$

Assim, se buscarmos o que aconteceu com a densidade D após 40 minutos,[571] quando o fio de seda começa a isolar perfeitamente, encontraremos para a bola da agulha apoiada pela goma-laca, e isolada perfeitamente durante toda a experiência, ao supor $D = \sqrt{180}$,[572]

$$\log\delta = 1,1276 - 0,2648 = 0,8628 \ .$$

Assim δ ou a densidade da bola da agulha, às 10h 40m,[573] tendo sido medida no início da experiência por $\sqrt{180} = 13,4$, era medida 40 minutos depois pelo número 7,3.[574] Porém, como a ação entre duas bolas é sempre proporcional ao produto das densidades, se supormos z como sendo a densidade da bola suspensa pelo fio de seda, quando esse fio isola perfeitamente ou quando a ação entre as duas bolas tem como medida 40°, teremos

$$7,3 \times z = 40° \qquad \text{ou} \qquad z = 5,5 \ ;$$

aquele encontrado na primeira Tabela na qual a perda da eletricidade ocorria apenas pelo ar.

[570] Por um lapso no original essa fórmula apareceu aqui sem o sinal negativo.

[571] Coloquei 40 minutos como no original, enquanto que Potier escreveu aqui 50 minutos, ver a Nota de rodapé 569.

[572] Isto é, $D = \sqrt{180} = 13,416$. Logo, $\log D = 1,1276$. Como $t = 40$ minutos, temos $0,4343 \cdot 40/82 = 0,2119$. A conta de Coulomb deveria ser:

$$\log\delta = 1,1276 - 0,2119 = 0,9157 \ .$$

Daqui vem $\delta = 10^{0,9157} = 8,2$.

Por algum lapso, embora ele tenha escrito um tempo de 40 minutos, fez as contas a seguir com $t = 50$ minutos: $0,4343 \cdot 50/82 = 0,2648$. Com isso encontrou:

$$\log\delta = 1,1276 - 0,2648 = 0,8628 \ .$$

Daqui vem $\delta = 10^{0,8628} = 7,3$.

Talvez por esse motivo Potier tenha substituído no texto de Coulomb por diversas vezes a expressão "quarenta minutos" por "cinquenta minutos".

[573] Novamente segui o texto original de Coulomb, 10h 40m, e não o que foi escrito por Potier, 10h 50m, ver a Nota de rodapé 569.

[574] Como $\log\delta = 0,8628$, vem que $\delta = 10^{0,8628} = 7,3$.

de onde concluímos que a densidade elétrica da bola suspensa pelo fio de seda com 15 polegadas de comprimento tem por medida 5,5 quando esse fio começa a isolar perfeitamente, estando as duas bolas a uma distância de 30° entre si. De acordo com esse cálculo, ao comparar várias experiências, sempre encontrei que um pequeno cilindro de goma-laca com 18 linhas de comprimento [4,1 cm] só deixava de isolar perfeitamente quando a bola estava carregada com uma densidade elétrica aproximadamente o triplo da densidade da bola ligada ao nosso fio de seda; ou seja, considerando o número 5,5 como a densidade elétrica da bola, suspensa pelo nosso fio de seda com 15 polegadas de comprimento, quando ele começa a isolar perfeitamente, seria necessário aproximadamente triplicar essa densidade para ter aquela densidade na qual um pequeno cilindro de goma-laca com 18 linhas comece a isolar perfeitamente, ou deixe de isolar quando a densidade é maior [do que essa]. De acordo com essa teoria, será fácil determinar quando quisermos, de acordo com a experiência, o grau de idieletricidade dos corpos diferentes que estamos acostumados a usar para isolar os corpos eletrizados. As tentativas que realizei nesse sentido ainda não são muito numerosas para que possa publicar os resultados; além do mais, percebemos que esses resultados para um mesmo corpo variam com o calor e com a umidade do ar, e que cada dia fornece um valor diferente.

Após ter encontrado que, para os suportes dielétricos imperfeitos, havia sempre um certo grau de densidade elétrica abaixo do qual esses suportes isolam perfeitamente, busquei, pelos métodos que acabei de explicar, qual seria a razão entre essa densidade elétrica e o comprimento dos suportes. A experiência me ensinou que o grau de densidade elétrica no qual um fio de seda, um fio de cabelo, e todo corpo cilíndrico muito fino cuja idieletricidade era imperfeita, começa a isolar [perfeitamente] era, para o mesmo estado do ar, proporcional à raiz [quadrada] de seu comprimento; de maneira que, por exemplo, caso um fio de seda com 1 pé de comprimento comece a isolar o corpo perfeitamente quando a densidade desse corpo é D, um fio com 4 pés começará a isolar quando sua densidade for $2D$.

O que a experiência nos ensina aqui está de acordo com a teoria ao supor, como já provamos em nossas duas primeiras Memórias, que a ação do fluido elétrico segue a razão inversa do quadrado das distâncias, e que a imperfeição da idieletricidade dos corpos depende da distância dielétrica,[575] na qual se encontram as moléculas condutoras que entram na composição do suporte dielétrico imperfeito ou que estão espalhadas ao longo da superfície.[576] Consequentemente, para que o fluido elétrico passe de uma molécula condutora à outra, é necessário que ele atravesse um pequeno espaço dielétrico maior ou menor, dependendo da natureza do corpo; sendo necessário ainda que esse espaço a ser atravessado oponha uma resistência constante para o mesmo corpo, já que essas moléculas condutoras estão distribuídas uniformemente ou a uma mesma distância entre si. Aceitando essas suposições, para aplicar a teoria observamos que, no caso de um fio muito fino, condutor, o fluido elétrico se distribuiria uniformemente ao longo de todo o seu comprimento; que caso esse fio possua um certo grau de idieletricidade e que caso o fluido esteja espalhado nele seguindo uma lei qualquer, a ação que cada ponto vai sofrer dependeria somente da densidade elétrica da molécula em contato com esse ponto e que a ação do restante do fio pode ser considerada como nula. Aqui vai a demonstração dessas duas proposições.

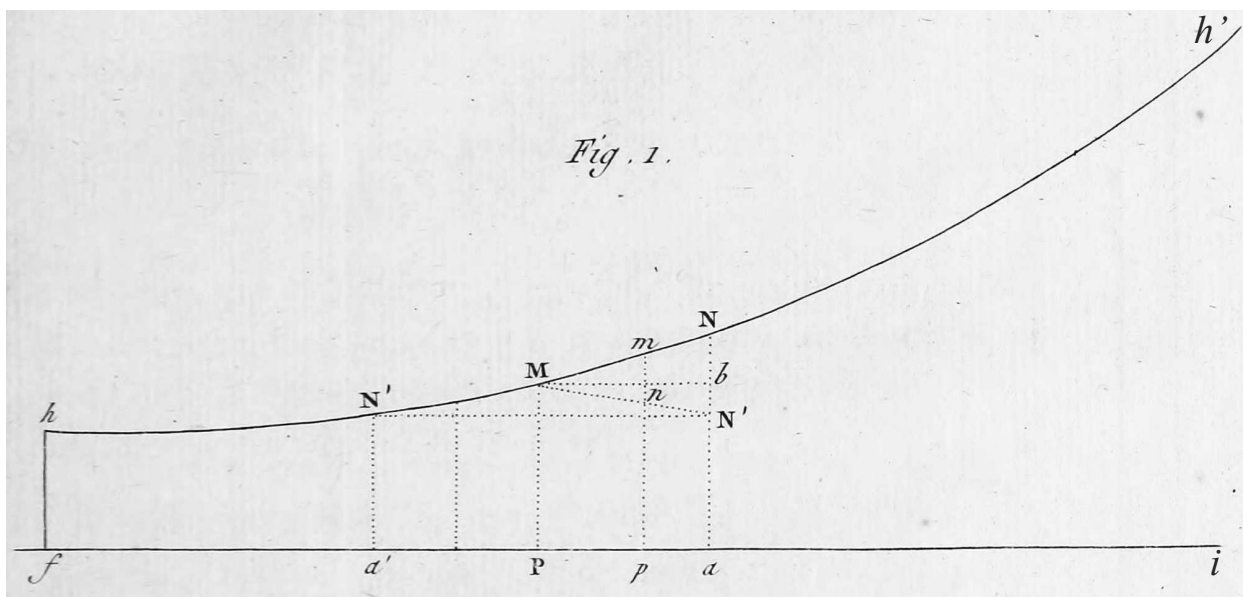
Na Figura 1,[577] fi representa um fio no qual todas as partes atuam uma sobre a outra,

---

[575]No original: *distance idio-électrique*. Ver a Nota de rodapé 544 na página 260.

[576]Coulomb está supondo aqui que existem partículas condutoras no interior ou na superfície de suportes isolantes imperfeitos. Ela chama de "distância dielétrica" à separação isolante entre essas partículas ou moléculas condutoras.

[577]Incluí nessa Figura 1 a letra i na extremidade direita da linha inferior e a letra h' na extremidade direita

seguindo a razão inversa do quadrado das distâncias, a curva hMh' representa a densidade elétrica de cada ponto do fio. Considero ao longo do comprimento desse fio duas porções Pa e Pa', iguais, finitas, mas muito pequenas para que, na prática, MNb possa ser considerado como um triângulo.

Seja $Mn = Pp = x$, $bN/MN = a$, nm será $= ax$,[578] e a ação que o ponto M com densidade D vai experimentar da parte do pequeno elemento dx colocado em p será

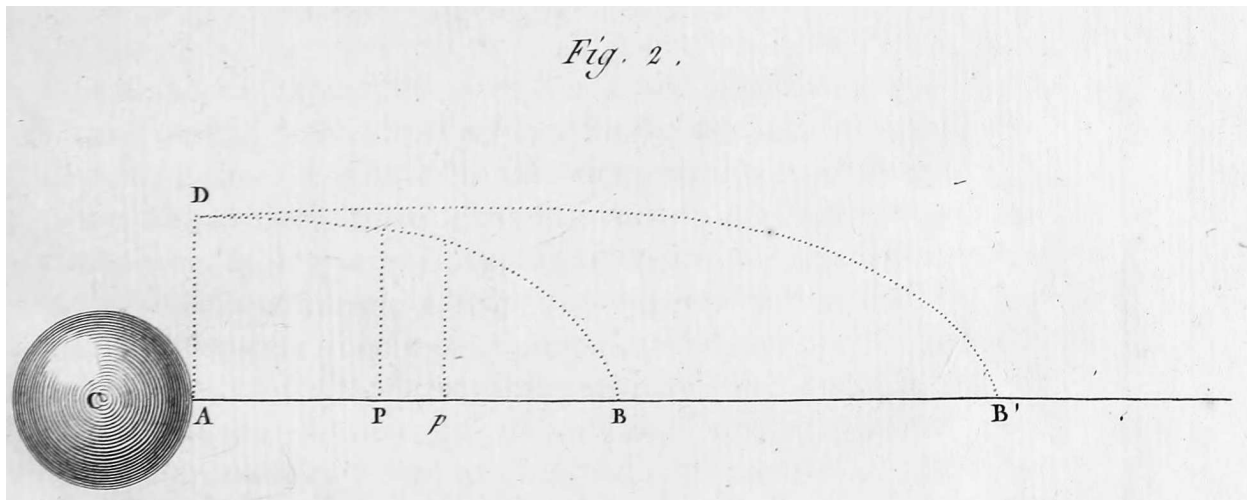
$$\frac{Dax \cdot dx}{x^2} = Da \left(\frac{dx}{x} \right) .$$

Integrando essa grandeza ao supor que ela se anula quando $x = A$ teremos, para a ação de toda a parte Pp, [o valor] $Da \log(x/A)$, valor esse que será uma quantidade finita desde que A seja uma quantidade finita, mas que irá para infinito quando $A = 0$. Disso resulta que a ação que o ponto P experimenta depende unicamente do incremento da densidade no elemento que toca o ponto P e que a densidade do restante da linha não tem influência sobre essa ação; de onde resulta igualmente que caso essa ação dependa de um fluido que pode se deslocar livremente ao longo do fio, ou caso o fio seja um condutor perfeito, o fluido que atua na razão inversa do quadrado das distâncias vai se distribuir uniformemente ao longo de todo esse fio: determinaremos na sequência a densidade elétrica na extremidade desse fio.

Apliquemos o resultado anterior para a questão atual: o globo em C (Figura 2) é suspenso por meio do fio de seda AB, cuja idieletricidade é imperfeita, isto é, no qual cada elemento opõe uma resistência constante A ao deslocamento desse fluido.[579]

da linha curva superior. As letras na curva superior ficaram então, da esquerda para a direita: $hN'MmNh'$, já na reta inferior: $fa'Ppai$. As letras na reta da direita, de cima para baixo: $NbN'a$. O ponto n fica no cruzamento da reta horizontal Mb com a reta vertical mp.

[578] Essas relações $Mn = Pp = x$, $bN/MN = a$ levando à equação $nm = ax$ não fazem sentido entre si. König, [Coulomb, 1890c, pág. 86, Nota 14], sugeriu substituí-las por: $Mn = Pp = x$, $bN/bM = a$ levando à equação $nm = ax$. Mesmo assim o próximo cálculo apresentado por Coulomb ainda fica confuso.

[579] Ou seja, o fio de seda que está sendo considerado aqui não é um isolante perfeito.

Seja A' a massa elétrica do globo,[580] reunida em seu centro; seja δ a densidade elétrica em p. Teremos para a ação total com a qual o ponto p é repelido pelo fluido elétrico [o valor][581]

$$\frac{A'\delta}{(R+x)^2} - \frac{\delta d\delta}{dx} ,$$

quantidade essa igual à resistência dielétrica B exercida pelo fio que, como vimos, deve ser uma quantidade constante. Consideramos $d\delta$ [como tendo um valor] negativo, já que δ diminui na medida em que x aumenta; mas provaremos, na Memória que se segue a essa, que a ação do pequeno globo eletrizado C sobre o ponto P é incomparavelmente menor do que a ação do elemento dx multiplicada pelo incremento de δ. Dessa forma podemos, sem erro perceptível, desprezar o primeiro termo $A'\delta/(R+x)^2$, e a equação reduz-se a

$$-\frac{\delta d\delta}{dx} = B .$$

A integração dessa equação fornece

$$K - \frac{\delta^2}{2} = Bx .$$

Porém, quando $x = 0$, [a grandeza] δ torna-se igual à densidade D do globo. Dessa forma teremos a equação geral

$$D^2 - \delta^2 = 2Bx .$$

Caso, nessa equação, fizermos $\delta = 0$, ela vai fornecer o comprimento x no qual o fio começa a isolar perfeitamente e teremos nesse caso[582]

[580]Ou seja, A' é carga elétrica total desse globo.

[581]Coulomb não especificou na próxima equação o que são as grandezas R e x. Uma possibilidade é que R seja o raio do globo, enquanto que x seja a distância Ap.

[582]A próxima equação deveria ter sido escrita como:

$$x = \frac{D^2}{2B} .$$

Esse lapso não foi percebido por Coulomb e continua nas próximas equações.

$$x = \frac{D^2}{B} \ .$$

Assim, os comprimentos de diferentes fios de seda, ou de quaisquer suportes dielétricos imperfeitos, estão entre si como o quadrado das densidades no instante em que começam a isolar perfeitamente, assim como encontramos pela experiência. É fácil de ver, de acordo com a fórmula, que a curva que representa em nossa figura a densidade da eletricidade para cada ponto do fio de seda é uma parábola cujo eixo é BA e cujo vértice está em B, ponto no qual é nula a densidade e cuja concavidade está virada para o lado da bola; porque, como temos $(D^2 - \delta^2) = Bx$ e $AB = (D^2/B)$, teremos

$$Bp = \left(\frac{D^2}{B} - x\right) = z \qquad \text{ou} \qquad x = \left(\frac{D^2}{B} - z\right) \ ;$$

substituindo esse valor de x na nossa equação, teremos

$$\delta^2 = Bz \ ,$$

que é a equação de uma parábola cujo vértice está em B, cujo eixo é Bp e cujo parâmetro é B, quantidade essa que cresce com a idieletricidade do suporte.[583]

Ao refletir sobre a teoria que acabamos de apresentar, é fácil de ver que a fórmula anterior determina a disposição do fluido elétrico ao longo do suporte dielétrico imperfeito, ao supor que comunicamos, como foi feito em nossas experiências, uma certa dose de fluido elétrico ao globo suspenso pela seda; já que nesse caso esse fluido se comunica gradualmente ao longo do suporte dielétrico espalhando-se até o ponto B, de maneira que a repulsão do fluido esteja em todos os pontos exatamente em equilíbrio com o *máximo* de resistência que a força coercitiva do suporte dielétrico pode opor ao escoamento desse fluido. Porém, é necessário notar que como esse *máximo* de resistência é uma força coercitiva e não uma força ativa, a qual podemos comparar à resistência de um atrito, toda ação repulsiva do fluido elétrico que seja menor do que o *máximo* dessa resistência não vai atrapalhar de maneira alguma o estado de estabilidade desse fluido distribuído de acordo com uma lei qualquer ao longo do suporte. De forma que, caso a linha AD que representa na Figura em anexo a densidade do globo permaneça constante, se prolongarmos o eixo AB de uma quantidade qualquer BB', e se descrevermos uma curva de densidade DB' de formato arbitrário, desde que todos os pontos $\frac{\delta d\delta}{dx}$ sejam menores do que B, o fluido elétrico espalhado ao longo da linha AB' conservará seu estado de estabilidade sem se deslocar de um ponto a outro. Disso concluímos que sempre vai haver uma infinidade de curvas DB' que satisfazem igualmente ao estado de estabilidade do fluido elétrico espalhado ao longo de um suporte dielétrico imperfeito e que a pesquisa geral sobre a disposição do fluido elétrico em um corpo dielétrico imperfeito é um problema indeterminado que, para se tornar determinado, precisa estar sujeito a algumas condições particulares. Assim, na curva ADB que encontramos ser determinada na Seção anterior pela fórmula $(D^2 - \delta^2) = Bx$, tínhamos como condição que o *máximo* da resistência dielétrica era em todos os pontos igual à repulsão elétrica; além disso, essa curva é o caso particular do problema geral indeterminado no qual o eixo AB tem um valor mínimo. De fato, como em todas as outras curvas de densidade é necessário que $\frac{\delta d\delta}{dx}$ seja menor do que B, caso na curva DB fizéssemos um único elemento variar, para que o estado de estabilidade não fosse

[583] Isto é, quanto mais isolante for o suporte, maior será o valor de B.

perturbado ao deixar $d\delta$ constante, seria necessário, para que $\frac{\delta d\delta}{dx}$ permaneça menor do que B, aumentar a quantidade dx e alongar o eixo da curva.

Resulta ainda da teoria que acabamos de explicar que, em todos os corpos condutores nos quais o fluido elétrico se distribui livremente, a determinação da densidade do fluido elétrico em um ponto qualquer, é um problema determinado. Porém, para os corpos dielétricos imperfeitos o problema é indeterminado, estando um de seus limites fixado pelo estado do fluido elétrico quando ele está disposto no corpo dielétrico imperfeito de maneira que, em todos os pontos, a ação desse fluido esteja exatamente em equilíbrio com o máximo de resistência que a força coercitiva dielétrica opõe para impedir o fluido elétrico de se deslocar de um ponto a outro.

É inútil avisar que, de acordo com a teoria e com as experiências anteriores, será necessário em vários casos tomar muitas precauções quando quisermos obter a força elétrica de um pequeno corpo isolado por um suporte dielétrico imperfeito, e que ocorre frequentemente de acordo com várias experiências, sobretudo quando os corpos isolados foram carregados com um grau de densidade elétrica bem grande, encontrando-se o suporte dielétrico carregado de uma certa quantidade de eletricidade, a qual dificilmente ele perde, e que influencia perceptivelmente em seguida sobre os resultados; que em cada experiência, ao mesmo tempo em que descarregamos de sua eletricidade o corpo apoiado pelo suporte, é necessário descarregar, tanto quanto possível, o próprio suporte dielétrico; é necessário [ainda] trocar de suporte a cada experiência, [especialmente] quando a densidade elétrica que comunicamos [ao corpo] tem uma certa intensidade; e que, enfim, é sempre necessário *estar certos* de que o suporte possui uma força de resistência dielétrica bem grande para que, em todas as experiências, a quantidade de eletricidade com a qual ele vai se carregar seja bem menor do que aquela do corpo condutor do qual queremos determinar a ação.

É fácil de antever que a teoria anterior pode ser aplicável ao magnetismo; que em uma agulha de aço, por exemplo, a disposição do fluido magnético, para todos os estados de estabilidade, é um problema indeterminado, que só fica determinado por condições a serem cumpridas. Assim, por exemplo, se procurarmos a melhor maneira de imantar uma agulha de inclinação ou de declinação, o problema a ser resolvido consiste em fornecer ao fluido magnético dessa agulha, entre todas as disposições possíveis sem perturbar seu estado de estabilidade, aquela disposição na qual o *torque*[584] da força diretriz magnética do globo terrestre da Terra sobre essa agulha seja um *máximo*.[585,586]

---

[584] No original: *moment*.

[585] [Nota de Potier:] As conclusões de Coulomb não parecem ser justificadas pelas experiências mais recentes; resultaria dessas experiências que a perda [de eletricidade dos corpos carregados] devido à atmosfera é muito fraca, qualquer que seja o grau de umidade [do ar].

Permanecendo nas condições gerais nas quais Coulomb se colocou, com fracas cargas [elétricas], a lei enunciada por ele pode ser considerada como evidente. Porém, o coeficiente de perda [da eletricidade] varia com a forma do corpo estudado e com sua posição em relação aos corpos vizinhos. Portanto, seria errado aplicar a um corpo removido de qualquer influência externa o coeficiente medido no mesmo dia em sua balança.

Também é evidente que, no método de Coulomb, a maneira variável com o estado higrométrico com o qual as cargas induzidas sobre o recipiente [de vidro da balança de torção] se modificam com o tempo possui um papel importante e que essa causa continua [atuando], independentemente dos suportes, nas experiências nas quais Coulomb acreditou ter eliminado tudo aquilo que não era apenas perda para o ar.

[586] Potier não indicou quais são essas experiências mais recentes. Provavelmente ele estava se referindo às experiências de Biot, Gaugin, Matteucci, Riess e Warburg como citadas por Mascart em seu livro *Tratado de Eletricidade Estática*, no terceiro Capítulo sobre a perda de eletricidade por um corpo carregado, [Mascart, 1876, Cap. 3: Déperdition de l'électricité]. Discuto na Seção 15.2 a influência da umidade do ar

na perda de eletricidade de um corpo carregado.

Capítulo 15

Observações sobre a Terceira Memória de Coulomb

15.1 Método experimental de Coulomb

Na Seção 14.1 Coulomb apresentou um exemplo numérico de seu método experimental para determinar a perda de eletricidade de uma esfera eletrizada para o ambiente ao seu redor. A preparação desse método está ilustrada na Figura 15.1.

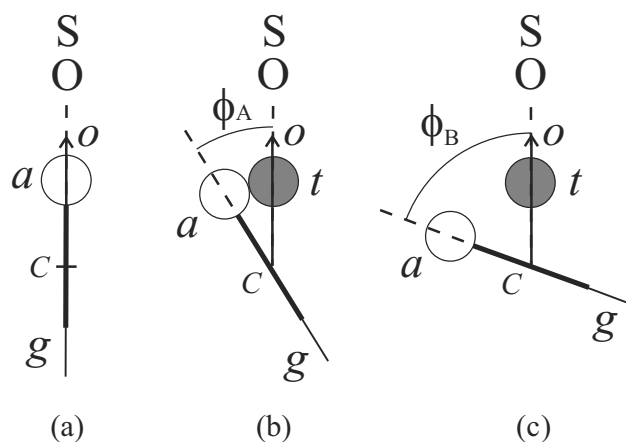



Figura 15.1: (a) Fio não torcido com a agulha apontando para O. (b) Início da experiência com as bolas descarregadas. (b) Situação final de equilíbrio da experiência com as bolas eletrizadas.

Na Figura 15.1 (a) temos um visão de cima para baixo da agulha com centro C ao longo da projeção do fio de suspensão, bola a e disco de papel g que funciona como contrapeso e como amortecedor das oscilações. Na situação em que o fio não está torcido, a agulha aponta para o ponto O fixo na escala graduada do círculo zOQ preso no recipiente de vidro ao redor da agulha. Esse círculo zOQ está na mesma altura que a agulha horizontal e que a extremidade inferior do fio de suspensão. A seta Co é o ponteiro do micrômetro preso à parte superior do fio de torção. Inicialmente ele aponta para o ponto S fixo na escala graduada colocada na parte superior da balança. Estou supondo que inicialmente a agulha Ca e o indicador Co estão ao longo do mesmo plano vertical passando por COS.

Antes de iniciar as experiências Coulomb afasta um pouco a bola a de sua posição original ao colocar a bola t encostada nela, Figura 15.1 (b). A bola t fica sempre fixa no laboratório.

A reta passando por C e pelo centro da bola fixa t aponta sempre para o ponto O. Coulomb vai medir os ângulos a partir desse ponto O. A agulha horizontal ag pode girar ao redor de seu centro C preso ao fio de suspensão vertical. A torção inicial do fio é representada pelo ângulo ϕ_A.

As duas bolas são carregadas ao tocar um alfinete eletrizado na bola t, sendo esse alfinete afastado após o toque. Com isso as bolas adquirem cargas de mesmo sinal e se repelem. A agulha gira no plano horizontal, no sentido anti-horário, ao redor do ponto C pelo qual está suspensa pelo fio vertical. A bola a afasta-se da bola t. No equilíbrio o fio fica torcido de um ângulo ϕ_B, Figura 15.1 (c). No exemplo hipotético de Coulomb esse ângulo era de $\phi_B = 40°$. O torque exercido sobre a agulha pela força elétrica de repulsão entre as bolas eletrizadas é equilibrado pelo contra-torque exercido pelo fio torcido do ângulo ϕ_B.

Agora começa a parte principal da experiência para determinar a perda de carga das bolas eletrizadas para o ambiente ao redor delas. Esse procedimento está ilustrado na Figura 15.2.

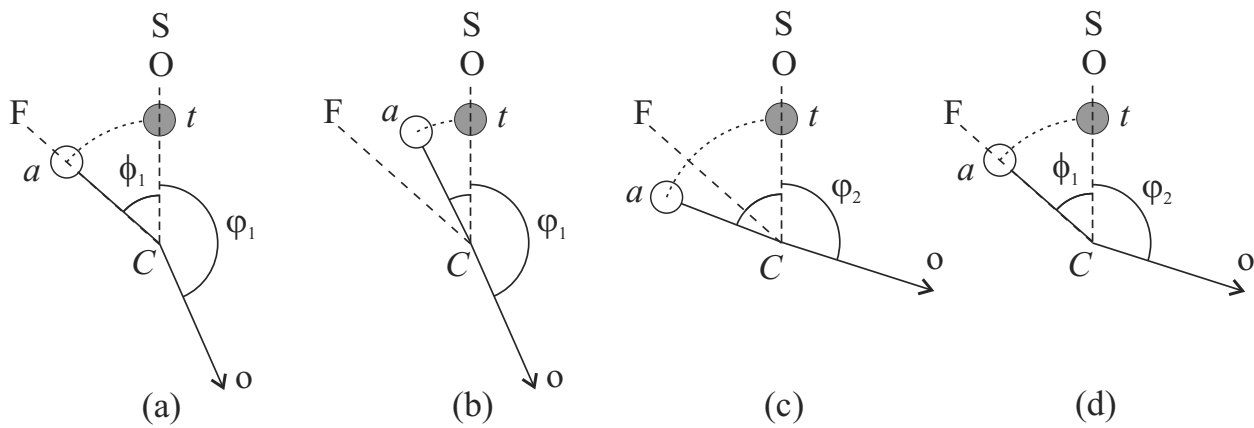



Figura 15.2: Procedimento experimental de Coulomb.

Inicialmente Coulomb torce o micrômetro preso na parte superior do fio de torção no sentido horário de um ângulo φ_1. Com isso ele diminui o ângulo inicial ϕ_B representado na Figura 15.1, fazendo com que as bolas eletrizadas a e t se aproximem até uma separação angular específica ϕ_1 indicada pela reta CF, sendo esse ângulo $\phi_1 = FCO$. No exemplo hipotético de Coulomb a separação entre as bolas passou de $\phi_B = 40°$ na situação da Figura 15.1 (c) para $\phi_1 = 20°$ na situação da Figura 15.2 (a) quando o micrômetro foi torcido de $\varphi_1 = 140°$. No equilíbrio a repulsão entre as bolas indicada pelo ângulo ϕ_1 é contrabalançada pela torção total do fio indicada por $\phi_1 + \varphi_1$. Coulomb começa a marcar o tempo a partir desse momento de equilíbrio.

Na medida em que o tempo passa, o ângulo ϕ_1 diminui devido à perda de carga das bolas a e t. A agulha Ca não aponta mais ao longo da reta CF. Essa situação está ilustrada na Figura 15.2 (b).

Coulomb então diminui a torção da extremidade superior do fio para um valor φ_2, tal que a agulha gire no sentido anti-horário até um ângulo um pouco maior do que ϕ_1. No exemplo de Coulomb isso ocorreu quando diminuiu de 30° o ângulo do micrômetro, passando de $\varphi_1 = 140°$ para $\varphi_2 = 110°$, como indicado na Figura 15.2 (c).

Na medida em que o tempo passa a separação angular entre as bolas a e t vai diminuindo novamente devido à perda de suas eletricidades. Em um certo instante a separação angular entre elas volta ao valor ϕ_1 especificado anteriormente, como indicado na Figura 15.2 (d).

Coulomb então observa o instante exato em que isto ocorre, medindo o intervalo de tempo entre as situações (a) e (d) dessa Figura 15.2.

As conclusões de Coulomb são baseadas nas medidas do ângulo ϕ_1 de separação entre as bolas, na medida dos ângulos φ_1 e φ_2 de torção do micrômetro, assim como na medida do intervalo de tempo entre as situações das Figuras 15.2 (a) e (d). A torção total do fio no caso (a) é representada por $\phi_1 + \varphi_1$, enquanto que no caso (d) é dada por $\phi_1 + \varphi_2$.

Coulomb continua esse procedimento para outros testes, diminuindo de cada vez o valor do ângulo φ e medindo os intervalos de tempo entre testes consecutivos nos quais a separação entre as bolas é sempre ϕ_1.

Vou dar aqui um exemplo detalhado dos cálculos de Coulomb no caso do primeiro e do segundo teste da primeira experiência contida na Tabela da página 263. O primeiro teste foi realizado às 6h 32m 30s e o segundo às 6h 38m 15s, tal que o tempo decorrido entre essas duas observações foi de 5m 45s = 5,75 minutos. A força total no primeiro teste (indicada pelo ângulo total de torção do fio) foi de $30° + 120° = 150°$. Já no segundo teste foi de $30° + 100° = 130°$. A força média entre esses dois testes foi então de $(150° + 130°)/2 = 140°$. Durante esses 5,75 minutos houve uma perda média de $150° - 130° = 20°$. Logo a perda média por minuto foi de $20°/5,75 = 3,478°$. Portanto, a razão entre a perda média por minuto e a força média entre as bolas foi de $3,478°/140° \approx 1/40$, como indicado no valor superior da sétima coluna dessa Tabela.

O mesmo procedimento foi utilizado para obter os outros valores dessa Tabela.

Seja uma esfera de raio r eletrizada uniformemente com uma carga q. O símbolo δ usado por Coulomb nesse artigo pode representar q ou então a densidade superficial de carga $q/(4\pi r^2)$.

Na primeira experiência Coulomb encontrou que a razão $(d\delta/dt)/\delta$ tinha um valor essencialmente constante desde uma torção inicial total do fio dada por $30° + 120° = 150°$, até um valor final três vezes menor, ou seja, com uma torção final dada por $30° + 20° = 50°$. Com base nessa observação experimental obteve que

$$\frac{d\delta}{\delta} = -mdt \ , \tag{15.1}$$

na qual δ é o valor da carga (ou da densidade superficial de carga) em cada bola no tempo t, sendo m uma constante positiva já que a carga diminui com a passagem do tempo. A unidade de m é a do inverso do tempo, ou seja, $tempo^{-1}$. Por exemplo, se o tempo for medido em minutos, a constante m vai ser expressa em $minuto^{-1}$. A integração dessa equação fornece (usando que $\delta = D$ no instante inicial $t = 0$):

$$\ln \frac{\delta}{D} = -mt \ , \tag{15.2}$$

ou seja, um decaimento exponencial da carga em cada bola representado pela equação:

$$\delta = De^{-mt} \ . \tag{15.3}$$

Encontrou ainda que o valor de m depende da umidade do ar.

15.2 Influência da Umidade do Ar

Nessa Terceira Memória Coulomb estudou a perda de eletricidade de um corpo carregado. Ele distinguiu duas causas principais, aquela devida ao suporte isolante que impede o corpo

de entrar em contato com a Terra e aquela devida ao contato do corpo com o ar ao seu redor.

A água é uma substância condutora para as experiências de eletrostática.[587] A umidade do ar pode fazer com que a água se ligue à superfície dos suportes tornando-os mais condutores. Esse fator é especialmente relevante nos suportes hidrofílicos. Ou seja, quanto maior for a umidade do ar, as superfícies dos suportes vão se tornar mais condutores, facilitando a perda de eletricidade do corpo pelo transporte de carga por esses suportes até a Terra. Esse fato parece bem estabelecido experimentalmente.

Já outra questão bem mais difícil de resolver é saber se a condutividade do próprio ar seria afetada pelo seu grau de umidade. Coulomb concluiu que a perda de carga de uma esfera carregada para o ar aumenta com a umidade do ar. Contudo, incertezas devidas às mudanças de temperatura, às rápidas variações de umidade, assim como ao método de construção dos higrômetros que medem essa umidade fizeram com que ele afirmasse que todo esse assunto necessitava de pesquisas adicionais.[588]

Essa conclusão de Coulomb de que a perda de carga para o ar aumenta com a umidade do ar parece ser falsa, o que só foi estabelecido no final do século XIX.[589] A principal perda de eletricidade através do ar não parece ser devida à poeira ou umidade que ele possa conter, mas sim devido à sua ionização. Essa ionização pode aumentar de várias maneiras (por estar perto de uma chama, pela radioatividade natural do ambiente etc.) Vários desses fatores que aumentam a ionização do ar são aleatórios.

Contudo, deve ser enfatizado que esse possível erro de interpretação por parte de Coulomb não afeta a validade de sua lei de decaimento exponencial da eletrização de uma esfera carregada. Essa lei está de acordo com os fatos experimentais.

[587] Ver a Seção 7.11 (a condutividade da água) de [Assis, 2010b], [Assis, 2010a], [Assis, 2015b] e [Assis, 2017]. Ver também a Seção 3.1 (classificando os corpos como condutores ou isolantes pelo eletroscópio) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

[588] Ver as Seções 14.1.5 e 14.1.6 dessa tradução, assim como [Gillmor, 1971a, pág. 197].

[589] [Thomson, 1906, págs. 1-9], [Bauer, 1949], [Heilbron, 1999, págs. 297, 336 e 477] e [Blondel and Wolff, 2011e].

Capítulo 16

Quarta Memória sobre Eletricidade, na Qual Demonstramos Duas Propriedades Principais do Fluido Elétrico: A Primeira, que Esse Fluido Não se Espalha em Nenhum Corpo por Meio de uma Afinidade Química ou por uma Atração Eletiva, Mas é Compartilhado entre Diferentes Corpos Colocados em Contato Apenas por Sua Ação Repulsiva; a Segunda que, nos Corpos Condutores, o Fluido que Atingiu um Estado de Equilíbrio Fica Espalhado sobre a Superfície do Corpo e Não Penetra em Seu Interior

Por Coulomb[590]

[590]Esse trabalho foi apresentado em 1786 na Academia de Ciências da França e publicado em 1788, [Coulomb, 1788c], com tradução para o alemão em [Coulomb, 1890d].

16.1 I

Determinamos nas três Memórias anteriores a lei de repulsão do fluido elétrico de mesma natureza e a lei de atração entre dois fluidos elétricos de naturezas diferentes e provamos, por experiências muito simples e que parecem decisivas, que essa ação mostrou-se muito exatamente em razão inversa do quadrado das distâncias. Provamos igualmente, por experiências do mesmo tipo, que a ação, seja repulsiva, seja atrativa do fluido magnético, seguia a mesma lei. Na Terceira Memória determinamos de acordo com qual lei diminuía a densidade elétrica de um corpo,[591] seja pelo contato com o ar mais ou menos úmido, seja ao longo dos suportes dielétricos[592] quando esses suportes não possuem um comprimento suficiente; o que depende principalmente, como vimos, da maior ou menor idieletricidade desses suportes, de sua maior ou menor afinidade com os vapores aquosos, do estado do ar, da densidade do fluido elétrico do corpo isolado e do tamanho desse corpo.

16.2 II

Vamos utilizar aqui a balança descrita em nossa Primeira Memória, impressa no Volume de 1785.[593] Toda a modificação que fizemos nela, foi substituir a faixa de papel colada ao redor do cilindro que cerca a agulha e que, dividida em graus, serve para determinar a distância [angular] entre duas bolas, por um círculo de madeira colocado sobre quatro pilares, cujo diâmetro é aproximadamente o dobro do diâmetro do cilindro. Colocamos esse círculo tal que seu centro encontre-se ao longo da linha reta do fio que suspende a agulha, e tal que a primeira divisão desse círculo corresponda ao alinhamento do fio de suspensão e do centro da bola apoiada pela agulha, quando a agulha está parada naturalmente e quando o ponteiro do micrômetro também corresponde à primeira divisão do círculo do micrômetro.

Contudo, devemos avisar que, desde a leitura da Memória que citamos e que contém a descrição dessa balança,[594] construímos várias outras de uma forma diferente. A maior é quadrada, ela tem 32 polegadas (86,62 cm) de lado, 20 polegadas (54,14 cm) de altura, é fechada pelos lados por quatro placas de vidro fixadas por um revestimento dielétrico em uma armação muito leve de madeira seca em estufa, revestida a quente de um verniz formado de goma-laca e terebentina. Acima da caixa há uma cruzeta que suporta um cilindro vertical de vidro com 15 polegadas (40,60 cm), terminado com um micrômetro; um círculo colocado do lado de fora dessa caixa serve para medir a distância [angular] entre as bolas. Nessa balança podemos fazer experiências com globos eletrizados de 4 a 5 polegadas [10,8 a 13,5 cm] de diâmetro. Já na primeira balança, cujo cilindro possui apenas 1 pé [32,5 cm] de diâmetro, só podíamos utilizar globos com no máximo 1 polegada [2,7 cm] de diâmetro. Porém, é necessário observar que há aqui muitos casos nos quais as experiências em tamanho pequeno são mais decisivas do que aquelas em tamanho grande, já que sendo a atração ou repulsão do fluido elétrico para cada elemento proporcional ao inverso do quadrado das distâncias, para que os resultados sejam simples, é necessário quase sempre que a distância entre os corpos entre os quais queremos medir a ação recíproca seja muito maior do que as dimensões particulares desses corpos.

[591] Ou seja, a lei da diminuição da carga elétrica de um corpo em função do tempo.

[592] Ver a Nota de rodapé 433 na página 219.

[593] Essa Memória está traduzida no Capítulo 10.

[594] A Primeira Memória foi lida em 1785 e publicada em 1788.

16.3 III. Primeiro Princípio. *O Fluido Elétrico se Espalha em Todos os Corpos Condutores de Acordo com Seus Formatos, Sem que Esse Fluido Pareça Ter Afinidade ou uma Atração Eletiva por um Corpo em Detrimento de Outro*

16.3.1 Primeira Experiência

Suspendi pelo buraco da balança, na altura da bola da agulha, uma bolinha de cobre com 8 linhas (1,804 cm) de diâmetro, suspensa por um pequeno cilindro de goma-laca. O centro dessa bola era colocado de maneira que ele correspondia ao alinhamento do fio de suspensão e à primeira divisão do círculo colocado do lado de fora da balança. A bola da agulha que tocava a bola de cobre encontrava-se dessa forma afastada da posição na qual é nula a torção, [pela distância] da soma dos raios das duas bolas em contato.

Eletrizamos as duas bolas pelo procedimento descrito na Primeira Memória; a agulha foi repelida até aproximadamente 48°. Por meio do botão do micrômetro torcemos o fio de suspensão de 120° para aproximar a bola da agulha da bola de cobre, e esperamos que a agulha parasse de oscilar; ela parou a 28°. Nesse estado, toquei imediatamente a bola de cobre com 8 linhas de diâmetro com uma bola de sabugueiro exatamente do mesmo tamanho, suspensa por um pequeno cilindro de goma-laca. Ao retirar a bola de sabugueiro, a agulha aproximou-se da bola de cobre e, para trazê-la de volta à primeira distância de 28°, fui obrigado a distorcer o fio; de maneira que o micrômetro, que antes do contato marcava 120°, marcava apenas 44° após o contato.[595]

16.3.2 Segunda Experiência

Ao invés da bola de cobre, suspendi pelo buraco da balança, por meio de um pequeno cilindro de goma-laca, um disco de ferro[596] com 10 linhas [2,3 cm] de diâmetro, cujo plano vertical passava pelo ponto zero do círculo exterior à balança que serve para medir a distância entre as bolas e [passava também] pelo fio de suspensão da agulha. Em seguida, tendo eletrizado a bola da agulha e o disco de ferro[597] como na experiência anterior, a bola da agulha foi repelida. Torci o fio de suspensão para aproximar a agulha do disco de ferro e, por meio de uma torção de 110°, a agulha parou a 30° desse plano. Toquei imediatamente o disco de ferro com um pequeno disco de papel que tinha exatamente o mesmo diâmetro e, após haver retirado o disco de papel, encontrei que, para que a agulha parasse a 30°, era necessário reduzir a torção até um pouco menos de 40°.

16.4 IV. Resultado das Duas Experiências

Na primeira experiência, a bola de cobre, antes do contato da bola de sabugueiro, repelia a agulha a 28°, com o micrômetro marcando 120°; assim a força de torção era nesse caso de 148°. Após a bola de sabugueiro tocar a bola de cobre, essa última foi repelida a 28°,

[595]Uma ilustração dessa experiência encontra-se na Seção 17.1.
[596]No original: *un cercle de fer.*
[597]No original: *le plan de fer.*

o micrômetro marcando apenas 44°, de maneira que a força de torção total, igual à força repulsiva entre as bolas, era de 72°; porém, houve um intervalo de aproximadamente um minuto entre as duas observações, e a força elétrica diminuía de 1/50 [partes] por minuto no dia dessa experiência; assim a força total de torção tinha de ser de aproximadamente 73°30′, caso a eletricidade não tivesse diminuído de 1/50. Essa quantidade difere de apenas meio grau, ou de 1/147 [partes] de 74°, [sendo que esse valor de 74° corresponde à] metade da primeira força de torção de 148° que mede a repulsão antes do contato. Assim, como nas duas observações a distância entre as duas bolas é exatamente a mesma, e como a ação é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias e diretamente proporcional às densidades do fluido elétrico, resulta que a bola de sabugueiro adquiriu exatamente a metade do fluido elétrico da bola de cobre. Logo a bola de metal não possui uma afinidade ou uma atração para o fluido elétrico maior do que a afinidade da bola de sabugueiro.[598]

Na segunda experiência na qual o disco de ferro era tocado por um disco de papel exatamente do mesmo diâmetro, o fluido elétrico ainda dividiu-se igualmente entre os dois discos. Fizemos essas experiências com bolas de materiais diferentes, as repetimos na balança grande com globos de 5 ou 6 polegadas e sempre encontramos os mesmos resultados.

16.5 V. Primeira Observação

É necessário observar que, quando dois corpos iguais e similares colocados em contato são perfeitamente condutores, como todos os metais, é necessário apenas um único instante inestimável para que a eletricidade se distribua igualmente entre os dois corpos. Porém, quando um dos dois corpos é um condutor imperfeito, tal como por exemplo nosso disco de papel, frequentemente são necessários vários segundos antes que o disco de papel tenha adquirido exatamente a metade do fluido elétrico do disco de metal, o que depende não apenas da qualidade mais ou menos condutora dos dois corpos, mas ainda de suas extensões recíprocas e da maneira pela qual são colocados em contato. Na Memória anterior, já tentamos explicar como a força coercitiva dos suportes dielétricos imperfeitos só permite que o fluido elétrico se expanda e penetre [no suporte isolante] até uma certa distância do corpo condutor carregado de eletricidade.

16.6 VI. Segunda Observação

Ainda é necessário observar, ao repetir a segunda experiência, de colocar simetricamente em contato os dois discos, de maneira que, por exemplo, a borda de um disco não toque um ponto da superfície do outro disco, formando um ângulo, já que nesse caso o fluido elétrico se dividiria de uma maneira desigual entre os dois discos. Na experiência anterior, fiz com que a borda de um disco fosse tocada pela borda do outro disco tendo o cuidado de mantê-los no mesmo plano.

[598] Apresento uma discussão dos cálculos de Coulomb na Seção 17.2.

16.7 VII. Segundo Princípio. *Em um Corpo Condutor Carregado de Eletricidade, o Fluido Elétrico Distribui-se sobre a Superfície do Corpo, Mas Não Penetra em Seu Interior*

As experiências destinadas a provar essa proposição exigem eletrômetros muito mais sensíveis do que aqueles que foram usados até agora. Aqui vai o eletrômetro que utilizo. Tiramos, aquecendo uma vela, um fio de goma-laca da grossura aproximada de um fio de cabelo forte; lhe damos um comprimento de 10 a 12 linhas [2,26 a 2,71 cm]; uma de suas extremidades é presa no topo de um pequeno alfinete sem cabeça, suspenso por um fio de seda, tal como fornecido pelo bicho da seda; na outra extremidade do fio de goma-laca, fixamos um pequeno disco de ouropel[599] com aproximadamente 2 linhas [0,45 cm] de diâmetro. Suspendemos esse pequeno eletrômetro dentro de um cilindro de vidro; sua sensibilidade é tal, que uma força de 1/60000 de um grão (0,0009 dinas) repele a agulha a mais de 90°.[600] Forneço a esse eletrômetro um fraco grau de eletricidade da natureza daquela que quero comunicar ao corpo que deve ser submetido às experiências, e o suspendo em um cilindro de vidro para colocá-lo ao abrigo das correntes de ar. Feito isso, coloco um corpo sólido de uma forma qualquer, perfurado de vários furos que possuem pouca profundidade, sobre um suporte dielétrico que o isola. O corpo que quero submeter às experiências é um cilindro sólido de madeira, com 4 polegadas (10,83 cm) de diâmetro, perfurado de vários furos com 4 linhas (0,90 cm) de diâmetro e 4 linhas de profundidade.

16.8 VIII. Experiência

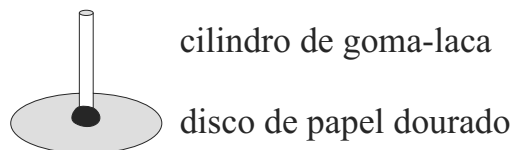
Coloco esse cilindro sobre um suporte dielétrico. Por meio da garrafa de Leiden ou da placa metálica de um eletróforo,[601] lhe forneço uma ou várias faíscas elétricas. Isolo na extremidade de um pequeno cilindro de goma-laca com 1 linha (0,226 cm) de diâmetro, um pequeno disco de papel dourado com $1\frac{1}{2}$ linha (0,338 cm) de diâmetro.[602]

Primeiro teste. Estando eletrizado o [disco de] ouropel do eletrômetro, toco a superfície do cilindro eletrizado com o pequeno disco de papel dourado e o apresento ao eletrômetro.

[599] Ver a Nota de rodapé 404 na página 205.

[600] Ver a Nota de rodapé 405 na página 205.

[601] Ver os Capítulos 6 (o eletróforo) e 12 (a garrafa de Leiden e os capacitores) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

[602] Esse pequeno disco de papel preso a um cilindro de goma-laca é o primeiro exemplo do famoso plano de prova de Coulomb. Uma descrição detalhada desse instrumento encontra-se na Seção 7.2 (coletores de carga) do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, [Assis, 2010b], [Assis, 2010a], [Assis, 2015b] e [Assis, 2017]; assim como na Seção 2.6 do Volume 2 do mesmo livro, [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019]. Uma ilustração desse plano de prova encontra-se na Figura dessa nota de rodapé. O cilindro de goma-laca comporta-se como um isolante, enquanto que o disco de papel dourado comporta-se como um condutor de eletricidade:

A agulha desse eletrômetro é repelida com força.

Segundo teste. Porém, se introduzo o pequeno disco de papel em um dos buracos do cilindro e se o faço tocar o fundo de um desses buracos, o apresentando em seguida ao [disco de] ouropel apoiado na extremidade da agulha do eletrômetro, essa agulha não dará qualquer sinal de eletricidade.

16.9 IX. Explicação e Resultado Dessa Experiência

No primeiro teste faço o pequeno disco de papel dourado tocar a superfície do cilindro [eletrizado]. Como esse disco possui uma espessura de apenas 1/18 de linha [0,0126 cm], ele torna-se uma parte da superfície desse cilindro e adquire, consequentemente, uma quantidade de fluido elétrico igual àquela quantidade que contém uma parte da superfície igual a esse pequeno disco. Nesse teste, o pequeno disco encontra-se carregado de uma quantidade de eletricidade que é não apenas perceptível ao nosso pequeno eletrômetro, mas da qual podemos medir exatamente a intensidade por meio de nossa balança elétrica.

No segundo teste, fazemos o pequeno disco de papel dourado tocar no fundo de um dos buracos do cilindro, aproximadamente 4 linhas abaixo da superfície ou a 20 linhas [4,52 cm] de seu eixo. Ao retirar com cuidado esse pequeno disco sem que ele toque na borda do buraco encontramos, ao apresentá-lo à agulha do eletrômetro, ou que ele não fornece qualquer sinal de eletricidade, ou [então] que ele fornece sinais muito fracos de uma eletricidade contrária àquela do cilindro.[603] Portanto, é claro que nessa experiência não há fluido elétrico no interior do corpo, até mesmo muito próximo de sua superfície.

Os sinais de eletricidade contrária, a qual percebemos apenas algumas vezes, derivam de que, quando o pequeno cilindro de goma-laca é introduzido no buraco, a ação elétrica da superfície do corpo eletrizado fornece, fora desse corpo, ao fio de goma-laca, uma pequena eletricidade de uma natureza diferente da sua, já que esse pequeno fio de goma-laca encontra-se isolado em sua esfera de atividade. A prova de que tudo se passa dessa maneira, que esse pequeno grau de eletricidade existe no fio de goma-laca e não no pequeno disco de papel dourado que foi colocado em contato com um ponto interior do corpo, é que, se tocarmos esse disco,[604] não destruiremos essa pequena eletricidade que é sempre muito fraca quando a goma-laca é pura e quando o ar não é muito úmido.

16.10 X

Essa propriedade do fluido elétrico de se espalhar sobre a superfície dos corpos condutores e de não penetrar no interior desses corpos quando esse fluido atingiu o estado de equilíbrio é uma consequência da lei de repulsão de seus elementos em razão inversa do quadrado das distâncias, lei que encontramos em nossa Primeira Memória. Porém, como foi a experiência e não a teoria que nos conduziu [a essa propriedade], acreditamos que devemos seguir a mesma marcha na exposição de nossas pesquisas. Vejamos agora como a teoria generaliza o resultado anunciado pela experiência.

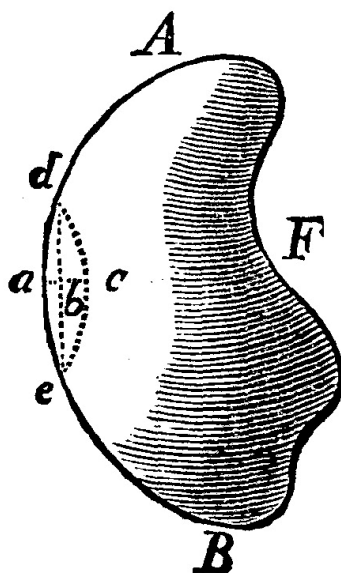
[603]Isto é, ou ele está neutro, ou então tem uma quantidade de carga muito pequena de sinal oposto à carga do cilindro eletrizado. Além disso, o módulo ou intensidade dessa carga é muito menor do que o módulo ou intensidade da carga obtida no primeiro teste.

[604]Isto é, se o disco de papel dourado for aterrado tocando-o, por exemplo, com um dedo.

16.11 XI. Teorema

Todas as vezes em que um fluido elétrico, contido em um corpo no qual pode se deslocar livremente, atua por repulsão entre todas as suas partes elementares,[605] *com uma força menor do que a razão inversa do cubo entre as distâncias, tal como seria, por exemplo, o inverso da quarta potência, nesse caso a ação de todas as massas desse fluido que estão colocadas a uma distância finita de um desses elementos é nula em relação à ação dos pontos de contato; é o que provamos em uma Nota de nossa Segunda Memória impressa no Volume de 1785 da Academia.*[606] *Assim, o fluido que deve sua elasticidade*[607] *a essa lei de repulsão vai se espalhar uniformemente no corpo. Porém, todas as vezes nas quais a ação repulsiva entre os elementos do fluido que produzem sua elasticidade é maior do que o inverso do cubo, por exemplo, tal como acabamos de encontrar para a eletricidade em razão inversa do quadrado das distâncias; nesse caso, não sendo infinitamente pequena a ação das massas do fluido elétrico colocadas a uma distância finita de um dos elementos desse fluido em relação à ação elementar dos pontos em contato, [então] todo o fluido deve se deslocar à superfície do corpo e não deve restar nenhum fluido em seu interior.*

16.11.1 Demonstração

Em um corpo de um formato qualquer AaB, o qual suponho preenchido de fluido cujas partes elementares atuam uma sobre a outra em razão inversa do quadrado das distâncias, traço em um ponto a uma normal ab infinitamente pequena e, pelo ponto b, faço passar um plano perpendicular a essa normal que divide o corpo em duas partes, [a saber,] uma [parte] infinitamente pequena $daeb$, a outra [parte] finita $dAFBeb$.

[605] No original: *parties élémentaires*. Essa expressão também pode ser traduzida como partes (ou partículas ou elementos) fundamentais, primárias, essenciais ou básicas.

[606] Ver a Nota de rodapé 466 na página 229.

[607] Por um lapso de Coulomb, como apontado por König, [Coulomb, 1890c, págs. 87-88, Nota 16], aparece aqui no original a palavra *eletricidade* em vez de *elasticidade*. Como fica claro na sequência, Coulomb está se referindo à elasticidade do fluido, isto é, à força repulsiva entre suas partículas.

Assim, ao decompor no sentido ab todas as forças com as quais a parte infinitamente pequena $dabe$ atua sobre o ponto b, ela deve se equilibrar com a ação resultante no sentido ba exercida por toda a massa distribuída no corpo $dAFBe$. Imaginemos agora sobre o plano dbe, do outro lado de a, uma pequena calota dce exatamente igual à calota dae, ao prolongar ab até c, tal que cb seja igual a ab. Porém, caso o fluido esteja distribuído por todo o corpo, para que exista a lei de continuidade, é necessário, já que ac pode ser infinitamente diminuído, que a densidade do fluido no ponto c seja igual à densidade do ponto a, ou que ao menos seja diferente dessa densidade apenas por uma quantidade que possamos diminuir infinitamente. Assim, a única massa pequena do fluido elétrico contida na calota $dcbe$ deverá se equilibrar com aquela massa contida na calota $daeb$. De onde resulta que a ação de toda a massa do fluido que estaria contida no restante do corpo deve ser nula; o que não pode acontecer quando a ação das massas situadas a uma distância finita de um ponto do fluido não é infinitamente pequena em relação à ação de um elemento do corpo em contato com esse ponto, a menos que seja nula a densidade dessas massas. De onde resulta que, no estado de estabilidade do fluido elétrico, todo esse fluido será levado à superfície do corpo e não haverá qualquer fluido no interior.

A primeira parte do teorema, [a qual afirma] que o fluido deve se distribuir uniformemente no corpo quando a ação dos elementos em contato é infinita em relação à ação das massas finitas que estão a uma distância finita desses mesmos elementos, não precisa de demonstração.

16.12 XII

Veremos em uma das Memórias que vai se seguir a essa, qual é a densidade elétrica de cada ponto da superfície de um corpo com um formato dado, e qual é o estado das partículas dielétricas[608] do ar em contato direto com essas superfícies.

[608] No original: *particules idio-électriques*. Ou seja, partículas isolantes. Ver a Nota de rodapé 433 na página 219.

Capítulo 17

Observações sobre a Quarta Memória de Coulomb

17.1 Método Experimental de Coulomb

O procedimento experimental de Coulomb descrito na Seção 16.3 está ilustrado na Figura 17.1.

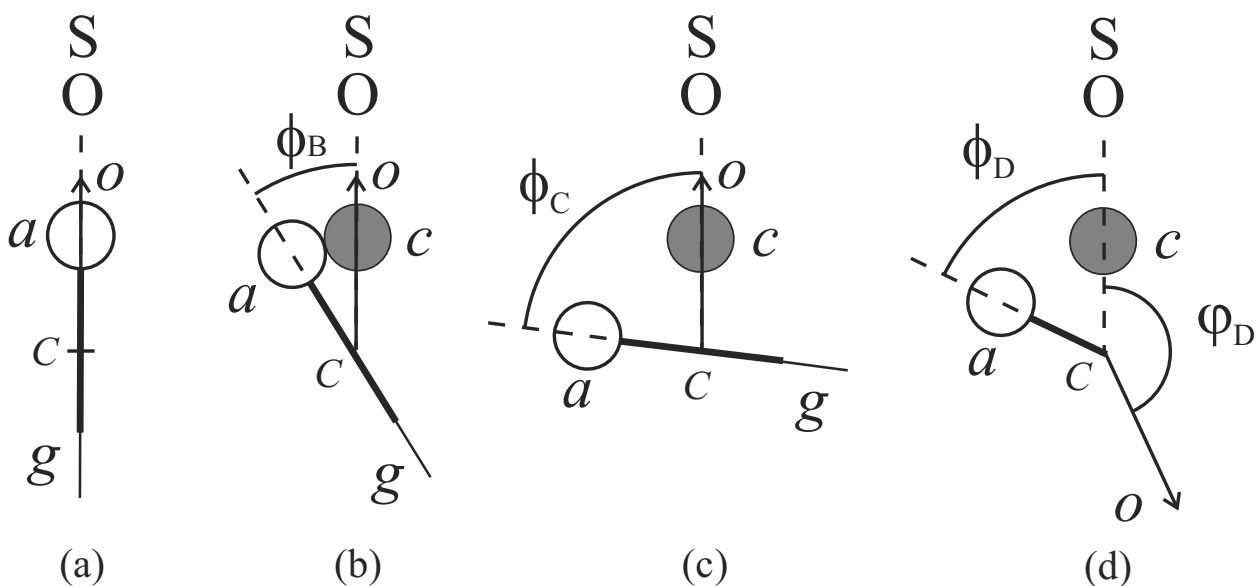



Figura 17.1: Primeira parte do procedimento experimental.

Na Figura 17.1 (a) temos um visão de cima para baixo da agulha com centro C ao longo da projeção do fio de suspensão, bola a da agulha e disco de papel g que funciona como contrapeso e como amortecedor das oscilações. Na situação em que o fio não está torcido, a agulha aponta para o ponto O fixo na escala graduada que está do lado de fora da balança. O ângulo ϕ de torção da parte inferior do fio é medido a partir desse ponto O. O ponteiro do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão é indicado pela seta Co. Inicialmente ele aponta para o ponto S fixo no pequeno círculo graduado preso ao redor do micrômetro. Estou supondo que inicialmente a agulha e o ponteiro do micrômetro estão ao longo do mesmo plano vertical.

Antes de iniciar a experiência Coulomb afasta um pouco a bola a da agulha de sua posição original ao colocar a bola de cobre c encostada nela, Figura 17.1 (b). A bola de cobre c fica sempre fixa no laboratório. A reta passando por C e pelo centro da bola de cobre c aponta sempre para o ponto O. Na situação em que as bolas estão descarregadas a parte inferior do fio está torcida de um ângulo ϕ_B.

Coulomb então eletriza as bolas a e c que estavam se tocando com cargas de mesmo sinal. Elas se repelem até que a agulha entre em repouso com o fio torcido de um ângulo ϕ_C, Figura 17.1 (c). No exemplo de Coulomb esse ângulo foi de 48°, que estou ilustrando como tendo sido no sentido anti-horário.

Coulomb então torceu o micrômetro no sentido horário de um ângulo φ_D fazendo com que a bola a da agulha se aproximasse da bola de cobre c de um ângulo ϕ_D, Figura 17.1 (d). Em seu exemplo $\phi_D = 28°$ quando $\varphi_D = 120°$.

Agora vem a segunda parte dessa experiência ilustrada na Figura 17.2.

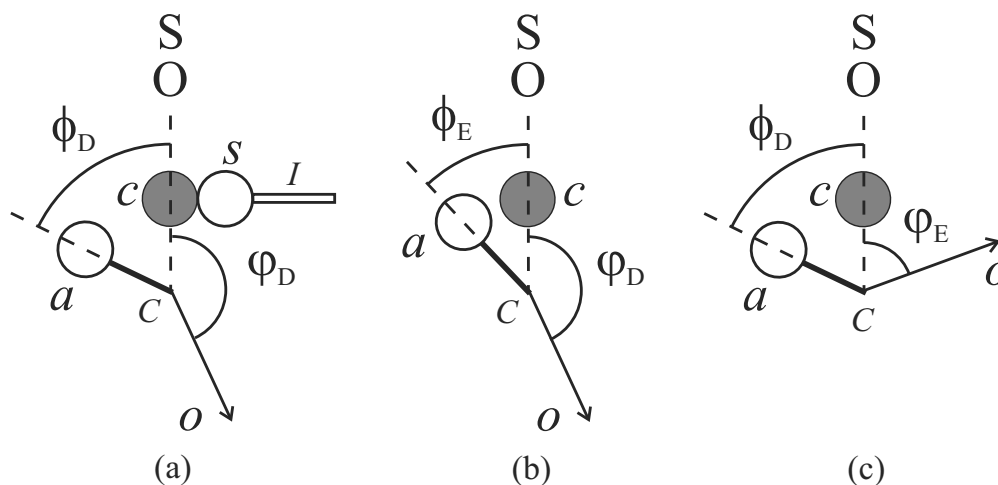



Figura 17.2: Segunda parte do procedimento experimental.

Enquanto a bola a da agulha estava afastada de um ângulo $\phi_D = 28°$ da bola de cobre c, Coulomb tocou essa bola de cobre com uma bola de sabugueiro s de mesmo tamanho que a bola c e que estava suspensa por um cilindro isolante I, Figura 17.2 (a).

Ao retirar a bola de sabugueiro, observou que a bola da agulha aproximou-se da bola de cobre parando em um ângulo ϕ_E, Figura 17.2 (b).

Coulomb então distorceu o ponteiro do micrômetro para que a agulha voltasse ao ângulo $\phi_D = 28°$. Para que isso ocorresse percebeu que a parte superior do fio tinha de ficar torcida com um ângulo $\varphi_E = 44°$, Figura 17.2 (c).

17.2 Análise da Experiência

Na Seção 16.4 Coulomb analisou essa experiência. No caso da Figura 17.1 (d), a repulsão total entre a bola a da agulha e a bola de cobre c era medida pelo ângulo $\phi_D + \varphi_D = 28° + 120° = 148°$ que fornece a torção total do fio de suspensão. Já na situação da Figura 17.2 (c), a repulsão entre as mesmas bolas era de $\phi_D + \varphi_E = 28° + 44° = 72°$. Levando em conta a perda de carga para o ambiente durante o intervalo de 1 minuto entre as duas observações, Coulomb calculou que a repulsão entre elas sem essa perda seria de $73,5°$. Esse valor difere de apenas $0,5°$ do valor de 74°, o que é algo praticamente desprezível. Concluiu

então que a força entre a e c na situação da Figura 17.2 (c) era essencialmente a metade da força entre a e c na situação da Figura 17.1 (d).

A distância entre as bolas a e c nas Figuras 17.1 (d) e 17.2 (c) é a mesma, a saber, $\phi_D = 28^\circ$. Como entre essas duas experiências a bola de cobre c havia sido tocada por uma bola de sabugueiro s de mesmo tamanho que estava inicialmente descarregada, como ilustrado na Figura 17.2 (a), concluiu que a bola de sabugueiro adquiriu exatamente a metade da carga elétrica que havia na bola de cobre c antes do contato. Como essas duas bolas apesar de terem o mesmo tamanho são feitas de materiais diferentes, concluiu que a bola de cobre não possui uma afinidade ou uma atração para as cargas elétricas maior do que a afinidade ou atração possuída pela bola de sabugueiro.

Chegou ao mesmo resultado na segunda experiência na qual utilizou discos de ferro e de papel de mesmo tamanho no lugar das bolas de cobre e de sabugueiro. Também obteve o mesmo resultado com outros materiais e com globos grandes.

Capítulo 18

Quinta Memória sobre Eletricidade: Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico é Compartilhado entre Dois Corpos Condutores Postos em Contato, e a Distribuição Desse Fluido nas Diferentes Partes da Superfície Desses Corpos

Por Coulomb[609]

18.1 I

Vimos em nossa Quarta Memória sobre eletricidade,[610] impressa no Volume de 1786 da Academia, que o fluido elétrico se espalhava igualmente entre todos os corpos, desde que fossem de natureza condutora: assim, sendo um globo de metal tocado por um globo de madeira de mesmo diâmetro, a eletricidade divide-se igualmente entre os dois globos; a experiência forneceu esse resultado de uma maneira incontestável.

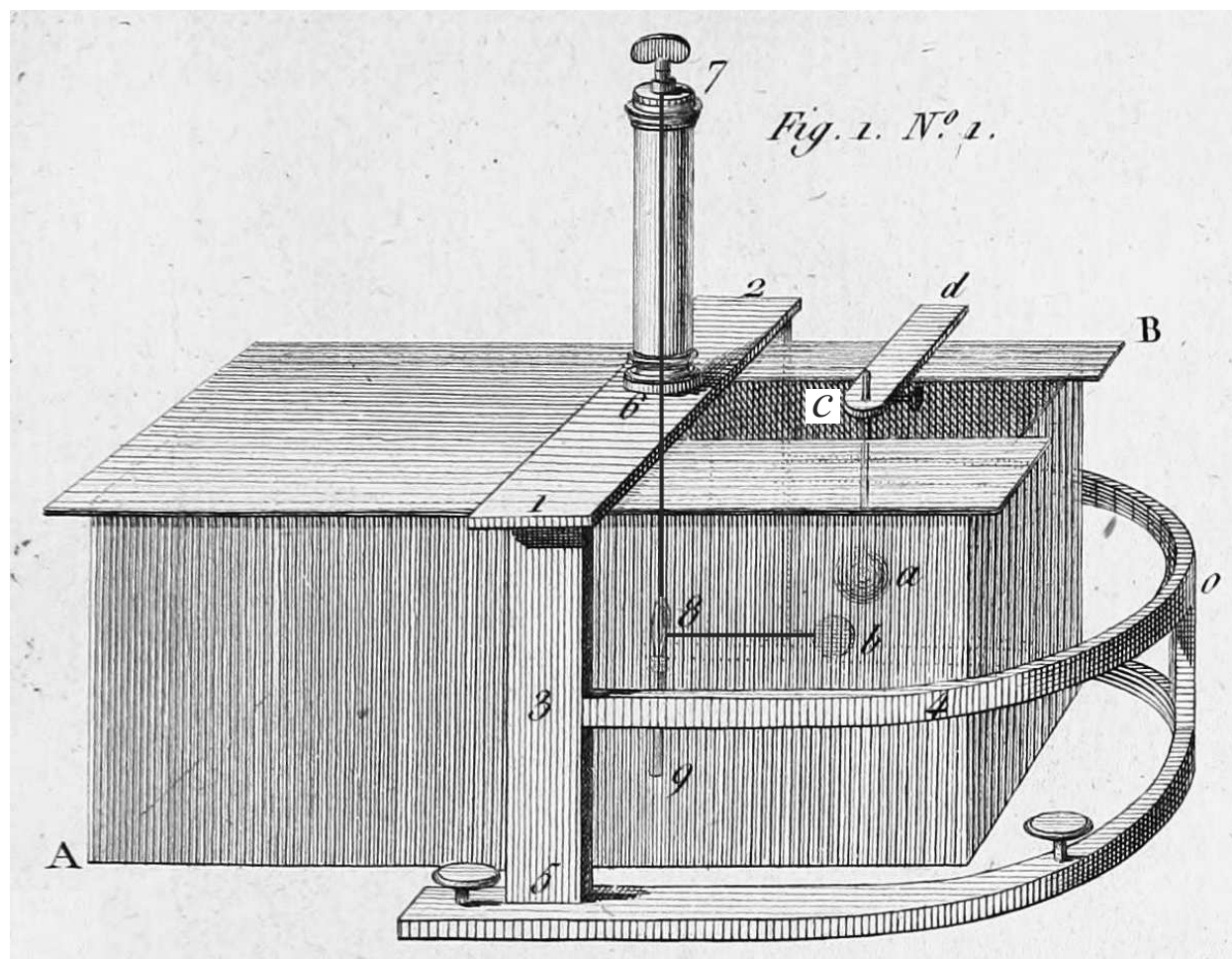
Vimos igualmente na mesma Memória que o fluido elétrico no estado de equilíbrio espalhava-se unicamente sobre a superfície dos corpos sem penetrar de uma maneira perceptível no interior desses corpos. A experiência tornou conhecida essa lei, e a teoria provou que ela era uma consequência da ação repulsiva ou atrativa entre as moléculas do fluido em razão inversa do quadrado das distâncias.

Vamos procurar agora em quais proporções o fluido elétrico se divide entre dois corpos de tamanhos diferentes e de mesmo formato, ou tendo formatos diferentes, quando colocamos esses dois corpos em contato, e qual é a densidade desse fluido nos diferentes pontos de cada um desses corpos, densidade essa que varia para cada ponto de acordo com o formato

[609] Esse trabalho foi apresentado em 1787 à Academia de Ciências da França, sendo publicado em 1789, [Coulomb, 1789].

[610] Essa Memória está traduzida no Capítulo 16.

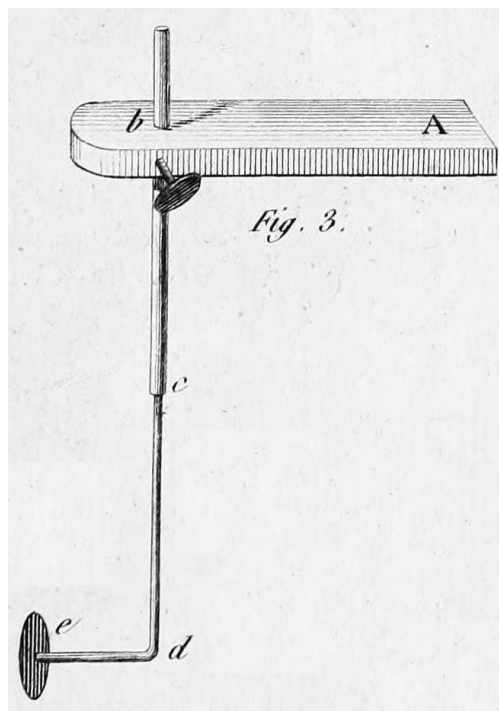
do corpo. Porém, como vamos utilizar frequentemente nas experiências a seguir, para medir a eletricidade, uma balança de torção maior do que aquela descrita em nossa Primeira Memória,[611] é necessário fornecer aqui a figura e a descrição [dessa balança].

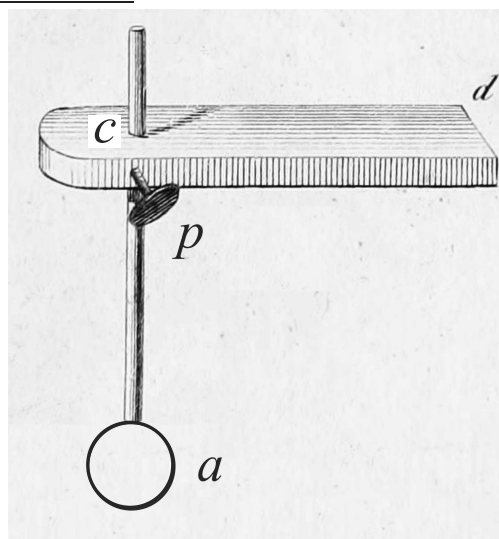
A Figura 1, Número 1, representa essa nova balança.[612]

A caixa AB é quadrada e formada por quatro placas de vidro com 2 pés [64,96 cm] de comprimento e 15 a 16 polegadas [40,61 a 43,31 cm] de altura; ela é colocada sobre uma mesa seca e revestida de verniz dielétrico.[613] Essa caixa é coberta por vários pedaços móveis de vidro e tem um recuo na direção de c para que possamos introduzir aí o globo a, apoiado por um pequeno cilindro ac de goma-laca. Esse cilindro é terminado por um pequeno bastão cilíndrico seco no forno e revestido de goma-laca, que passa por um buraco do suporte cd, dentro do qual é fixado por um parafuso. Esse suporte, destinado a introduzir o globo a na balança, é visto com mais detalhes na Figura 3.[614]

[611]Essa Memória está traduzida no Capítulo 10.

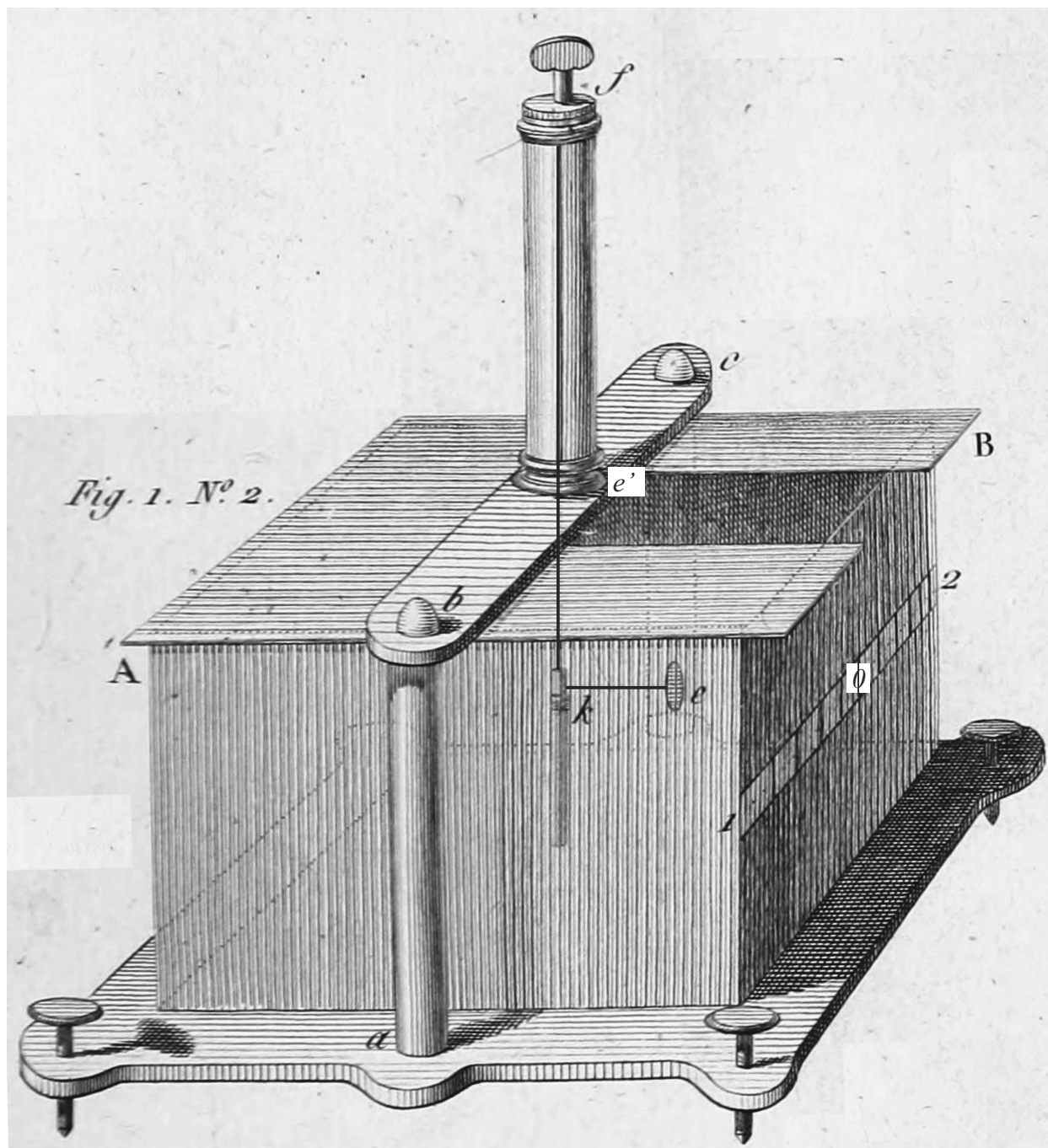
[612]Ressaltei na Figura 1, Número 1, a letra c, o fio metálico de suspensão 78 e a agulha $8b$ feita com um fio horizontal de goma-laca tendo o disco de papel dourado em b.

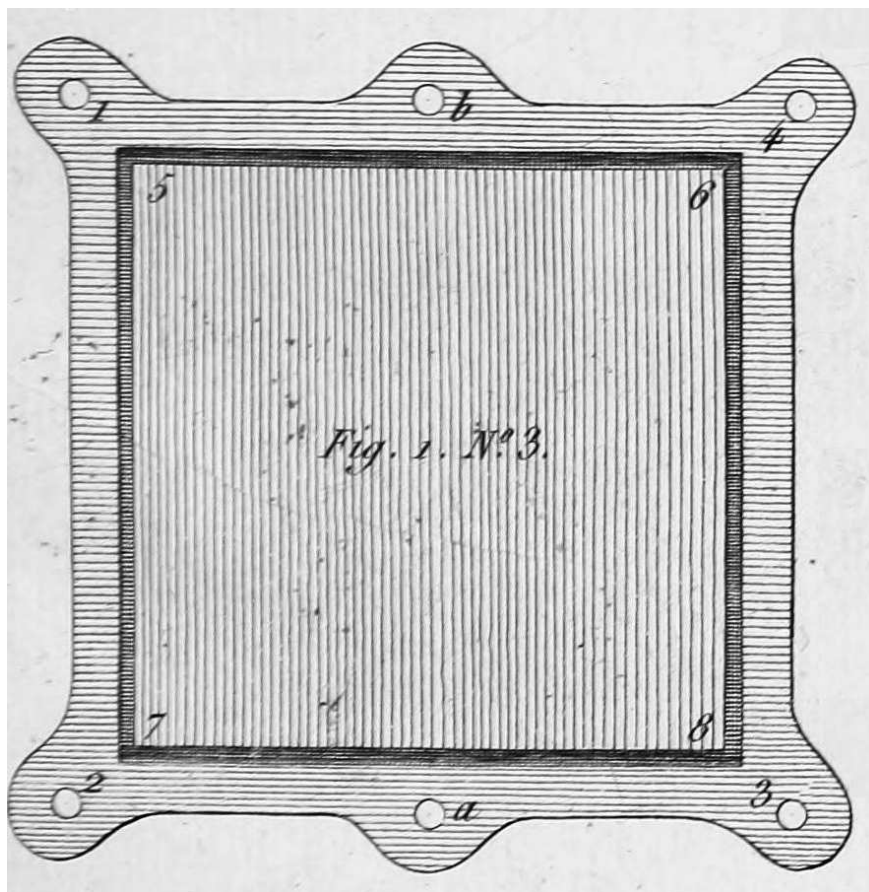
[613]Ver a Nota de rodapé 433 na página 219.

[614]O suporte cd da Figura 1 de Coulomb aparece na Figura 3 como sendo representado pelas letras bA. Ele está prendendo o plano de prova $bcde$. Adaptei essa imagem na Figura dessa Nota de rodapé:

As armações 1, 2, 3 e 5 [da Figura 1, Número 1] servem para prender o tubo vertical 6, 7. Esse tubo, de 12 a 15 polegadas [32,48 a 40,61 cm] de altura, é de vidro. Na extremidade desse tubo, no ponto 7, é colocado o micrômetro de torção que é visto em detalhe na Figura 2, Números 1 e 2.[615]

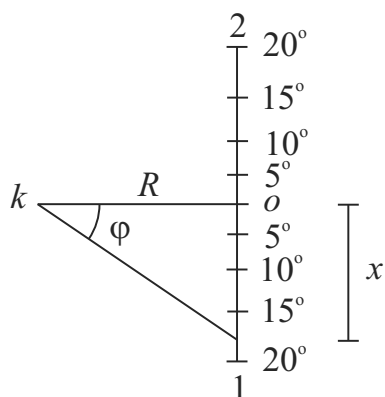
O círculo 3, 4, *o* [da Figura 1, Número 1] preso na armação, forma uma semi-circunferência tendo aproximadamente 4 pés [130 cm] de diâmetro. Ele é dividido em 90° a partir de seu centro no ponto *o*. Seu centro corresponde à linha vertical 7, 8, que suporta a pinça 8, 9; nessa pinça está preso horizontalmente um fio de goma-laca 8*b*, terminado em *b* por um pequeno disco de papel dourado.

Na Figura dessa Nota de rodapé representei o suporte pelas letras *cd*. Além disso, substituí o plano de prova *bcde* da Figura 3 original de Coulomb pelo globo *a* que está ligado ao cilindro *ac* revestido de goma-laca, sendo que esse cilindro está preso ao suporte *cd* por um parafuso *p*.

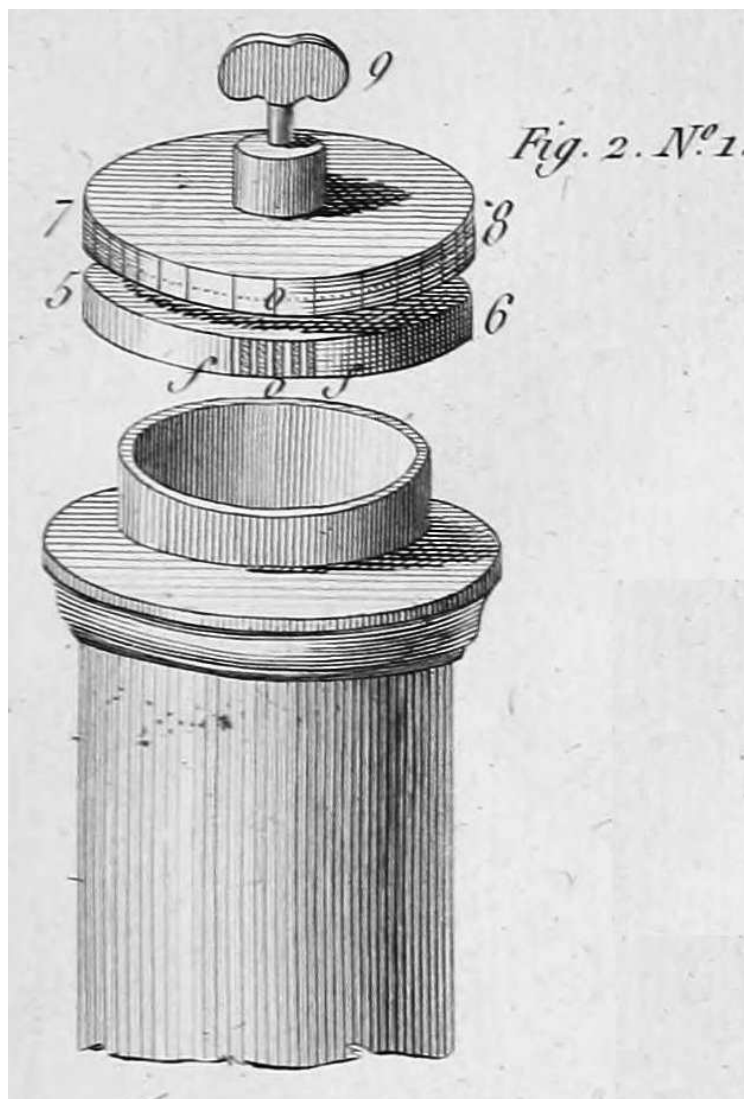
[615] A Figura 2, Número 1, aparece na página 302, enquanto que a Figura 2, Número 2, está na página 303.

A Figura 1, Número 2, representa uma balança do mesmo tipo, mas ainda mais simples.[616]

Ela tem por base (Figura 1, Número 3) uma moldura de madeira seca em estufa, na qual vemos em a e b dois encaixes que suportam a armação vertical.

[616]Enfatizei na Figura 1, Número 2, o fio fk e a agulha ke que possui em sua extremidade e um disco de papel dourado. Ressaltei também o ponto o na faixa de papel $1o2$. Além disso, acrescentei a letra e' na base do tubo de vidro $e'f$ que vai ser mencionada mais adiante, ver a Nota de rodapé 618 na página 302.

Traçamos sobre essa moldura um sulco 1, 2, 3, 4 que deve receber as quatro placas de vidro verticais que formam a caixa da balança de torção; [os pontos] 5, 6, 7, 8 representam a lacuna da moldura que fechamos seja com uma placa de vidro, seja com uma pequena moldura forrada com tafetá revestido de um verniz dielétrico.

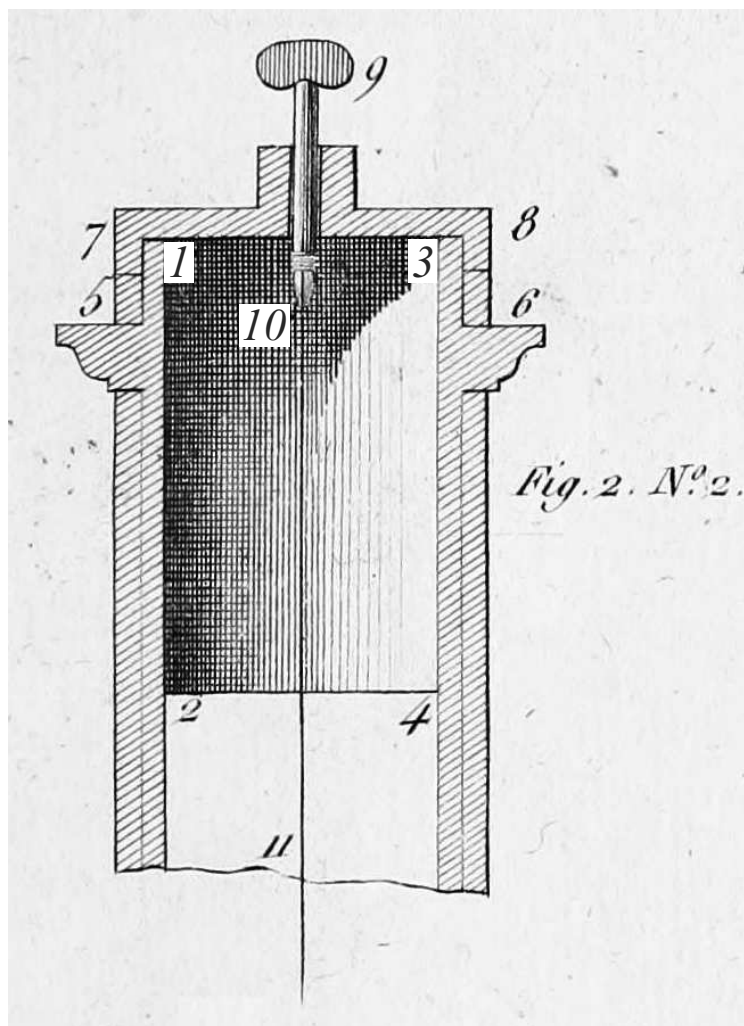
No lugar do círculo 3, 4, o da Figura 1, Número 1, colamos sobre uma das placas de vidro (Figura 1, Número 2) uma faixa de papel 1, 2 dividida em graus, desde seu ponto central o até as suas extremidades, seguindo a tangente de um círculo que tem seu centro ao longo da vertical fk.[617] Os quatro vidros que formam a caixa são guarnecidos em toda a

[617]Na Figura dessa Nota de rodapé temos $x = R \tan \varphi$. Queremos ângulos de 5° marcados ao longo da faixa de papel 1o2 da Figura 1, Número 2. Logo, dado R, podemos usar essa fórmula para calcular o valor de x correspondente. Por exemplo, a primeira marcação dos dois lados do ponto central o é dada por $x = R \tan 5° = 0,0875R$. Já a quarta marcação é dada por $x = R \tan 20° = 0,364R$:

volta com fitas de seda que são coladas neles, e nas quais prendemos outras pequenas fitas para poder amarrar entre si esses vidros e para os desmontar à vontade. O tubo de vidro $e'f$,[618] guarnecido de um pequeno encaixe de madeira em e', é aparafusado sobre a travessa bc, assim como todas as partes do instrumento.

A Figura 2, Número 1, representa em perspectiva as partes diferentes do micrômetro de cobre colocado no alto do tubo.

A Figura 2, Número 2, representa um corte vertical desse micrômetro.[619]

---

[618]No original: *le tuyau de verre* ef. Coulomb parece estar referindo-se à Figura 1, Número 2. A letra e nessa Figura indica o disco de papel dourado preso na ponta da agulha ke. Acrescentei nessa Figura a letra e' na base do tubo de vidro $e'f$. Além disso, traduzi a expressão *Le tuyau de verre* ef por "o tubo de vidro $e'f$", em vez de "o tubo de vidro ef", para assim evitar confusão com a letra e que aparece nessa Figura indicando o disco de papel dourado.

[619]Enfatizei na Figura 2, Número 2, os números 1, 3 e 10.

Ele é composto de várias peças. Em primeiro lugar, de um tubo de cobre 1, 2, 3, 4 no qual o anel 5, 6 entra primeiro, anel esse que repousa sobre um cordão de solda desse tubo. Esse anel possui apenas uma divisão simples of, correspondente e dividida em 5°.[620] O círculo 7, 8 que forma a cobertura[621] do micrômetro, está dividido de 5° em 5° ao longo de toda sua circunferência. Nessa cobertura (Figura 2, Número 2) entra a haste 9, 10 que prende no ponto 10 o fio de suspensão 10, 11. Essa pinça [que prende o fio] pode girar com um atrito bem grande em um anel da cobertura e serve para apontar aproximadamente para o ponto o [da faixa 1o2] a agulha ke (Figura 1, Número 2).

Quando queremos colocar a balança em operação, observamos, ao alinhar pelo fio de suspensão e pelo disco e de papel dourado preso verticalmente, a qual distância do ponto o corresponde a agulha; se ela corresponder, por exemplo, [à divisão de] 5° ao girar a cobertura [do micrômetro] de 5°, teremos a certeza de coincidir a direção da agulha com o ponto o. Em seguida trazemos o ponto o (Figura 2, Número 1) do círculo 5, 6, sobre o qual dissemos que ele tinha uma divisão of de 5°, até o ponto o da cobertura 7, 8 dividida de 5° em 5°. Nesse caso o anel 5, 6 e a cobertura 7, 8, que são colocados (Figura 2, Número 2) a

[620]Pela Figura 2, Número 1, vê-se que o anel inferior 56 tem uma divisão central no ponto o, além de uma divisão de cada lado representada pela letra f. Os ângulos fo e of são de 5°. As três divisões do anel 56 coincidem com as três divisões centrais do disco 78, sendo que a divisão central desse disco também é representada pela letra o.

[621]No original: *chapeau*. Essa palavra também pode ser traduzida por chapéu.

uma distância muito pequena entre si, suficiente apenas para que não se toquem, podem se mover independentemente um do outro. Assim o ponto o permanecendo imóvel no círculo 5, 6 durante o tempo em que giramos a cobertura 7, 8, o ângulo de torção do fio de suspensão será medido pelo ângulo de rotação da cobertura, mais a distância [angular] da agulha até o ponto o [da faixa $1o2$], quando o disco b dessa agulha (Figura 1, Número 1) for eletrizado e repelido pelo globo a igualmente eletrizado. Para suspender a agulha nessa balança, utilizamos um fio de cobre vendido como número 12 no comércio. Vimos em 1784, nas *Mémoires de l'Académie*,[622] que esse tipo de fio tinha um grande grau de elasticidade, e nas experiências pequenas ele seria preferível ao fio de prata, caso pudesse ser obtido de forma tão fina.

18.2 II

Utilizamos dois métodos para determinar a maneira pela qual o fluido elétrico se divide entre dois corpos colocados em contato.

O primeiro consiste em colocar o corpo eletrizado na balança elétrica, após ter eletrizado com o mesmo tipo de eletricidade o pequeno disco de papel dourado colocado na extremidade da agulha. Em seguida, por meio do micrômetro de torção, trazemos a agulha que é repelida pela ação elétrica até uma distância qualquer do corpo eletrizado. O ângulo de torção fornecido pelo micrômetro, mais a distância [angular] da agulha até o ponto o, vai medir, a essa distância entre os dois corpos, a ação repulsiva que eles exercem um sobre o outro. Em seguida tocamos o corpo eletrizado colocado dentro da balança com o corpo com o qual queremos que ele divida sua eletricidade;[623] e ao distorcer, por meio do micrômetro, o fio de suspensão, trazemos a agulha de volta à [mesma] distância do corpo colocado dentro da balança que havia sido observada na primeira operação. O ângulo de torção medido pelo micrômetro, mais a distância [angular] da agulha até o ponto o, vai medir a quantidade de eletricidade que foi deixada no corpo colocado dentro da balança pelo corpo que foi posto em contato com ele. De fato, a distância entre a agulha e o globo eletrizado é a mesma na primeira e na segunda observação, mas a ação de cada elemento do fluido elétrico é, assim como provamos nas Memórias anteriores, inversamente proporcional ao quadrado das distâncias e diretamente proporcional às densidades. Assim, como agora as distâncias [entre o globo e o disco de papel] são as mesmas nas duas operações, a ação repulsiva medida pelo ângulo de torção será proporcional à quantidade de fluido elétrico.[624]

Nessa operação, a menos que o clima seja muito seco, é necessário levar em conta a quantidade de eletricidade que é perdida no intervalo de tempo entre as observações.

18.3 III

O método anterior nos fornece em massa a razão entre as quantidades de eletricidade divididas entre os dois corpos.[625] Porém, quando quero obter a densidade elétrica em cada ponto de um corpo condutor, aqui vai o método que empreguei.

---

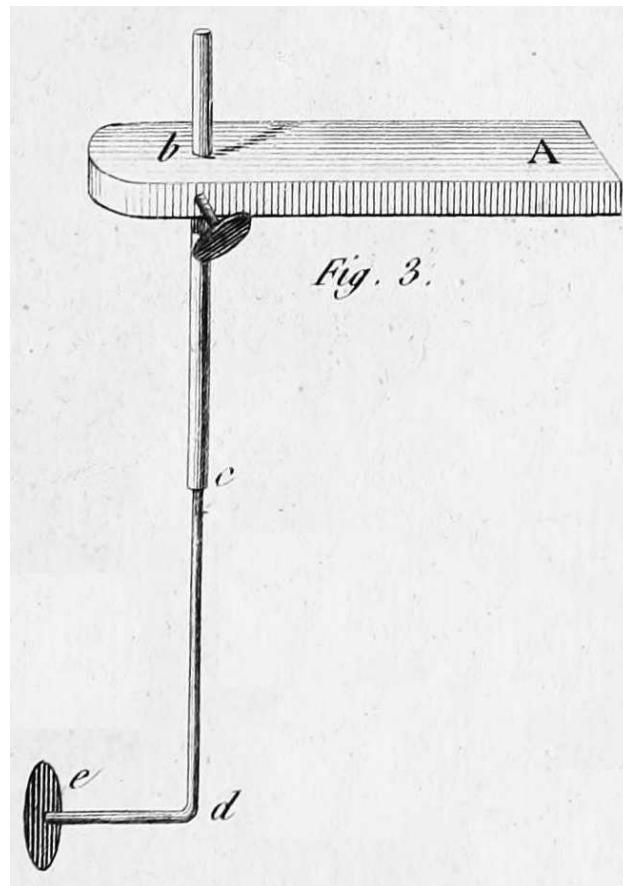
[622] Ver [Coulomb, 1787]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

[623] Vamos chamar de corpo g ao corpo que estava inicialmente descarregado e que tocou no globo eletrizado a que está em uma posição fixa no interior da balança elétrica. Após o toque entre a e g, o corpo g é imediatamente afastado da balança.

[624] Uma ilustração desse método encontra-se na Seção 19.1.

[625] Isto é, esse método fornece a razão entre as quantidades totais de carga nos dois corpos.

Usamos a pequena balança descrita em 1785 nas *Mémoires de l'Académie*[626] ou então substituímos um fio de prata muito fino na balança (Figura 2, Número 1) pelo fio de cobre que sustenta a agulha *ke* [da Figura 1, Número 2]. A força de torção do fio de prata que utilizo é apenas cerca de um trigésimo da força de torção do fio de cobre que tem número 12 no comércio.

Obtemos em seguida (Figura 3) um fio de goma-laca *cde* ao derreter na vela um pequeno pedaço de goma-laca muito pura; esse fio de goma-laca, da espessura aproximada de um fio grosso da crina de cavalo, forma um ângulo em *d*; ligamos em *e* verticalmente um disco *e* de papel dourado.[627]

Após ter eletrizado o disco da agulha das formas indicadas em 1785, eletrizamos o corpo e em seguida fazemos tocar o disco de papel *e*, suspenso pelo fio de goma-laca e pela pinça *bA*, no ponto do corpo onde queremos obter a densidade. Em seguida colocamos esse pequeno disco dentro da balança [elétrica], tendo o cuidado, nas observações que queremos comparar, de sempre colocá-lo no mesmo ponto, o que é fácil de ser feito, ao fixar pontos de referência sobre a tampa da balança, para com isso sempre colocar *bA* bem exatamente no mesmo

[626]Ver [Coulomb, 1788b], [Coulomb, 1788d] e [Coulomb, 1788e]. Essas Memórias estão traduzidas nos Capítulos 10, 12 e 14, respectivamente.

[627]No original: *un plan e de papier doré*. A palavra "plan" é usualmente traduzida por "plano". Estou utilizando aqui a expressão alternativa "disco" para facilitar a compreensão do texto. A Figura 3 representa um outro modelo do plano de prova de Coulomb, ver a Nota de rodapé 602 na página 289. Ele é composto por um pequeno disco condutor (indicado pela letra *e*) preso ao cabo isolante *bcde*. O cilindro *bc* é revestido de um verniz dielétrico.

local. Como o pequeno disco e possui usualmente apenas 5 ou 6 linhas (1,13 a 1,35 cm) de diâmetro e apenas 1/18 de linha (0,0125 cm) de espessura, ele se confunde no contato com a superfície que ele toca; assim, no contato, ele adquire ou a densidade [elétrica] do ponto que ele toca, ou ao menos uma densidade proporcional à densidade desse ponto. Assim, ao fazê-lo tocar sucessivamente em pontos diferentes do corpo, e o apresentando após cada contato à agulha, trazendo sempre a agulha ao mesmo local,[628] teremos a razão entre as densidades dos diferentes pontos que foram tocados.

Na comparação das observações sucessivas, é necessário levar em conta a perda de eletricidade devida ao contato com o ar. Contudo, fazemos facilmente essa correção, se sempre compararmos dois pontos por três operações feitas em intervalos de tempo aproximadamente iguais; aqui vai o método que utilizo para comparar [as densidades de] dois pontos. Inicialmente toco um desses pontos, e determino sua densidade ao colocar na balança o pequeno disco de papel que tocou [esse ponto]; na segunda operação toco o ponto cuja densidade quero comparar com a primeira medida, e determino sua densidade; toco na terceira operação o primeiro ponto cuja densidade determinei na primeira operação; determino novamente sua densidade a qual encontro ser menor que na primeira operação, já que a eletricidade foi diminuída durante o intervalo de tempo pelo contato do ar. Porém, ao considerar uma quantidade média entre as duas densidades encontradas na primeira e na terceira operação, terei a medida de seu valor no instante em que foi realizada a segunda operação, instante esse no qual determinei a densidade do segundo ponto que quero comparar com o primeiro ponto.

Nesse segundo método que é, em geral, o mais cômodo, o mais simples e talvez o mais exato para comparar a densidade elétrica de pontos diferentes de um mesmo corpo ou de corpos diferentes, que além disso exige apenas balanças de torção com um pequeno volume, algumas vezes surge uma dificuldade prática que atrapalharia os resultados, caso não estivéssemos prevenidos. Ocorre que os fios de goma-laca não são perfeitamente impenetráveis à eletricidade, sendo que são menos impenetráveis nos dias úmidos do que nos dias muito secos; além disso eles são mais ou menos impenetráveis de acordo com o tipo de goma-laca: a goma-laca menos clara é geralmente mais impenetrável à eletricidade do que a outra. Essa primeira goma-laca, obtida em fio com a espessura de um grosso fio de crina de cavalo, deve ainda ser testada ao fazê-la tocar por sua ponta e, na qual queremos ligar (Figura 3) o pequeno disco e, a um corpo eletrizado; em seguida a apresentamos à agulha da balança que está igualmente eletrizada.[629] Caso a extremidade desse fio [de goma-laca] pareça repelir perceptivelmente a agulha, é necessário rejeitá-lo, só utilizando fios de goma-laca que, após terem tocado um corpo eletrizado, não exercem qualquer ação perceptível sobre a agulha dessa balança. Percebemos que o motivo dessa observação está ligado ao fato de que, quando a eletricidade penetrou o fio de goma-laca, ele só se livra dela com muita dificuldade. Assim, na comparação entre duas operações sucessivas nas quais o pequeno disco de papel dourado terá tocado inicialmente um ponto fortemente eletrizado, caso em uma segunda operação fizermos esse disco tocar em um ponto fracamente eletrizado, o fio de goma-laca conservará uma parte da pequena eletricidade que penetrou nele, e a ação será maior do que aquela que ocorreria apenas devida à densidade comunicada no segundo contato com o disco de papel dourado. Assim, deve-se preferir as situações nas quais podemos utilizar superfícies grandes para medir a densidade de pontos diferentes de um corpo; veremos vários exemplos

[628]Ou seja, com a agulha sempre afastada do mesmo ângulo em relação ao ponto central o.

[629]Ou seja, o disco preso na agulha da balança está eletrizado com carga de mesmo sinal que a carga do corpo eletrizado que foi tocado pela ponta do fio de goma-laca.

na sequência dessa Memória.

18.4 IV. Primeira Parte. *Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico se Divide entre Dois Globos com Diâmetros Diferentes Colocados em Contato*

18.4.1 Primeira Experiência

Colocamos na grande balança (Figura 1, Número 1), cuja agulha é suspensa por um fio de cobre vendido como número 12 no comércio, um globo eletrizado com 6 polegadas e 3 linhas (16,92 cm) de circunferência.[630] Observamos a força de torção que era necessário utilizar para trazer a agulha a 30° de distância desse globo; logo em seguida tocamos esse globo com um outro globo tendo 24 polegadas (64,97 cm) de circunferência[631] e, ao trazer a agulha de volta ao mesmo ponto,[632] observamos novamente a força de torção. Aqui vai o resultado dessa experiência:[633]

Primeiro teste. O globo colocado na balança repelia a agulha a 30° antes do contato, com uma força de torção de 145°.[634]

O mesmo globo, após seu contato com o globo grande, repelia a agulha a 30° com uma força de torção de 12°.[635]

Segundo teste. O mesmo globo, antes do contato, repelia a agulha a uma distância de 30° com uma força de 145°.

Após o contato, com uma força de 12°.

Terceiro teste. Antes do contato a agulha era repelida a 26° com uma força de 259°.

Após o contato, com uma força de 21°.

Quarto teste. Antes do contato, a agulha era repelida a 22° com uma força de torção de 255°.

Após o contato, com uma força de 21°.

Quinto teste. Antes do contato, o globo repelia a agulha a 18° com uma força de 231°.

Após o contato, com uma força de 19°.

18.4.2 Resultado Dessa Experiência

Os dois globos colocados em contato tinham um deles uma circunferência de $6\frac{1}{4}$ polegadas [16,92 cm], o outro 24 polegadas [64,97 cm], a razão de suas superfícies era aproximadamente

[630] Ou seja, seu diâmetro é dado por $16,92/\pi = 5,39$ *cm*.

[631] Ou seja, seu diâmetro é dado por $64,97/\pi = 20,68$ *cm*.

[632] Isto é, separada de 30° do primeiro globo.

[633] Uma ilustração dessa experiência encontra-se na Seção 19.1.

[634] Esse ângulo de 145° mede a torção total do fio levando em conta o desvio de 30° da agulha presa à parte inferior do fio de suspensão e o desvio angular do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão.

[635] Esse ângulo de 12° também mede a torção total do fio levando em conta a inclinação de 30° da agulha presa à parte inferior do fio de suspensão e a inclinação do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão.

:: 14,8 : 1,0.[636] Porém, cada teste foi executado em menos de 1 minuto, e a eletricidade diminuía de apenas 1/40 [partes] por minuto no dia dessa experiência. Para poder comparar agora a quantidade de eletricidade que o pequeno globo conservou após o contato com aquela quantidade que ele perdeu ou, o que dá no mesmo, que ele comunicou ao grande globo pelo contato, é necessário observar, como já dissemos acima, que em cada teste a distância entre o centro do globo colocado na balança e o disco de papel dourado fixado verticalmente na extremidade da agulha da balança é a mesma nas duas observações antes e depois do contato; dessa forma, a ação do globo sobre um ponto elétrico colocado fora desse globo,[637] sendo medida pelo inverso do quadrado das distâncias até esse centro e sendo diretamente proporcional às quantidades de eletricidade espalhadas sobre a superfície do globo, como a distância é a mesma nas duas observações consecutivas de cada teste, a ação do globo sobre o disco da agulha será proporcional às quantidades de eletricidade que o globo contém antes e depois do contato. Porém, sendo essa ação proporcional ao ângulo de torção, resulta que a quantidade de eletricidade que o pequeno globo contém antes e depois do contato, é proporcional ao ângulo de torção.

No primeiro teste, a força de torção para uma distância [angular] de 30° entre a extremidade da agulha e o centro do globo era, antes do contato, de 145°; ela é reduzida a 12° após o contato. Assim, para ter a quantidade de eletricidade adquirida pelo globo grande, é necessário eliminar 12° de 145°. Resultará disso que no contato o globo de 24 polegadas de circunferência adquiriu uma massa de eletricidade medida por 133° e deixou para o pequeno globo apenas uma [massa de eletricidade] medida por 12°. Assim, as quantidades de eletricidade divididas entre esses dois globos são muito próximas de :: 11,1 : 1,0.[638]

Ao seguir o mesmo procedimento, encontraremos essa razão sendo quase exatamente a mesma para todos os outros testes.

Mas as superfícies dos dois globos colocados em contato estão entre si na razão de 14,8 para 1,0. Assim, os dois globos colocados em contato não se carregam de fluido elétrico em uma razão tão grande quanto [a razão entre] as suas superfícies. Caso, de acordo com essa experiência, quisermos determinar a razão da densidade do fluido elétrico que se espalha após o contato uniformemente sobre a superfície dos dois globos, sem penetrar no interior dos dois globos, assim como provamos em nossa Quarta Memória,[639] será necessário dividir a razão entre as superfícies dos dois globos pela razão entre as quantidades de eletricidade que eles possuem. Dessa maneira, sendo a razão entre as superfícies :: 14,8 : 1,0 e a razão entre as quantidades de fluido elétrico :: 11,1 : 1,0, a densidade média de fluido elétrico distribuída após o contato sobre a superfície do pequeno globo estará para aquela do globo grande

[636]Como a razão de suas superfícies é igual ao quadrado da razão entre seus raios, ou ao quadrado da razão entre suas circunferências, temos que essa razão é dada por

$$\frac{\acute{A}rea\ maior}{\acute{A}rea\ menor} = \left(\frac{24}{6,25}\right)^2 = \frac{14,8}{1,0} \ .$$

[637]Esse trecho da frase original, *sur un point électrique placé en dehors de ce globe*, não aparece na edição das obras de Coulomb feita por Potier, [Coulomb, 1789, pág. 429] e [Potier, 1884, pág. 191].

[638]Isto é,

$$\frac{Eletricidade\ no\ globo\ maior}{Eletricidade\ no\ globo\ menor} = \frac{133}{12} = \frac{11,1}{1,0} \ .$$

[639]Essa Memória está traduzida no Capítulo 16.

$$:: 14,8 : 11,1 \ .$$

Para provar isso, seja S a superfície do globo grande, Q a quantidade de fluido elétrico espalhada sobre sua superfície após o contato, D a densidade [superficial] desse fluido.

Sejam S' a superfície do pequeno globo, Q' sua quantidade[640] de fluido elétrico, D' sua densidade [superficial], teremos

$$D' = \frac{Q'}{S'} \qquad \text{e} \qquad D = \frac{Q}{S} \ ;$$

assim,

$$\frac{D'}{D} = \frac{Q'S}{S'Q} \ .$$

Em nossa experiência,

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{1,0}{11,1} \qquad \text{e} \qquad \frac{S}{S'} = \frac{14,8}{1,0} \ ;$$

assim

$$\frac{D'}{D} = \frac{14,8}{11,1} = 1,33 \ .$$

Desprezamos aqui a quantidade de eletricidade perdida [para o ambiente] em cada teste entre uma observação e outra; ela era de apenas 1/50 [partes por minuto] no dia em que essa experiência foi realizada, já que cada observação durava apenas cinquenta segundos e que a eletricidade dos globos não diminuía no total de 1/40 [partes] por minuto.[641,642]

18.5 V. Segunda Experiência

Queríamos comparar nessa experiência a quantidade de eletricidade adquirida por um globo de $11\frac{1}{2}$ polegadas (31,13 cm) de circunferência,[643] posto em contato com um globo de $6\frac{1}{4}$ polegadas (16,92 cm) de circunferência, colocado na balança no mesmo ponto, antes e após o contato, como na experiência anterior.

Primeiro teste. O globo de $6\frac{1}{4}$ polegadas de circunferência eletrizado e colocado dentro da balança repele, antes do contato, o disco da agulha a 27°, com uma força de torção de 170°.

Após o contato, com uma força de 42°.

Segundo teste. Antes do contato, ele repele a agulha a 26°, com uma força de torção de 169°.

Após o contato, com uma força de 41°.

[640]No original: *quantité*, [Coulomb, 1789, pág. 430]. Por um lapso de Potier, em sua edição das obras de Coulomb, ele substituiu aqui a palavra "quantitè" por "densité" (densidade), [Potier, 1884, pág. 192].

[641][Nota de Potier:] A partir das Tabelas calculadas pelo Sr. Plana, no volume VII da segunda série das *Mémoires de l'Academie de Turin*, resulta, para a razão entre as densidades, 1,31.

[642]Ver [Plana, 1845] e [Plana, 1854].

[643]No original: *de tour*.

18.6 VI. Resultado Dessa Experiência

Nessa experiência, comparamos dois globos cujas superfícies estão entre si :: 3,36 : 1.

Ao calcular nos dois testes, encontramos que após o contato a massa do fluido elétrico do globo grande está para a massa do pequeno,

Pelo primeiro teste :: 3,05 : 1,00 .
Pelo segundo teste :: 3,12 : 1,00 .
[Total:] 6,17 ,

o que fornece para a razão média 3,08 : 1,00.[644]

Assim, por um cálculo análogo àquele que termina a *Seção anterior*, encontraremos a densidade [superficial de eletricidade] do pequeno globo para a densidade [superficial de eletricidade] do globo grande :: 3,36 : 3,17 :: 1,06 : 1.[645]

Assim, nessa experiência na qual as superfícies estão aproximadamente na razão de $3\frac{1}{3}$ para 1, as densidades elétricas diferem muito pouco entre si.[646,647]

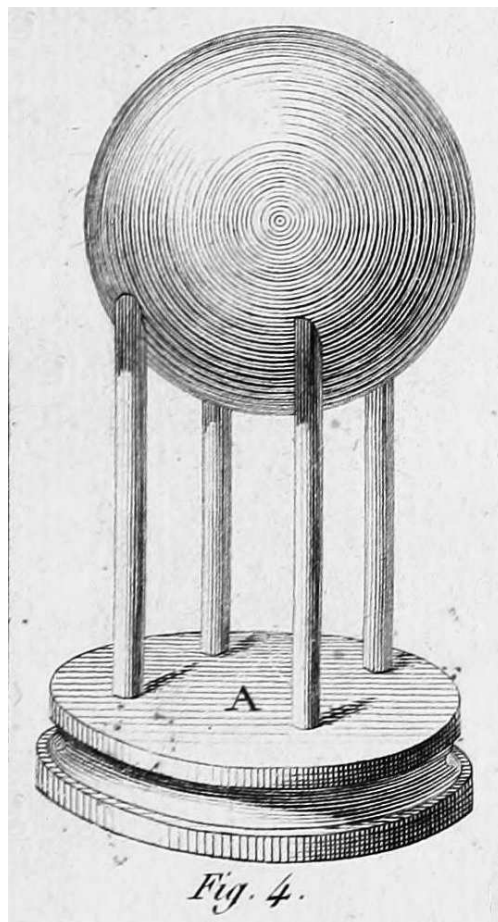
18.7 VII

Quando o globo que queremos comparar é muito pequeno em relação ao globo com o qual o colocamos em contato, nesse caso a quantidade de fluido elétrico que sobra no globo pequeno após o contato é quase imperceptível; e, a menos que o ar seja muito seco, que os suportes sejam muito dielétricos e que tenhamos carregado o pequeno globo, antes de seu contato, com uma eletricidade muito intensa, só podemos avaliar aproximadamente, pelo método anterior, de acordo com quais razões o fluido elétrico se distribui entre os dois globos. Vai aqui o método que utilizei nesse caso. Eletrizo o globo grande colocado (Figura 4) fora da balança, sobre um suporte dielétrico.

---

[644]Isto é, as razões entre a quantidade total de eletricidade ou de carga elétrica no globo grande está para a quantidade total de eletricidade ou de carga elétrica no pequeno globo assim como 3,08 está para 1.
[645]Isto é,

$$\frac{Densidade\ superficial\ de\ carga\ no\ globo\ menor}{Densidade\ superficial\ de\ carga\ no\ globo\ maior} = \frac{3,36}{3,17} = \frac{1,06}{1,0} .$$

[646][Nota de Potier:] A razão entre as superfícies $(11,5/6,25)^2$ é de $(1,84)^2 = 3,3856$; a razão entre as cargas 3,085; a razão entre as densidades seria então 1,10 e não 1,06. As Tabelas de Plana fornecem 1,11.
[647]Ver [Plana, 1845] e [Plana, 1854].

Após ter igualmente eletrizado o disco da agulha,[648] faço com que o pequeno globo toque o grande globo; apresento esse pequeno globo à agulha da balança e aproximo esse pequeno globo da agulha ao torcer o fio de suspensão, o qual escolhemos como sendo muito fino e muito sensível. Determino nessa primeira observação a distância da agulha até o pequeno globo e a força de torção que a mantém a essa distância. Em seguida tiramos o pequeno globo da balança e descarregamos sua eletricidade ao tocá-lo com o dedo. Depois o fazemos tocar vinte vezes seguidas, mais ou menos, no globo grande, descarregando a eletricidade do pequeno globo após cada contato, exceto na vigésima vez, então recolocamos o pequeno globo na balança, no mesmo ponto onde ele estava na primeira observação. Então trazemos a agulha, ao torcer o fio de suspensão, à mesma distância do globo que havia na primeira observação; observamos esse ângulo de torção e reduzimos a observação ao levar em conta, no resultado, a quantidade de eletricidade que seria perdida naturalmente apenas pelo contato com o ar, entre uma observação e outra.

18.8 VIII. Terceira Experiência

Fazemos o globo de 8 polegadas (21,66 cm), eletrizado e colocado fora da balança sobre o isolante (Figura 4), ser tocado por um pequeno globo com aproximadamente 1 polegada.[649]

[648]Isto é, após ter eletrizado o disco de papel dourado da agulha com uma carga elétrica de mesmo sinal que a carga com que o grande globo foi eletrizado.

[649]Na Seção 18.9 vai ficar claro que Coulomb está se referindo aqui a um globo com 8 polegadas de diâmetro e outro com aproximadamente 1 polegada de diâmetro.

As superfícies calculadas de acordo com as medidas mais precisas que pudemos realizar estavam aproximadamente [entre si na razão] :: 62 : 1. A agulha da balança era suspensa com um fio de prata cuja força de torção sob o mesmo ângulo era de aproximadamente a sexagésima parte da força de torção do fio de cobre de número 12 no comércio.

Teste. Estando o globo grande eletrizado, após um primeiro contato o pequeno globo colocado na balança repeliu a agulha a 44° de distância do centro desse globo, com uma força de torção de 244°.

Após vinte contatos, sendo que devemos descarregar a eletricidade após cada contato, exceto no último, a agulha era repelida a 44° com uma força de torção de 126°.

Continuando a mesma experiência, após vinte novos contatos, a agulha foi repelida a 44° com uma força [de torção] de 66°.

18.8.1 Resultado Dessa Experiência

A força de torção é proporcional à quantidade de fluido elétrico com que o pequeno globo era carregado a cada vez que o apresentamos na balança, já que ele era sempre, no instante de cada observação, colocado à mesma distância da agulha. Essa força era inicialmente de 244°, a qual se reduzia a 126° após vinte contatos; assim a diminuição de eletricidade ocasionada por esses vinte contatos era de $244 - 126 = 118$.

Dessa forma 118° representa a perda ocasionada pelos vinte contatos; assim, para determinar a quantidade de eletricidade que o pequeno globo adquiria em um contato médio, é necessário dividir 118 por 20, o que fornecerá aproximadamente a quantidade de eletricidade que o pequeno globo adquiria em um contato médio, ou seja, ao redor do décimo contato. Porém, nesse caso, a força de torção medida na balança devia ser aproximadamente a média entre as forças das duas observações, ou seja, ela devia ser igual a

$$\frac{244 + 126}{2} = 185 \ .$$

Assim, a razão entre a quantidade de eletricidade do globo grande e aquela do pequeno, após um contato, será

$$:: 185 : \frac{118}{20} = 31,4 \ ;$$

porém é necessário observar que de uma observação até a outra, no intervalo de tempo necessário para os vinte contatos, a eletricidade do globo grande diminuía aproximadamente de 1/8 ou de 4/32. Dessa forma, como acabamos de encontrar a diminuição ocasionada por cada contato como sendo de $\frac{1{,}0}{31{,}4}$, resulta que a diminuição 4/32 ocasionada pelo contato com o ar era aproximadamente equivalente a quatro contatos. Assim, na redução das observações, é necessário contar com vinte e quatro contatos ao invés de vinte, o que fornecerá, para a razão corrigida entre as quantidades de eletricidade do globo grande e do globo pequeno,

$$185 : \frac{118}{24} :: 37,6 : 1,00 \ .$$

Porém, como provamos que a eletricidade é espalhada unicamente na superfície dos corpos e como a razão entre as superfícies é :: 62 : 1, resulta de um cálculo análogo àquele do final da Seção 18.4 que a densidade [superficial de eletricidade] do globo pequeno está para a densidade [superficial de eletricidade] do globo grande :: 62 : 37,6 :: 1,65 : 1,00.

18.9 IX

Para completar essa pesquisa, fiz com que o globo de 8 polegadas [21,66 cm] de diâmetro fosse tocado alternadamente por um globo de 1 polegada [2,71 cm] de diâmetro, e por um pequeno globo cujo diâmetro, calculado de acordo com seu peso, era de apenas 2 linhas [0,45 cm]. Ao colocar sucessivamente esses dois globos na balança, encontrei que a densidade do fluido elétrico sobre a superfície do globo de 2 linhas de diâmetro era maior do que sobre a superfície do globo de 1 polegada, mas que ela não era exatamente o dobro da densidade sobre a superfície do globo de 8 polegadas de diâmetro. Nessa experiência, o diâmetro do globo de 8 polegadas está para o diâmetro do globo de 2 linhas :: 48 : 1; consequentemente, as superfícies estão [entre si] :: 2304 : 1. As densidades [superficiais de eletricidade] sobre as superfícies estão [entre si] do pequeno para o grande :: 2 : 1. Assim, essa razão de 2 para 1 pode ser considerada como o limite da razão entre a densidade elétrica média de dois globos que separamos após tê-los colocado em contato.

Na sequência dessa Memória veremos que, quando fazemos a superfície de um globo ser tocada por um pequeno plano [condutor], esse pequeno plano, no instante de sua separação, adquire uma quantidade de eletricidade dobrada em relação à densidade da superfície do globo que ele acabou de tocar.[650] O disco de papel dourado que utilizamos para essa experiência possui apenas 1/18 de linha de espessura [0,0126 cm]; é fácil de perceber a analogia entre esses dois efeitos, sendo que essa analogia será demonstrada na sequência pela teoria.

18.10 X. Observação

Poderíamos calcular rigorosamente a quantidade de eletricidade que se divide em cada contato entre o globo de 8 polegadas de diâmetro e aquele de 1 polegada que acabamos (na Seção 18.8) de determinar por aproximação ao considerar as quantidades médias.

Seja A a quantidade de eletricidade que o globo de 8 polegadas de diâmetro possui em sua superfície, suponhamos que o globo de 1 polegada, no instante do contato, lhe retire uma porção A/n, [então] a quantidade de fluido elétrico que restará no globo grande após o primeiro contato será

$$\left(A - \frac{A}{n}\right) = \frac{n-1}{n}A \ ;$$

no segundo contato ela será

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 A \ ,$$

e no vigésimo contato ela será

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{20} A \ .$$

Mas acabamos de ver que era preciso contar com vinte e quatro contatos ao invés de vinte, devido à quantidade de eletricidade perdida pelo contato com o ar de uma observação para outra. Assim, se calcularmos agora da primeira à terceira observação, é necessário contar

[650] Essa é uma suposição errônea de Coulomb. O pequeno plano condutor adquire a mesma quantidade de eletricidade que havia em uma área igual à desse plano na superfície do globo no ponto que acabou de tocar.

vinte e quatro contatos da primeira à segunda [observação], e aproximadamente vinte e cinco [contatos] da segunda à terceira [observação], já que ela durou um pouco mais que a primeira. Assim, da primeira até o fim da terceira observação, é preciso contar quarenta e nove contatos, e como temos na primeira observação $A = 244$, que se reduz a 66 no final da terceira observação, teremos a equação

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{49} \cdot 244 = 66$$

ou

$$\frac{n}{n-1} = \left(\frac{244}{66}\right)^{1/49} = 1,027 \ ;$$

assim

$$n = \frac{1027}{27} = 38,04 \ .$$

Porém é necessário notar que, sendo A a quantidade [inicial] de fluido elétrico do globo grande, ela foi reduzida pelo contato para $A\frac{n-1}{n}$ ao mesmo tempo em que o pequeno globo adquiriu uma porção A/n. Assim, as quantidades de fluido elétrico compartilhadas entre os dois globos estão entre si

$$:: n-1 : 1 :: 37,04 : 1 \ ;$$

e estando [a razão entre] as superfícies :: 62 : 1, a densidade do fluido elétrico sobre a superfície do pequeno globo estará para a densidade do fluido sobre a superfície do globo grande

$$:: \frac{62,00}{37,04} : 1 \ ,$$

[ou seja,] :: 1,67 : 1. Havíamos encontrado por aproximação para essa razão [o valor] 1,65 : 1, o que não difere perceptivelmente desse resultado.

18.11 XI. Resultado Geral

Ao pegar um valor médio entre os resultados de várias experiências ou então pelo método anterior, ou ainda ao fazer com que os dois globos sejam tocados alternadamente por um pequeno disco de 5 linhas,[651] assim como explicamos (na Seção 18.3), formamos a seguinte Tabela, que representa a maneira pela qual o fluido elétrico de distribui entre dois globos com diâmetros diferentes:[652]

Razão entre os raios	Razão entre as superfícies	Razão entre as densidades elétricas do pequeno e do grande globo
1	1	1
2	4	1,08
4	16	1,30
8	64	1,65
∞	∞	2,00

[651]Esse disco condutor está preso a um suporte isolante, sendo o plano de prova utilizado para coletar cargas. Ele possui 5 linhas de diâmetro, isto é, 1,13 cm.

[652]A Seção 19.2 compara as observações de Coulomb e os cálculos teóricos de Poisson feitos 20 anos após Coulomb.

É necessário observar que essa Tabela indica apenas a razão entre as densidades do fluido elétrico quando, após haver separado os dois globos, o fluido elétrico se distribui uniformemente sobre suas superfícies. Veremos mais tarde que durante todo o tempo no qual os globos estão reunidos, o fluido elétrico está longe de se espalhar uniformemente [sobre suas superfícies].

18.12 XII. *Sobre a Densidade do Fluido Elétrico nos Diferentes Pontos de Dois Globos em Contato*

Após haver comparado entre si dois globos com diâmetros diferentes para determinar a quantidade de eletricidade que eles adquirem quando os colocamos em contato, procurei determinar de acordo com qual lei o fluido elétrico se distribui, durante o tempo do contato, sobre os pontos diferentes dos globos; utilizei aqui a pequena balança elétrica na qual a agulha é suspensa por um fio de prata bem flexível. Essa balança está descrita na minha Primeira Memória sobre eletricidade, impressa no Volume de 1784 da Academia.[653] Empregamos, para determinar a densidade elétrica de diferentes pontos dos globos, um pequeno disco de papel dourado (Figura 3), de 4 a 5 linhas de diâmetro [0,90 a 1,13 cm], suspenso por um fio de goma-laca *cde*, fixado em um cilindro *cb* de vidro ou de madeira seca no forno e revestido de um verniz dielétrico.[654] Esse cilindro entra e se fixa com um parafuso no buraco *b* da pinça *Ab*, que é colocada sobre a tampa da balança. Toda a operação, quando queremos comparar [a quantidade de eletricidade localizada em] dois pontos, consiste em tocar o disco *e* contra o primeiro ponto; em seguida apresentamos na balança esse disco [de papel *e*] ao disco da agulha que tivemos o cuidado de eletrizar previamente.[655] Ao torcer o fio de suspensão, trazemos a agulha até uma distância dada em relação a esse disco [*e*]. Observamos com cuidado o ponto correspondente da agulha e o ângulo de torção do fio medido pelo micrômetro e pela distância [angular] da agulha até o ponto *o* no qual é nula a torção. Em seguida tocamos o segundo ponto que queremos comparar com o mesmo disco *e*. Ao colocá-lo na balança, trazemos a agulha pelo micrômetro até a mesma distância [angular] que havia na primeira operação: medimos o ângulo de torção. Então tocamos novamente o primeiro ponto observado e, ao trazer a agulha de volta sempre à mesma distância, obtemos a variação da eletricidade entre a primeira e a terceira experiência. Assim, se tomarmos o cuidado de ter entre cada observação o mesmo intervalo de tempo, será suficiente, para comparar a densidade do primeiro ponto com aquela do segundo, de assumir para o primeiro ponto uma quantidade média entre as forças de torção encontradas na primeira e na terceira observação; essa quantidade média fornecerá a densidade do primeiro ponto no instante da segunda observação. Assim, ao compará-la com a força de torção encontrada na segunda observação, teremos a razão entre a densidade elétrica do primeiro e do segundo ponto.[656]

[653]Essa Memória está traduzida no Capítulo 10.

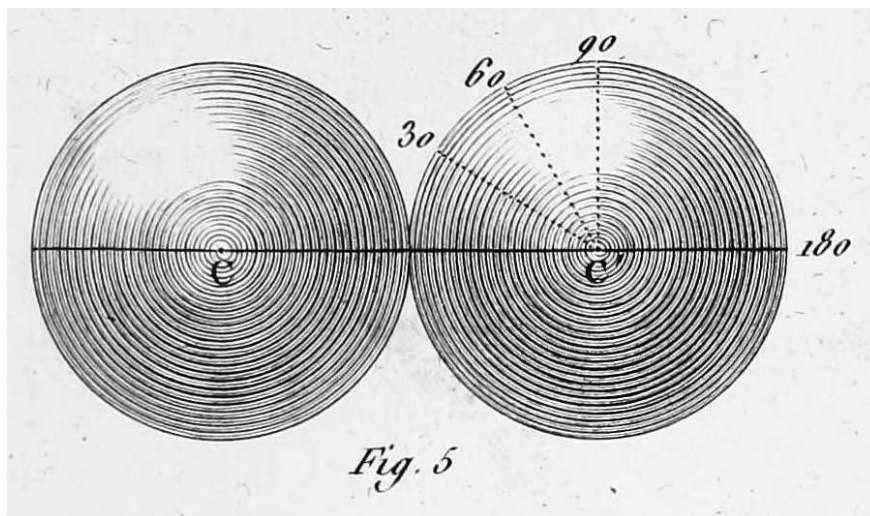
[654]Coulomb vai utilizar o plano de prova representado na Figura 3 para coletar a carga elétrica em diferentes pontos da superfície de um globo eletrizado, ver as Notas de rodapé 602 e 627 nas páginas 289 e 305, respectivamente.

[655]Coulomb eletriza o disco da agulha com uma carga de mesmo sinal que aquela coletada pelo pequeno disco de papel do plano de prova de tal forma que esses dois discos se repelem quando são colocados próximos um do outro.

[656]Todo esse procedimento está ilustrado na Seção 19.3.

18.13 XIII. Quarta Experiência

Os dois globos são iguais e possuem, cada um, 8 polegadas de diâmetro [21,66 cm]; comparamos o ponto colocado a 90° do contato com os pontos colocados a 30°, 60° e 180°.[657]

Primeiro teste. O ponto colocado a 30° do contato entre os dois globos comparado com o ponto colocado a 90° (Figura 5).[658]

Tendo tocado um dos globos com o pequeno disco de papel dourado, a 30° do contato, a agulha foi observada a 20° de distância do pequeno disco colocado na balança; a força de torção ou a força repulsiva que repelia a agulha era de 7°.

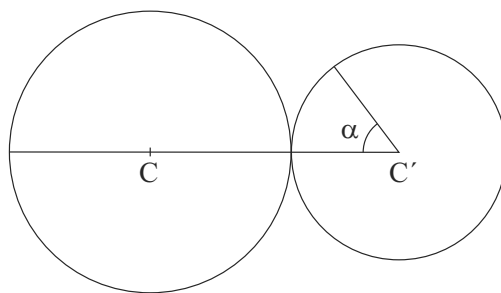
Tendo tocado a 90°, com todo o restante como na observação anterior, a força repulsiva foi de 31°.

Tocado novamente a 30°, a força repulsiva foi de 6°.

Tocado novamente a 90°, a força repulsiva foi de 27°.

Segundo teste. Comparamos o ponto colocado a 60° do contato com aquele que está a 90°; a distância da agulha ao pequeno disco e, quando ele é colocado na balança, é sempre de 22°.

Tocado a 60°, a força repulsiva é de 21°.

[657]Sejam dois círculos com centros C e C' tocando-se em apenas um ponto. Os ângulos α indicados por Coulomb são ilustrados na Figura dessa Nota de rodapé, a saber, $\alpha = 30°$, $60°$, $90°$ e $180°$:

[658]Uma ilustração do plano de prova tocando o ponto colocado a 90° do ponto de contato encontra-se na Figura 19.5 da Seção 19.3.

Tocado a 90°, a força repulsiva é de 23°.
Tocado a 60°, a força repulsiva é de 17°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 21°.

Terceiro teste. Comparamos o ponto colocado a 90° do contato com aquele colocado a 180°. A agulha e o disco *e*, colocados na balança, estão a 25° entre si.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 20°.
Tocado a 180°, a força repulsiva é de 19°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 17°.
Tocado a 180°, a força repulsiva é de 18°.

Quarto teste. Quando tocamos [com o disco *e* de papel dourado] um dos globos a 20° do ponto de contato e abaixo [desse valor], apresentando em seguida na balança o pequeno disco *e* que tocou [esse ponto do globo], notamos que nesse caso a ação é nula ou ao menos imperceptível sobre a agulha, de maneira que podemos, nos dois globos em contato, considerar a eletricidade como sendo nula desde o ponto de contato até a 20° desse ponto.

18.14 XIV. Quinta Experiência

Colocamos dois globos em contato sendo que um deles tem 8 polegadas de diâmetro e o outro 4 polegadas [21,66 e 10,83 cm], e buscamos determinar como o fluido elétrico se distribui sobre a superfície dos dois globos ao comparar, como na experiência anterior, o ponto a 90° do contato com todos os outros pontos.

Primeiro teste, globo pequeno. Ao comparar sobre o pequeno globo o ponto a 30° do contato com aquele a 90°, a densidade no ponto 30° era quase imperceptível, e não podemos avaliá-la além da décima oitava parte da densidade em 90°.

Segundo teste, globo pequeno. Comparamos o ponto colocado a 90° com aquele de 60°.
Tocado a 60°, a força repulsiva é de 18°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 28°.
Tocado a 60°, a força repulsiva é de 18°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 24°.

Terceiro teste, globo pequeno. Comparamos o ponto a 90° com aquele a 180°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 21°.
Tocado a 180°, a força repulsiva é de 28°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 20°.
Tocado a 180°, a força repulsiva é de 26°.

Quarto teste, globo grande. Ao tocar o globo grande a 30° do contato e a 90°.
Tocado a 30°, a força repulsiva é de 16°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 18°.
Tocado a 30°, a força repulsiva é de 14°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 15°.

Quinto teste, globo grande. A densidade é visivelmente a mesma a 90° e a 180° do ponto de contato; ela é quase imperceptível até 6° ou 7° desse ponto. Ao tocar alternadamente o

ponto a 90° dos dois globos, encontramos a densidade do pequeno globo como sendo maior do que aquela do globo grande nesses pontos, na razão de 1,25 para 1.

18.15 XV. Sexta Experiência

Colocamos em contato um globo de 8 polegadas e um globo de 2 polegadas.

Primeiro teste, globo pequeno. Tocado a 90° e a 180°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 27°.
Tocado a 180°, a força repulsiva é de 35°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 22°.
Tocado a 180°, a força repulsiva é de 29°.
Tocado a 90°, a força repulsiva é de 19°.

18.16 XVI. Resultado das Três Experiências Anteriores

Será fácil determinar pelo cálculo, de acordo com essas experiências, a razão entre as densidades sobre os pontos diferentes dos globos em contato: consideremos, por exemplo, a quarta experiência, na qual os globos são iguais. Encontramos (*primeiro teste*) que na primeira observação a força repulsiva do ponto a 30° é representada por 7°; na terceira observação, ela é representada por 6°. Assim, a força média no [instante] intermediário da segunda observação, no qual determinamos a densidade do ponto a 90°, era de 6°30′; porém, no mesmo instante, encontrou-se como sendo de 31° a densidade ou força repulsiva do ponto a 90° do contato. Assim, dividindo 31° por 6°30′, encontraremos, para exprimir a razão da densidade a 90° para aquela a 30°, o número 4,77.

Ao comparar pelo mesmo método a segunda, a terceira e a quarta observação, obteremos para a mesma razão [o valor de] 4,83.

Se considerarmos um valor médio entre esses dois resultados, que diferem muito pouco entre si, teremos para a razão média [o valor de] 4,80.

Encontraremos pelo mesmo método, de acordo com o segundo teste, para a razão média da densidade elétrica dos pontos a 60° e a 90° do ponto de contato, [o valor de] 1,25.

No terceiro teste da mesma experiência para os pontos a 90° e a 180°, encontraremos a razão média das densidades medida por 0,95.

Assim a densidade é muito pequena até 30°; ela aumenta rapidamente até 60°, aumenta pouco de 60° a 90°, sendo quase uniforme de 90° até 180°.

De acordo com o mesmo cálculo, encontraremos que (*quinta experiência*), quando um dos globos tem um diâmetro de apenas metade do outro globo, a densidade é quase nula no pequeno globo até 30°.

[Encontraremos ainda] que o ponto a 90°, comparado com aquele a 60°, fornece para a razão média das densidades aproximadamente [o valor de] 1,70.

[Encontraremos também] que o ponto a 90°, comparado com o ponto a 180°, fornece para a razão das densidades a quantidade 0,75, de maneira que ela aumenta de 60° a 90° na razão de 10 para 17, e de 90° a 180° na razão de 75 para 100.

O mesmo cálculo vai fornecer que (*sexta experiência*), quando colocamos dois globos em contato, cujos diâmetros estão [entre si] como 4 para 1, a densidade do pequeno globo desde 90° até 180° aumenta na razão de 100 para 1,43.[659]

18.17 XVII

Resulta dessas três experiências, que quanto maior for a desigualdade [de tamanho] entre os globos, mais a densidade vai variar sobre o pequeno globo, desde o ponto de contato até a 180° desse ponto, e mais ela se aproxima da uniformidade sobre o globo grande, crescendo rapidamente desde o ponto de contato, onde ela é nula, até a 7° ou 8° desse ponto, sendo uniforme sobre o restante do globo. Assim, por exemplo, quando colocamos um globo de 8 polegadas em contato com um globo de 2 polegadas, encontramos que a densidade era imperceptível no pequeno globo desde o ponto de contato até a 30° desse ponto; que a 45° do ponto de contato ela era aproximadamente um quarto da densidade a 90°; e que de 90° até a 180° ela crescia na razão de 10 para 14. Já no globo de 8 polegadas, ao contrário, a densidade era nula até a 4° ou 5° do ponto de contato; ela crescia em seguida rapidamente, sendo que desde 30° até a 180° ela era quase uniforme.

Veremos na Segunda Parte dessa Memória que esses resultados são indicados pela teoria, ao calcular a ação, seja repulsiva, seja atrativa do fluido elétrico, de acordo com a lei da razão inversa do quadrado das distâncias.

18.18 XVIII. Segunda Parte. *Estudo Teórico para Determinar a Distribuição do Fluido Elétrico sobre a Superfície de Dois Globos em Contato, e para Determinar Suas Densidades Médias, Quando, Estando os Dois Globos Separados, Eles Deixam de Agir Um sobre o Outro*

As experiências relatadas na Primeira Parte dessa Memória foram realizadas antes de tentar calcular, de acordo com a teoria, a distribuição do fluido elétrico sobre a superfície de dois globos em contato. Quando tentei calcular essa distribuição de acordo com a lei da razão inversa do quadrado das distâncias, percebi que me faltavam alguns fatos em relação aos quais o cálculo poderia ser aplicado diretamente; fui então obrigado a relatar nessa Segunda Parte, na medida em que tive necessidade, o resultado de várias experiências novas feitas de acordo com os procedimentos indicados na Primeira Parte.

Vimos em nossa Quarta Memória (Volume de 1786),[660] que, quando um corpo condutor era carregado de eletricidade, o fluido elétrico não penetrava no interior do corpo, mas se distribuía apenas sobre a superfície. Disso resulta que, quando fazemos um corpo sólido ser tocado por uma superfície tendo o mesmo formato que o sólido, não importando quão

[659] A Seção 19.3 apresenta uma comparação dos valores medidos por Coulomb com os valores calculados por Poisson.

[660] Essa Memória está traduzida no Capítulo 16.

pequena seja a espessura dessa superfície, ela vai adquirir, ao ser colocada em contato com o corpo por pontos semelhantes, a metade da eletricidade desse corpo.[661]

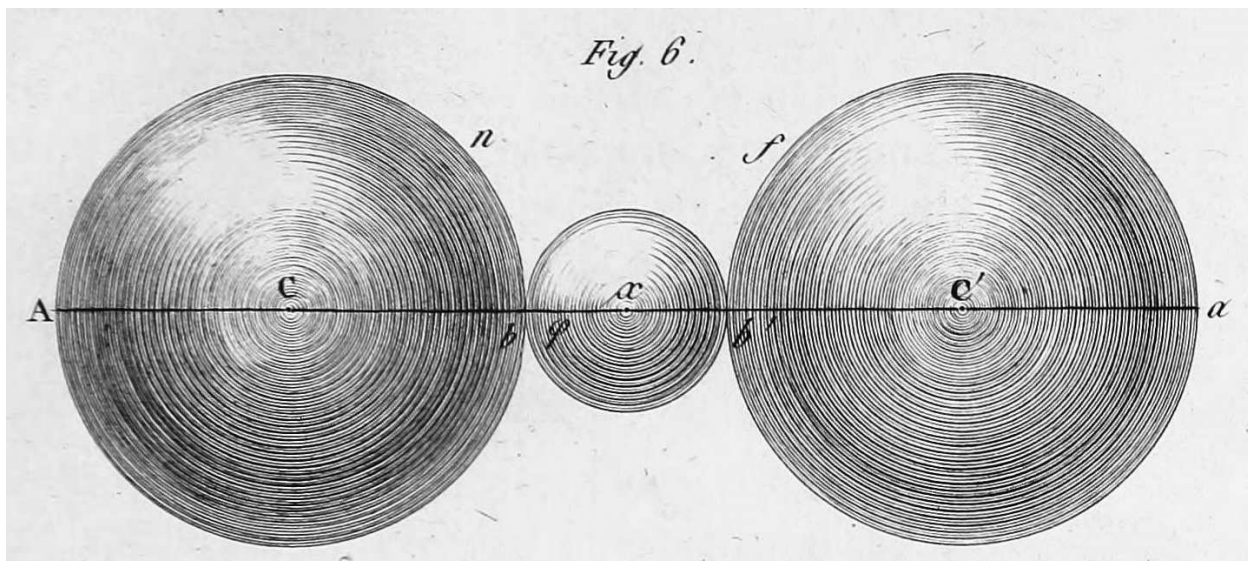
Esse último fenômeno já havia sido percebido por diversos autores ao se utilizarem de eletrômetros comuns. Podemos verificar isso de uma maneira exata ao colocar, em um dia muito seco, um corpo sólido em nossa balança apoiado sobre um suporte bem dielétrico. Se esse corpo for tocado, após ter sido eletrizado, por uma superfície que possui exatamente o mesmo formato, tendo o cuidado de colocar em contato os dois corpos em uma posição semelhante,[662] e observando, ao trazer a agulha de volta ao mesmo ponto, a torção do micrômetro antes e após o contato, encontraremos que a superfície retirou do corpo sólido exatamente a metade de sua eletricidade. Caso o ar fosse impenetrável à eletricidade, caso a superfície do corpo mais bem polido não fosse um conjunto de pequenas rugosidades formando entre suas moléculas regiões vazias provavelmente infinitamente maiores que o volume dos pequenos sólidos, o fluido elétrico só teria sobre o corpo, assim como a teoria o indica, uma espessura infinitamente fina. Porém, como não existe, na ordem física, superfície perfeita e como o ar não é impenetrável à eletricidade, o fluido elétrico, em sua distribuição, forma ao redor do corpo uma camada de uma certa espessura, a qual tentaremos determinar em uma outra Memória, espessura essa que varia de acordo com a densidade do fluido elétrico e com o estado do ar, mas que, em geral, é muito pequena, principalmente nos dias muito secos, para que seja necessário levá-la em consideração em todas as questões nas quais buscamos determinar a distribuição do fluido elétrico sobre as superfícies não pontudas.

18.19 XIX

Para ter uma primeira ideia da maneira pela qual o fluido elétrico se distribui entre globos [de tamanhos] diferentes, coloquemos (Figura 6) três globos em contato ao longo de uma linha reta; passando o eixo Aa pelos pontos de contato, suponhamos que sejam [de tamanhos] iguais os dois globos das extremidades.

[661] Novamente há aqui um erro de Coulomb, como havia sido apontado na Nota de rodapé 650 na página 313, já que essa superfície vai adquirir a mesma quantidade de eletricidade que havia na área de mesmo tamanho do corpo eletrizado.

Por "pontos semelhantes" ou "homólogos" (no original: *points homologues*), Coulomb quer dizer pontos similares, ou seja, pontos equivalentes.

[662] Ou seja, em uma posição similar, homóloga ou equivalente.

Qualquer que seja a maneira pela qual o fluido elétrico se distribua entre os três globos, como os dois globos A e a são semelhantes e estão colocados de forma semelhante em relação ao globo x, é claro que ambos conterão uma quantidade igual de fluido elétrico. Esse fluido elétrico, como indica a teoria, será distribuído desigualmente sobre a superfície do sistema de três corpos; ele será comprimido na direção dos pontos da superfície vizinhos de A e de a, sendo nulo nos pontos de contato b e b'.

Contudo, suponhamos que o fluido elétrico de cada globo esteja distribuído uniformemente sobre a superfície desses globos, e que ele só possa escapar pelo ponto de contato. Com essa suposição ele deverá nesse ponto ter uma razão entre a densidade dos globos das extremidades C e C' e [a densidade] do globo x central, tal que haja equilíbrio entre a ação do fluido elétrico do globo C sobre o ponto de contato na direção Cb, e [a ação] dos dois outros globos C' e x na direção oposta.

Seja R o raio dos globos A e a; seja r o raio do globo do meio, cujo centro está em x; seja D a densidade do fluido elétrico que supomos estar uniformemente distribuída sobre os dois globos A e a; seja δ a densidade do fluido distribuída uniformemente sobre a superfície do globo do meio, cujo centro é x.[663]

[Nesse caso,] a ação do globo A sobre o ponto de contato b que está colocado na superfície desse corpo será igual a D.[664]

A ação contrária do globo a sobre o mesmo ponto b, que está afastado de sua superfície

[663] Seja Q a quantidade total de carga do globo grande de raio R da extremidade esquerda com centro em C e q a quantidade total de carga do pequeno globo do meio com raio r e centro em x. Suas densidades superficiais de carga D e δ, supondo-as distribuídas uniformemente sobre cada um dos globos, são então dadas por, respectivamente: $D = Q/(4\pi R^2)$ e $\delta = q/(4\pi r^2)$.

[664] Seja a força F entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas por uma distância x escrita como $F = kq_1q_2/x^2$, onde k é uma constante de proporcionalidade. No Sistema Internacional de Unidades temos $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, onde $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\ F/m = 8,85 \times 10^{-12}\ C/(Vm)$ é uma constante chamada de permissividade do vácuo. No Sistema CGS temos $k = 1$ adimensional. Uma casca esférica de raio R uniformemente eletrizada com uma carga total Q tem uma densidade superficial de carga D dada por $D = Q/(4\pi R^2)$.

A força F exercida por essa casca esférica uniformemente eletrizada sobre uma carga pontual q_1 localizada a uma distância r_1 do centro da casca aponta ao longo da reta unindo q_1 ao centro da casca, sendo dada por (ver a Nota de rodapé 455 na página 225):

$$F = 0 \qquad \text{se } r_1 < R ,$$

pela quantidade $2r$, será igual a[665]

$$2DR^2 : (R+2r)^2 \ ;$$

a ação do globo x sobre o ponto b, que está na sua superfície, será igual a δ.[666] Assim, para que o fluido elétrico não passe de um globo para o outro, e para que haja equilíbrio no ponto de contato, é necessário que a ação do globo C ao longo de Cb seja igual à ação dos dois outros globos sobre o ponto b ao longo da direção oposta. Dessa forma teremos a fórmula[667]

$$D\left[1 - \frac{2R^2}{(R+2r)^2}\right] = \delta \ .$$

Ao examinar essa fórmula, encontramos que a densidade δ do fluido elétrico do globo do centro é negativa, caso $2R^2/(R+2r)^2$ seja maior que a unidade; ela é nula quando essa quantidade é igual à unidade, ou seja, $\delta = 0$ quando

$$R + 2r = R\sqrt{2} = 1,41R \ ,$$

ou quando $R = 5r$;[668] e que, enfim, δ será positivo todas as vezes em que R for menor do que $5r$.

Embora essa primeira fórmula não seja fundamentada em uma teoria rigorosa, mas somente aproximada, é bom ver o quanto ela se afasta da verdade ao compará-la com a experiência.

18.20 XX. Sétima Experiência

Os detalhes que explicamos ao relatar as experiências anteriores indicam suficientemente as correções e precauções que devem ser utilizadas. Para não aumentar inutilmente essa

---

$$F = \frac{kq_1Q}{2R^2} = \frac{kq_1 4\pi DR^2}{2R^2} = 2\pi kq_1 D \qquad \text{se } r_1 = R \ ,$$
$$F = \frac{kq_1Q}{r_1^2} = \frac{kq_1 4\pi DR^2}{r_1^2} = 4\pi kq_1 D\frac{R^2}{r_1^2} \qquad \text{se } r_1 > R \ .$$

Logo, a força por unidade de carga quando a carga teste q_1 está localizada na superfície é então dada por $F/q_1 = 2\pi kD$, ao invés da expressão D mencionada por Coulomb. De qualquer forma, pode-se dizer que a força é proporcional à densidade superficial de carga D. Como as medidas que Coulomb obteve na Primeira Parte desse trabalho eram apenas de razões de densidades, é irrelevante considerar ou não o fator 2π.

Nessa Quinta Memória Coulomb não vai explicitar esse fator 2π, mas ele vai aparecer em sua Sexta Memória, ver a Nota de rodapé 714 na página 353, assim como a Seção 21.2 na página 418.

[665] Vou seguir aqui a nomenclatura da Nota de rodapé 664. Nesse caso a força por unidade de carga, F/q_1, seria dada por:

$$\frac{F}{q_1} = \frac{kQ}{r_1^2} = \frac{kQ}{(R+2r)^2} = \frac{D4\pi kR^2}{(R+2r)^2} = 2\pi \cdot \frac{2DkR^2}{(R+2r)^2} \ . \qquad (18.1)$$

Supondo $k = 1$, vem que novamente Coulomb está deixando de lado o fator constante 2π, assim como observado na Nota de rodapé 664.

[666] Por um lapso no original apareceu aqui d ao invés de δ. Além disso, assim como na Nota de rodapé 664, a força por unidade de carga aqui deveria ser escrita por Coulomb como sendo dada por $2\pi\delta$ em vez de δ, supondo $k = 1$. Nessa Quinta Memória Coulomb está deixando de lado o fator 2π em todas as equações.

[667] O fator 2π que foi desprezado nas expressões anteriores das ações dos três globos é irrelevante na próxima equação, já que ele é comum aos três termos e pode ser cancelado.

[668] O valor exato que vem dessa equação é $R = 2r/(\sqrt{2}-1) = 4,828r$. Coulomb está aproximando esse valor para $R \approx 5r$.

Memória, vamos suprimir na sequência os detalhes das experiências, a menos que sejamos obrigados a algumas operações novas que ainda não foram indicadas.

Quando coloquei (Figura 6) entre dois corpos eletrizados A e a um pequeno globo cujo diâmetro era menor do que a sexta parte dos diâmetros dos globos A e a, e quando apresentei em seguida esse pequeno globo a uma balança de torção muito sensível, o pequeno globo não me forneceu qualquer sinal de eletricidade; porém, não importando quão pequeno fosse esse globo, não encontrei que ele tivesse adquirido uma eletricidade negativa, como indicava a teoria.

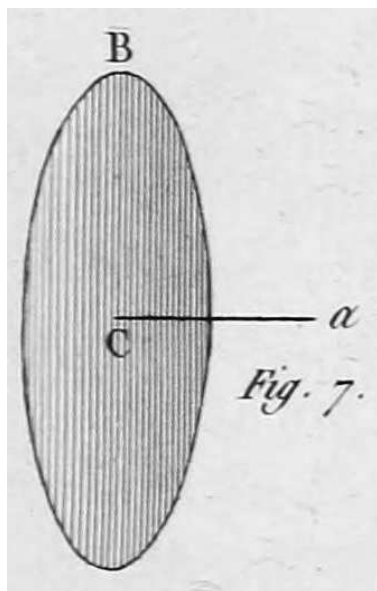
18.21 XXI. Explicação Dessa Experiência

A diferença encontrada aqui entre a experiência e a teoria se deve a que, quando o globo intermediário é muito pequeno, a ação dos globos grandes um sobre o outro é muito considerável; [devendo-se também a] que no ponto de contato, assim como nas partes vizinhas a esse ponto, a densidade elétrica dos globos grandes é quase nula. Assim, caso, para determinar a ação do globo C' sobre o ponto b, dividirmos a superfície em duas partes, uma parte formada por um pequeno círculo cujo diâmetro é aproximadamente $b'f$,[669] sobre o qual a densidade é nula ou muito pequena; a outra [parte, formada] pelo restante da superfície do globo, no qual supomos a densidade uniforme e igual a D, a ação do globo a sobre o ponto b não será mais medida por $2DR^2/(R+2r^2)$, a qual representa a ação total da superfície de um globo coberto de fluido elétrico, cuja densidade seria D, mas [será medida] apenas por essa quantidade, diminuída da ação da superfície cujo diâmetro é $b'f$, superfície essa que pode ser considerada como um plano circular, caso $b'f$ não seja muito estendido. Agora, se determinarmos a ação de uma superfície circular BC (Figura 7), na qual todos os pontos agem sobre o ponto a, ao longo da direção Ca, com uma força em razão inversa do quadrado das distâncias, denominando $CB = R'$, $Ca = a$, D a densidade da superfície, encontraremos para a ação do círculo sobre o ponto a [o seguinte valor],[670,671]

$$D\left[1-\frac{a}{(a^2+R'^2)^{1/2}}\right] .$$

[669] Coulomb parece estar se referindo aqui a um pequeno círculo cujo *raio* seja aproximadamente $b'f$, ver a Figura 6.

[670] [Nota de Potier:] Coulomb negligencia aqui, assim como anteriormente, o fator 2π.

[671] Uma discussão sobre esse fator 2π encontra-se na Nota de rodapé 664 na página 321. A fórmula apresentada a seguir para a ação de um disco eletrizado de raio R' atuando sobre uma partícula eletrizada colocada a uma distância a do centro do disco, ao longo de seu eixo, assume que o disco esteja uniformemente eletrizado com uma densidade superficial de carga D que tem o mesmo valor em todos os pontos do disco.

Assim a ação do globo C' sobre o ponto b será

$$\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} - D + \frac{Da}{(a^2+R'^2)^{1/2}} \ .$$

Consequentemente, a equação que exprime o equilíbrio da ação para o ponto b será dada por

$$D\left[2 - \frac{2R^2}{(R+2r)^2} - \frac{a}{(a^2+R'^2)^{1/2}}\right] = \delta \ ,$$

no caso em que o pequeno globo possui um diâmetro muito pequeno em relação aos globos das extremidades. Como $a = 2r$, caso $2r$ seja desprezível em relação a R, teremos δ muito pequeno e não negativo. Assim, não importando o quão pequeno seja o globo x colocado entre os globos A e a, sua eletricidade será nula ou imperceptível, mas nunca será negativa, ao supor os dois globos A e a eletrizados positivamente. Dessa forma a teoria e a experiência estão de acordo aqui.

18.22 XXII. *Três Globos Iguais em Contato ao Longo de uma Linha Reta*

18.22.1 Oitava Experiência

Coloquei[672] em contato três globos iguais de 2 polegadas [5,41 cm] de diâmetro, colocados em linha reta, como na Figura 6. Um desses corpos, suspenso pela pinça (Figura 3), era colocado sucessivamente entre os dois corpos C e C', e na extremidade desses dois corpos que eram reunidos; a cada operação o apresentávamos na grande balança, ao trazer a agulha de

[672]No artigo original de Coulomb as Seções daqui para a frente foram numeradas de forma errada. Ou seja, essa Seção apareceu como Seção XXI, assim como a Seção anterior, [Coulomb, 1789, págs. 446 e 447]. Corrigi essa numeração, assim como foi feito por Potier, [Potier, 1884, págs. 208 e 210].

volta sempre à mesma distância do globo.[673] Encontramos que quando o globo era colocado entre os dois outros, ele adquiria uma quantidade de eletricidade menor do que aquela que ele adquiria quando ele era colocado nas extremidades na razão de 1 para 1,34. Esse resultado é um valor médio de mais de vinte operações feitas sucessivamente em intervalos iguais de tempo, para poder levar em conta a quantidade de eletricidade perdida [para o ambiente] de uma observação a outra.

18.23 **XXIII.** *Explicação Dessa Experiência*

Consideremos novamente a fórmula da Seção 18.16,

$$D\left[1-\frac{2R^2}{(R+2r)^2}\right]=\delta \ ,$$

na qual δ representa a densidade [superficial de eletricidade] do globo colocado entre os outros dois globos, sendo D a densidade dos globos das extremidades. Como $R = r$, teremos

$$\delta = D\left(1-\frac{2}{9}\right)=\frac{7}{9}D \ ,$$

de onde

$$D = 1,29\delta \ ;$$

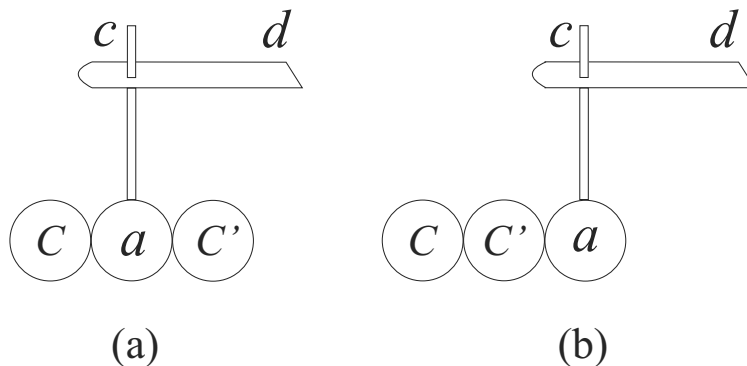
porém a experiência acaba de nos fornecer

$$D = 1,34\delta \ ,$$

valor esse que difere apenas, como vemos, de 1/27 da razão fornecida pela teoria. Vemos que aqui a ação do globo C' sobre o ponto b é muito próxima de

$$\frac{2R^2}{(R+2r)^2} \ ,$$

[673]Uma ilustração dessa montagem encontra-se na Figura dessa Nota de rodapé. O globo a está preso a um cilindro isolante ac fixado em um suporte cd. Em (a) esse globo está entre os globos C e C' de mesmo diâmetro que ele, enquanto que em (b) temos a na extremidade. A pinça dca é levada para a balança após cada um desses contatos:

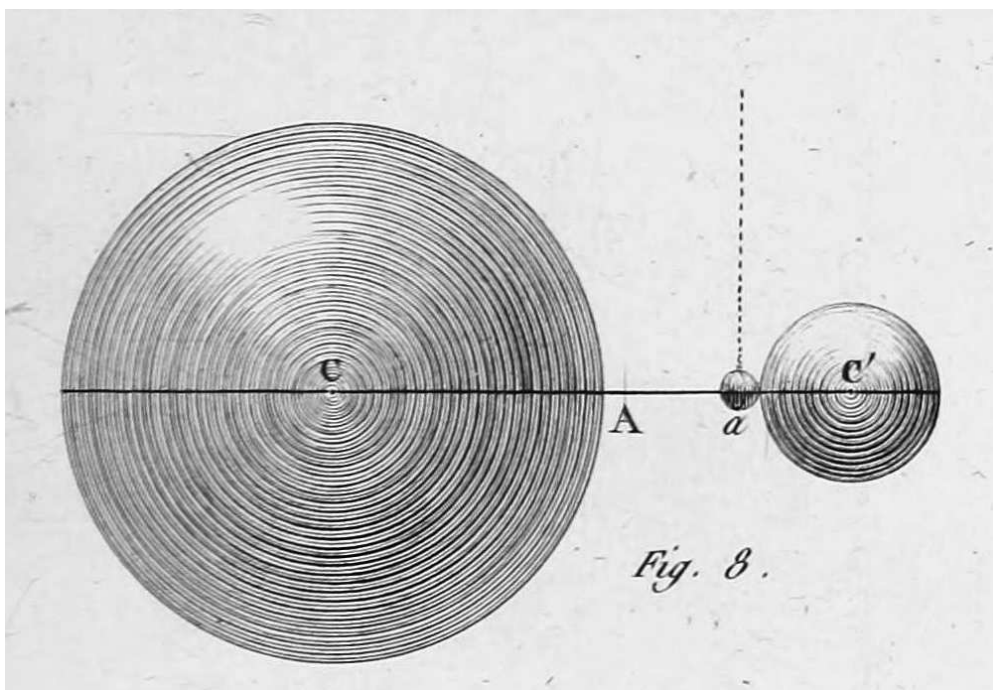
(a) (b)

já que a ação de um pequeno círculo $b'f$, cuja densidade é nula, tem por expressão (como vimos na Seção 18.21)

$$D\left[1-\frac{2R}{(4R^2+(b'f)^2)^{1/2}}\right] ,$$

quantidade que desaparece aqui, já que $b'f$ é muito menor do que $2R$.

18.24 XXIV

Toda a teoria anterior será confirmada por uma experiência que me parece apropriada a clarear essa matéria.

Acabamos de ver nas Seções anteriores que, quando dois globos estavam em contato, qualquer que fosse o diâmetro desses dois globos, a densidade no ponto de contato e nos pontos vizinhos era nula e não negativa caso os dois globos estivessem eletrizados positivamente. Porém, a partir do instante em que separamos os dois globos, caso um dos globos seja menor do que o outro e caso a distância entre os dois globos seja pequena, encontraremos (Figura 8) que o ponto a do pequeno globo, que esteve em contato com o ponto A do globo grande, torna-se negativo até que esses dois globos tenham sido afastados a uma certa distância na qual a eletricidade do ponto a é nula; [encontraremos ainda] que o mesmo ponto a torna-se em seguida positivo, quando continuamos a afastar os dois globos.

18.25 XXV. Nona Experiência

Isolamos (Figura 8) um globo C de 11 polegadas [29,78 cm] de diâmetro; isolamos igualmente um globo C' de um diâmetro menor. Eletrizávamos esses globos e os colocávamos em contato. Em seguida afastávamos o pequeno globo C' pouco a pouco e, por meio de um pequeno grão de chumbo a, suspenso por um fio de goma-laca, ou de um pequeno disco de papel dourado,

como na Figura 3, o qual fazemos tocar o ponto a, sendo apresentado em seguida na pequena balança ou sendo apresentado a um pequeno eletrômetro de fio de seda muito sensível, tal como aquele que foi descrito na nossa Quarta Memória,[674] determinávamos a natureza da eletricidade do ponto a para valores diferentes da distância Aa.

Primeiro teste. Tendo o globo C 11 polegadas de diâmetro e o globo C' 8 polegadas, estando os dois globos eletrizados positivamente e colocados em contato, o ponto A do globo grande sempre forneceu sinais de eletricidade positiva, qualquer que fosse a distância Aa; mas o ponto a do globo C' forneceu sinais de eletricidade negativa até a 1 polegada [2,71 cm] de distância; a 1 polegada, a eletricidade desse ponto a era nula; sendo positiva além dessa distância.[675]

Segundo teste. Tendo o globo C sempre 11 polegadas de diâmetro e o globo C' 4 polegadas [10,83 cm], até a 2 polegadas de distância o ponto a do pequeno globo forneceu sinais de eletricidade negativa; a 2 polegadas, a eletricidade desse ponto era nula; a eletricidade do ponto A é sempre positiva.

Terceiro teste. Tendo o globo C sempre 11 polegadas de diâmetro, quando o pequeno globo C' tinha 2 polegadas, 1 polegada e abaixo disso, a eletricidade do ponto a era negativa até que afastássemos o pequeno globo a 2 polegadas e 5 linhas [6,54 cm] do globo grande; a essa distância de 2 polegadas e 5 linhas ela era nula, sendo positiva quando a distância Aa era maior do que 2 polegadas e 5 linhas.

18.26 XXVI. Observação sobre Essa Experiência

Quando uma superfície esférica, coberta uniformemente de um fluido elétrico cuja densidade é D, atua sobre um ponto colocado na superfície do globo, sua ação sobre esse ponto é igual a D;[676] porém, quando esse mesmo fluido atua sobre um ponto colocado fora dessa mesma superfície da quantidade a, sua ação sobre esse ponto, caso o raio do globo seja R, será $2DR^2/(R+a)^2$.[677]

Se agora supormos o pequeno globo C' (Figura 8) em contato com o globo grande C, caso o globo C' seja muito pequeno em relação ao globo C, o fluido elétrico do globo grande sempre continuará distribuído quase uniformemente sobre o globo grande, já que o pequeno globo só atuará no ponto de contato e nos pontos vizinhos: isso é fácil de perceber de acordo com a teoria. Assim a ação do globo grande sobre o ponto de contato ainda será bem exatamente representada por D. Porém, embora a densidade média do pequeno globo em

[674] Essa Memória está traduzida no Capítulo 16.

[675] Ou seja, quando $aA < 1$ polegada, o ponto a ficava negativamente eletrizado; quando $aA = 1$ polegada, era nula a eletricidade do ponto a; já quando $aA > 1$ polegada, o ponto a ficava positivamente eletrizado.

[676] A força por unidade de carga na superfície de uma casca esférica é dada por $2\pi kD$. Coulomb está desprezando aqui o fator constante 2π (supondo $k = 1$), assim como havia feito anteriormente, ver a Nota de rodapé 664 na página 321.

[677] Seja uma casca esférica de raio R com carga total Q uniformemente distribuída sobre ela com uma densidade superficial $D = Q/(4\pi R^2)$. Ao atuar sobre uma partícula eletrizada com carga q localizada à distância $R + a$ de seu centro, a força F por unidade de carga é dada por (com k sendo uma constante de proporcionalidade):

$$\frac{F}{q} = \frac{kQ}{(R+a)^2} = \frac{k(D4\pi R^2)}{(R+a)^2} = 2\pi k \cdot \frac{2DR^2}{(R+a)^2} \ .$$

Novamente Coulomb está desprezando o termo constante 2π, ver a Nota de rodapé 664 na página 321.

contato seja maior do que a densidade média do globo grande, como deve haver equilíbrio no ponto de contato quando o globo grande e o pequeno se tocam, a ação do pequeno globo sobre o ponto de contato tem como medida a quantidade D, assim como o globo grande. Porém, quando separamos o pequeno globo do grande e quando o afastamos de uma pequena quantidade $Aa = a$, a ação do pequeno globo sobre o ponto A do globo grande será quase nula enquanto que a ação do globo grande C[678] sobre o ponto a será

$$\frac{2R^2}{(R+a)^2} ;$$

assim, permanecendo como sendo D a ação do pequeno globo sobre a, assim como no caso de contato, teremos a seguinte equação para determinar a densidade δ do ponto a:

$$\frac{2DR^2}{(R+a)^2} + \delta = D \qquad \text{ou} \qquad \delta = D\left[1 - \frac{2R^2}{(R+a)^2}\right] ;$$

logo, caso $2R^2/(R+a)^2$ seja maior que a unidade, δ será negativo; caso essa quantidade seja igual à unidade, δ será nulo; δ será positivo caso $2R^2/(R+a)^2$ seja menor que a unidade.

Podemos então determinar a distância Aa na qual será nula a densidade do ponto a ao fazer $2R^2/(R+a)^2 = 1$; da qual resulta

$$(R+a) = R\sqrt{2} = 1,415R \qquad \text{e} \qquad a = 0,415R .$$

Mas acabamos de ver em nossa experiência que, quando um pequeno globo de 1 polegada, por exemplo, foi colocado em contato com nosso globo de 11 polegadas, é necessário afastá-lo de 2 polegadas e 5 linhas do globo A, para que a eletricidade do ponto a deixe de ser negativa e passe a ser nula, sendo que ela é positiva além dessa distância. Temos aqui

$$R = 5 \text{ polegadas e 6 linhas } = 66 \text{ linhas } [= \ 14,92 \ cm] ,$$

$$a = 2 \text{ polegadas e 5 linhas } = 29 \text{ linhas } [= \ 6,55 \ cm] .$$

Assim

$$\frac{a}{R} = \frac{29}{66} = 0,439 ,$$

valor esse que difere muito pouco, como vemos, do valor indicado pela teoria.

É fácil de ver, após as reflexões sobre as quais é baseado o cálculo anterior, que na medida em que os dois globos aproximam-se da igualdade [de tamanho], a distância Aa, na qual é nula a densidade do ponto a, deve diminuir, já que nesse caso a ação do pequeno globo sobre o ponto A, na distância Aa, deixa apenas pouca densidade para o fluido elétrico do ponto A e dos pontos vizinhos; assim a ação do globo grande A sobre o ponto a nesse caso é menor do que $2DR^2/(R+a)^2$; é pelo mesmo motivo que o fluido elétrico do globo grande nunca é negativo em A, qualquer que seja a distância Aa.[679,680]

[678] Por um lapso aparece C' no original.

[679] [Nota de Potier:] Poisson aplicou o cálculo à experiência feita com os globos de 11 polegadas e de 4 polegadas encontrando que a densidade mínima sobre a pequena esfera é de apenas 0,037 de sua densidade média, quando ela foi afastada de 2 polegadas da esfera maior.

O Sr. Plana calculou a razão y entre a distância na qual a densidade mínima é nula e o raio da grande esfera, em função da razão x entre os raios das duas esferas. Quando x diminui de 1 até 0, y cresce no início rapidamente, desde 0 até um valor máximo igual a $0,54$ que é obtido quando $x = 0,5$, diminuindo em seguida ao tender para o valor limite 0,355, o qual seria obtido para $x = 0$.

[680] [Poisson, 1812a], [Poisson, 1812b], [Poisson, 1813] e [Poisson, 1814]; [Plana, 1845] e [Plana, 1854].

18.27 XXVII

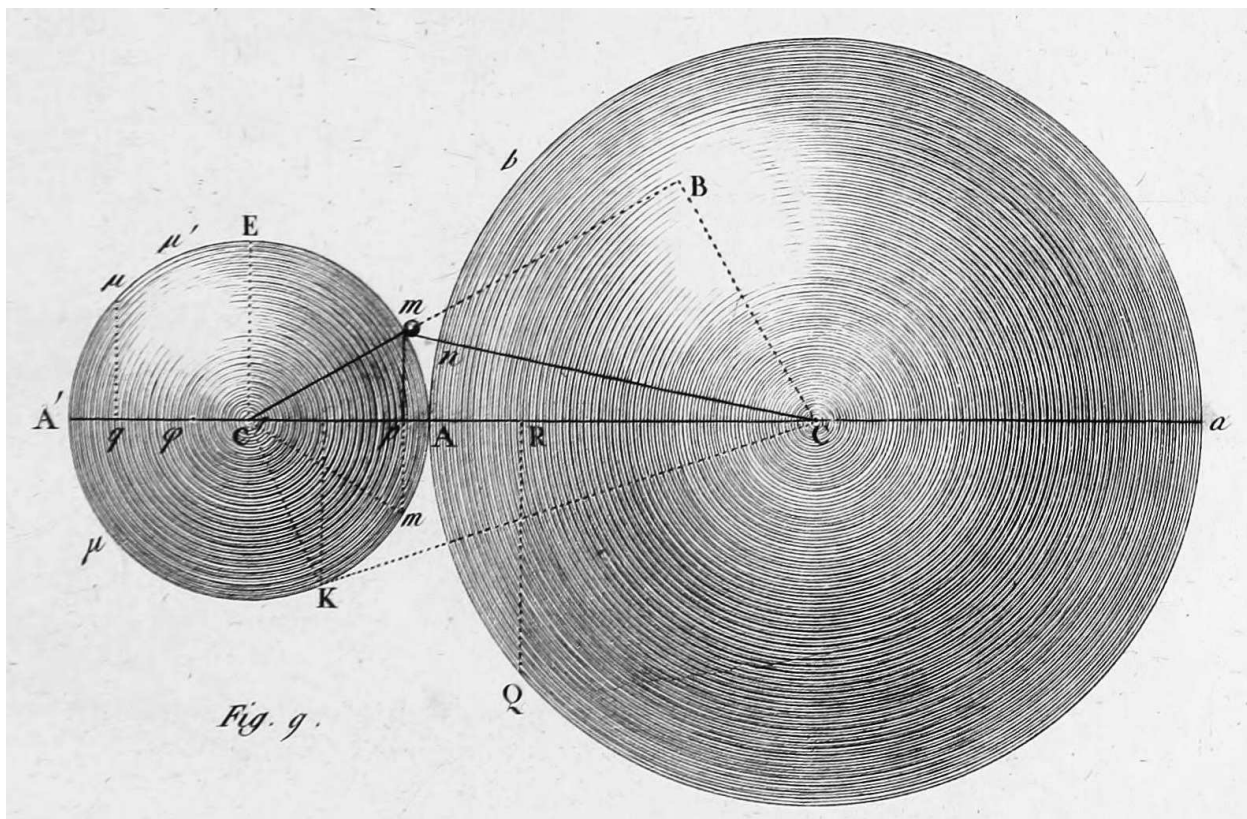
Parece que podemos concluir das experiências e observações anteriores que o fluido elétrico é quase que totalmente distribuído sobre a superfície dos corpos condutores eletrizados, e que ele não forma ao redor desses corpos uma atmosfera muito estendida, assim como pensaram vários autores. Essa consequência pode até mesmo ser confirmada por uma experiência que parece bem decisiva; aqui vai ela. Se colocarmos um globo condutor na balança [elétrica], se eletrizarmos esse corpo e se ele for tocado alternadamente com dois fios de cobre com a mesma espessura e comprimento,[681] sendo que um deles é envolvido ao longo de todo o seu comprimento, exceto na extremidade destinada a tocar o globo, com uma camada de goma-laca bem pura, com uma espessura de 5 a 6 linhas [1,13 a 1,36 cm], encontraremos, por um procedimento e um cálculo análogos àqueles da Primeira Seção, que os dois fios de cobre adquirem, ao serem colocados em contato com o globo através de suas extremidades, uma quantidade igual de eletricidade.

Mas sabemos que o fluido elétrico não pode penetrar através de uma camada de goma-laca. Assim, quando colocamos em contato o fio coberto de goma-laca e o apresentamos por sua extremidade ao globo [eletrizado], o fluido elétrico só pode se distribuir sobre a superfície desse fio. Consequentemente, quer o fio seja ou não coberto de goma-laca, como ele adquire a mesma quantidade de eletricidade, digamos, por exemplo, a metade da eletricidade do globo, ele deve exercer nos dois casos, sobre um ponto qualquer, por exemplo sobre o ponto de contato, a mesma ação. Disso resulta que, esteja o fio de cobre coberto ou não de goma-laca, o fluido elétrico se distribui nele da mesma maneira e com a mesma quantidade.

Contudo, é necessário observar que, como o ar não é um dielétrico perfeito, já que ele é carregado de partes úmidas condutoras, o fluido elétrico de um corpo eletrizado deve penetrar mais ou menos nas camadas do ar que o envolvem. Porém, nos dias muito secos, as experiências anteriores provam que esse fluido não penetra as camadas do ar a uma profundidade muito grande nem em uma quantidade muito grande para que seja necessário levar isso em conta na maioria dos cálculos. Voltaremos a esse assunto em uma outra Memória destinada a determinar o estado de um corpo dielétrico em contato com um corpo condutor eletrizado;[682] porém não podemos nos ocupar desse assunto com qualquer esperança de sucesso, a não ser quando tivermos determinado exatamente, pela experiência, a maneira pela qual o fluido elétrico se distribui sobre as superfícies, sejam planas, sejam curvas, e sobre os corpos de formatos diferentes; essa pesquisa formará a Segunda Parte dessa Memória.

18.28 XXVIII. *Determinação da Densidade do Fluido Elétrico, desde o Ponto de Contato até a* 180° *desse Ponto, quando Dois Globos Eletrizados se Tocam*

Suponhamos os dois globos [condutores] em contato pelo ponto A, Figura 9, estando tanto um quanto outro eletrizados e apoiados sobre isolantes dielétricos, tais como aquele da Figura 4.

[681]Sendo esses fios manipulados através de um cabo isolante que evite o aterramento.
[682]Essa Memória de Coulomb nunca chegou a ser publicada.

Como já demonstramos em nossa Quarta Memória que, nos corpos condutores, o fluido elétrico era distribuído unicamente sobre a superfície e não penetrava no interior desses corpos, podemos supor cada globo coberto de uma infinidade de pequenos glóbulos condutores carregados de eletricidade. Assim a ação elétrica de cada um desses glóbulos sobre o ponto do globo no qual ele está em contato será contrabalançada pela ação de todos os outros glóbulos que cobrem os dois corpos.

Caso a densidade do globo grande cujo centro é C fosse D, e caso essa densidade fosse distribuída uniformemente sobre todo o globo, sua ação sobre um ponto m do globo C' seria expressa por[683]

$$2D\left(\frac{Ca}{Cm}\right)^2 ,$$

e essa ação decomposta na direção mB, [ou seja, ao longo da direção do] raio do pequeno globo, será

$$\frac{2D(CA)^2 mB}{(Cm)^3} .$$

Caso a densidade do fluido elétrico também fosse uniformemente distribuída sobre o pequeno globo e fosse igual a D', sua ação sobre o ponto m seria D'. Assim, se colocarmos em contato com o pequeno globo cujo centro é C' um pequeno glóbulo m que se carrega de eletricidade, a densidade elétrica desse pequeno glóbulo deve ser tal que em seu ponto de contato haja equilíbrio entre a ação do pequeno globo C' agindo ao longo de $C'm$ e a ação do globo C

[683]Ao longo de toda essa Seção Coulomb vai continuar desprezando o fator constante 2π nas expressões de força por unidade de carga, ver a Nota de rodapé 664 na página 321.

atuando ao longo de Bm, juntamente com a ação do glóbulo m atuando na mesma direção. Assim, denominando por δ à densidade média do pequeno glóbulo localizado em m, teremos

$$D' = \delta + \frac{2D(CA)^2 mB}{(Cm)^3} \qquad \text{ou} \qquad \delta = D' - \frac{2DCA^2 mB}{(Cm)^3} \ .$$

Se fizermos, para ter essa equação sob uma forma analítica, $CA = R$, $C'A = r$, $AP = x$,[684] os dois triângulo semelhantes $CC'B$ e $C'pm$ fornecerão

$$\frac{C'm}{C'p} = \frac{CC'}{BC'} \ .$$

Assim

$$Bm = BC' - C'A = R - \frac{R+r}{r}x \ ,$$
$$(Cm)^2 = R^2 + 2(R+r)x \ ;$$

ao substituir na fórmula os valores de Bm e de Cm ela fica na seguinte forma

$$\delta = D' - \frac{2DR^2\left(R - \frac{R+r}{r}x\right)}{[R^2 + 2(R+r)x]^{3/2}} \ .$$

Se nessa equação fizermos o ângulo $AC'm = \alpha$, teremos

$$x = r(1 - \cos\alpha) \ ,$$

e, consequentemente,

$$\delta = D' - \frac{2DR^2[R - (R+r)(1-\cos\alpha)]}{[R^2 + 2(R+r)r(1-\cos\alpha)]^{3/2}} \ .$$

18.29 XXIX

Caso os dois globos sejam iguais, nesse caso $D = D'$, $R = r$, e a fórmula anterior reduz-se a

$$\delta = D\left[1 + \frac{2 - 4\cos\alpha}{(5 - 4\cos\alpha)^{3/2}}\right] \ .$$

Determinamos na Primeira Parte dessa Memória (Seções 18.13 e 18.15) a densidade elétrica de dois globos iguais e em contato, desde 30° do ponto de contato até a 180° desse ponto; assim podemos comparar nossa fórmula com essa experiência e com seu resultado.

1. Se calcularmos a densidade δ de acordo com nossa fórmula, a encontraremos negativa até próximo de 23°; a experiência a fornece como sendo imperceptível até esse ponto: apresentamos o motivo dessa diferença (Seção 18.20);

2. Se calcularmos para um ponto a 30° do contato entre esses dois globos, encontraremos $\delta = 0,23D$;

[684]Coulomb parece estar se referindo aqui à distância entre os pontos A e p mostrados na Figura 9.

3. A 60° do ponto de contato, $\delta = D$;

4. A 90° do ponto de contato, $\delta = 1,18D$;

5. A 180° do ponto de contato, $\delta = 1,22D$.

Para obter a grandeza δ de acordo com a experiência, temos de comparar (Seção 18.15) a densidade do ponto a 90° do contato com a densidade de todos os outros pontos; assim é necessário fazer a mesma comparação nos resultados fornecidos pela teoria; a experiência nos forneceu (Seção 18.15):

A densidade do fluido elétrico a 90° do ponto de contato está para a densidade a 30° :: $4,80 : 1,00$.

Se fizermos a mesma comparação, de acordo com nossa fórmula, encontraremos para essa razão :: $5,13 : 1,00$.

O ponto a 90°, comparado com aquele a 60°, a experiência fornece [a razão entre] as densidades :: $1,25 : 1,00$.

O cálculo teórico [fornece] :: $1,18 : 1,00$.

O ponto a 90°, comparado com aquele a 180°, a experiência fornece [a razão entre] as densidades :: $0,95 : 1,00$.

A teoria [fornece] :: $0,97 : 1,00$.

Encontramos aqui uma conformidade entre os resultados experimentais e os teóricos, que dificilmente poderíamos esperar.[685,686]

18.30 XXX. Décima Experiência

Para tornar a comparação entre a teoria e a experiência mais direta e mais fácil na determinação da quantidade de eletricidade adquirida por dois globos com diâmetros diferentes colocados em contato, aqui vai o resultado de novas experiências que acredito sejam úteis acrescentar às experiências anteriores.

Coloquei em contato (Figura 9) dois globos com diâmetros diferentes e os eletrizei. Em seguida toquei o ponto A' localizado a 180° do ponto de contato com um pequeno disco de papel dourado com 5 linhas (1,13 cm) de diâmetro (isolado, como está representado na Figura 3, por um fio de goma-laca); apresentei esse pequeno disco [de papel] na balança com fio de prata muito fino, em seguida separei os dois globos C e C', e toquei com o mesmo disco o globo grande C. Apresentei novamente esse pequeno disco na balança; a comparação da força com que a agulha foi repelida na primeira e na segunda observação fornecia a razão entre a densidade do ponto A' quando os dois globos estão em contato, e a densidade média sobre o globo grande C quando esses globos estão separados.

Formei, de acordo com os diferentes resultados que essa experiência me forneceu, uma Tabela para dois globos com diâmetros diferentes. Nessa Tabela, R é o raio do globo grande, r aquele do globo pequeno; D é a densidade média do globo grande separado do pequeno

[685] [Nota de Potier:] Poisson fornece, para essas três razões, 5,86; 1,34; 0,88.

[686] [Poisson, 1812b, pág. 76]. As diferenças percentuais entre os valores experimentais de Coulomb e os valores teóricos de Poisson são dadas por:

$$\frac{5,86 - 4,80}{5,86} \cdot 100\% = 18,1\% , \qquad \frac{1,34 - 1,25}{1,34} \cdot 100\% = 6,7\% \qquad \text{e} \qquad \frac{0,88 - 0,95}{0,88} \cdot 100\% = -8,0\% .$$

Ou seja, há uma concordância bem razoável entre esses valores.

globo; δ é a densidade do ponto A', que é a extremidade do eixo do pequeno globo em contato com o globo grande.[687]

R/r	δ/D
1	1,27
2	1,55
4	2,35
8	3,18
∞	4,00

18.31 XXXI. *Observações sobre a Experiência Anterior*

Se queremos determinar, de acordo com a teoria, a grandeza δ para o ponto A', é necessário, para ter uma primeira aproximação, supor o fluido elétrico de cada globo distribuído uniformemente sobre esse globo. Ao denominar δ à densidade do ponto A' ou de um pequeno glóbulo colocado em A', D à densidade média do globo grande C, D' à densidade do pequeno globo, teremos a equação

$$\delta = D' + \frac{2DR^2}{(R+2r)^2} \ .$$

Nessa equação a densidade média D' do pequeno globo é necessariamente maior do que a densidade D do globo grande, assim como é fácil de ver pela teoria. Suponhamos porém como uma primeira aproximação que $D = D'$; formaremos, de acordo com a fórmula

$$\delta = D\left[1 + \frac{2R^2}{(R+2r)^2}\right] \ ,$$

que exprime o valor da densidade no ponto A', comparada com a densidade média do globo grande, a seguinte Tabela:

R/r	δ/D
1	1,22
2	1,50
4	1,89
8	2,28
∞	3,00

A comparação desse resultado com aquele fornecido pela experiência na *Seção anterior* mostra que a teoria e o cálculo começam a diferir apenas quando R é maior do que $2r$, com a teoria fornecendo um valor aproximado, quando R é maior do que $2r$, que é menor do que aquele valor fornecido pela experiência. Porém, se observarmos que em nossa Tabela, calculada de acordo com a fórmula, fizemos a suposição que a densidade D' do pequeno globo

[687]Seja Q a carga elétrica no globo grande de raio R. Quando esse globo está afastado do pequeno globo, sua densidade superficial de eletricidade é dada por $D = Q/(4\pi R^2)$.

Já δ é a densidade superficial de carga no ponto A' da Figura 9 medida enquanto os dois globos estão em contato.

Na Seção 19.4 há uma comparação entre os resultados experimentais de Coulomb e os valores teóricos de Poisson.

é igual à densidade do globo grande e que, pela ação do globo grande, o fluido do pequeno globo deve ser condensado na direção do ponto A' do pequeno globo;[688] sendo que entretanto esse fluido, por sua ação em razão inversa do quadrado das distâncias, deve equilibrar no ponto de contato a ação do fluido espalhado quase uniformemente sobre o globo grande, veremos que a densidade média do fluido elétrico deve ser maior sobre o pequeno globo do que sobre o grande; sendo que assim D' é maior do que D e que, consequentemente, o resultado fornecido pela Tabela pelo cálculo exige uma correção que aumenta o valor de δ, o que está de acordo com a experiência. Encontraremos nas Seções que virão a seguir os métodos para chegar mais perto do valor real de δ.

18.32 XXXII. *Determinação por Aproximação da Razão pela qual a Eletricidade se Divide entre Dois Globos de Tamanhos Diferentes Colocados em Contato*

18.32.1 Primeiro Exemplo: Quando $R = \infty r$

Como só podemos determinar por aproximação a maneira pela qual o fluido elétrico se divide entre dois globos, será mais fácil de entender os métodos que utilizamos ao aplicá-los a exemplos particulares do que ao generalizá-los. Nesse exemplo, um dos globos é infinitamente grande em relação ao outro; porém, de acordo com essa suposição, é fácil de conceber que a fórmula que utilizamos (Seção 18.26) para determinar a densidade sobre todos os pontos do pequeno globo deve se aproximar da verdade; pois, ao supor o pequeno globo a uma distância muito pequena do globo grande, o fluido elétrico com o qual será carregado o globo grande será transportado sobre o pequeno globo até que haja equilíbrio sobre todos os pontos da superfície entre a ação do globo grande e a ação de todos os pontos eletrizados sobre a superfície do pequeno globo. Sendo a ação do pequeno globo sobre o globo grande proporcional à densidade média multiplicada por sua superfície, ela será infinitamente pequena para todo outro ponto que não seja o ponto de contato; assim, a ação do globo grande sobre cada ponto do pequeno globo será aproximadamente a mesma para todo ponto que não seja o ponto de contato, assim como se todo o fluido elétrico do globo grande estivesse [concentrado] em seu centro C. Consideremos agora D' como sendo a densidade média do pequeno globo, quantidade essa que deve ser variável quando buscamos a ação do pequeno globo sobre cada um dos pontos de sua superfície, mas que podemos supor constante em uma primeira aproximação, desde que determinemos seu valor de acordo com as condições de equilíbrio no ponto de contato. Como supomos nesse exemplo o raio r muito pequeno em relação a R, a fórmula

$$\delta = D' - \frac{2DR^2\left[R - \frac{(R+r)x}{r}\right]}{[R^2 + 2(R+r)x]^{3/2}} ,$$

reduz-se a

$$\delta = D' - \frac{2D(r-x)}{r} .$$

[688]No original temos aqui “petit globe” (pequeno globo), enquanto que por um lapso Potier substituiu essa expressão por “gros globe” (grande globo).

Agora, é necessário que a ação que todo o fluido do globo grande exerce sobre o ponto de contato A, na direção CA, seja igual à ação sobre o mesmo ponto exercida por todo o fluido espalhado sobre a superfície do pequeno globo. Mas como, de acordo com nossa fórmula, δ representa a densidade do fluido sobre o ponto m [da Figura 9]; e como a densidade δ é a mesma para todos os pontos da zona superficial mm, perpendicular ao eixo Ap, a ação dessa zona sobre o ponto A, decomposta na direção pA, será [dada por:]

$$\frac{\delta dx}{2\sqrt{2r}\sqrt{x}} = \frac{dx}{2\sqrt{2r}\sqrt{x}}\left(D' - 2D + \frac{2Dx}{r}\right) .$$

Ao considerar D' como sendo a densidade média do pequeno globo sobre cada ponto de sua superfície, e supondo-a constante, a integral dessa grandeza vai fornecer para a ação do pequeno globo sobre o ponto A [o seguinte valor:]

$$\frac{1}{2\sqrt{2r}}\left[(2D' - 4D)\sqrt{x} + \frac{4}{3}D\frac{x^{3/2}}{r}\right] ,$$

quantidade essa que deve desaparecer quando $x = 0$ e que deve se completar quando $x = 2r$, com isso teremos para a ação total do pequeno globo sobre o ponto de contato A [o seguinte valor:]

$$D' - \frac{2}{3}D .$$

Porém é necessário observar que, no contato entre dois globos, estando o fluido elétrico em um estado de estabilidade, deve haver equilíbrio no ponto de contato entre a ação do pequeno globo e a ação do globo grande. Como a densidade do globo grande é aproximadamente uniforme sobre todos os pontos de sua superfície, a ação do globo grande sobre o ponto de contato A será D; assim teremos a equação

$$D' - \frac{2}{3}D = D \qquad \text{ou} \qquad D' = 1,67D ,$$

quantidade essa menor do que aquela que foi encontrada pela experiência, a qual nos forneceu (Seção 18.11), quando $R = \infty r$, $D' = 2D$. Antes de procurar um valor mais aproximado de D', vamos determinar por aproximação a densidade em A', [ou seja, na] extremidade do eixo. Para chegar a essa densidade, é necessário observar que, como D' representa a ação que o fluido exerce sobre um ponto qualquer de sua superfície, essa quantidade D' não pode ser constante, assim como acabamos de supô-la para obter uma primeira aproximação, mas ela deve variar aumentando desde o ponto de contato A até a extremidade do eixo em A'. No ponto de contato, essa ação do pequeno globo deve equilibrar a ação do globo grande; assim ela deve ser equivalente a D; no ponto A', ela deve ser determinada pela ação de toda a superfície do pequeno globo sobre esse ponto. Para ter uma ação aproximada do pequeno globo sobre esse ponto, é necessário calculá-la de acordo com a densidade $\delta = D' - 2D - \frac{2Dx}{r}$. Ao fazer [ver a Figura 9]:

$$A'q = z = (2r - x) ,$$

a ação da pequena zona $\mu\mu$ sobre o ponto A' será

$$\frac{\delta dz}{2\sqrt{2r}\sqrt{z}} = \frac{dz}{2\sqrt{2r}\sqrt{z}}\left(D' + 2D - \frac{2Dz}{r}\right) ,$$

essa equação integrada e completada fornecerá, para a ação total do pequeno globo sobre o ponto A, [o valor] $D' + \frac{2}{3}D$. Coloquemos no lugar de D' seu valor aproximado que acabamos de encontrar, [a saber,] $1,666D$, e teremos para a ação aproximada do pequeno globo sobre o ponto A, [o valor] $2,33D$. Assim, a ação do pequeno globo sobre todos os pontos de sua superfície varia ao crescer desde o ponto A até o ponto A', de maneira que no ponto de contato A ela é igual a D e na extremidade do eixo em A',[689] ela é $2,33D$.

Para obter, de acordo com a quantidade de ação que o pequeno globo exerce sobre o ponto A', a densidade do fluido elétrico nesse ponto, é necessário supor que tocamos alternadamente com um pequeno plano [de prova] isolado o ponto A' e um ponto do globo grande C. É claro que no ponto A' a densidade dos pequenos glóbulos deve ser tal que haja equilíbrio entre a ação de um pequeno glóbulo em A' e a ação dos dois globos. Assim, ao denominar δ como sendo a densidade do pequeno glóbulo, devemos ter

$$\delta = 2D + 2,33D = 4,33D \ ;$$

a experiência parece efetivamente nos indicar (Seção 18.30) que, quando r era infinitamente menor do que R, a densidade do pequeno globo na extremidade de seu eixo em A' era um pouco maior do que $4D$, sendo D a densidade média do globo grande.

Voltemos a determinar de uma maneira mais exata a densidade média D' do pequeno globo a qual encontramos em uma primeira aproximação como sendo igual a $1,67D$ e que a experiência (Seção 18.11) nos ensinou ser igual a $2D$.

Como a ação do pequeno globo sobre cada ponto de sua superfície aumenta desde o ponto A até o ponto A'; como no ponto A ela é aproximadamente igual a D ou igual à quantidade média $D'/1,67$; como no ponto A' ela é $2,33D'/1,67$, [portanto,] quando queríamos determinar o valor de δ, era necessário, ao invés de fazer D' constante, fazê-la variável. Assim, ao supor que a ação do pequeno globo seja representada por

$$D'\left(a + \frac{bx}{2r}\right) \ ,$$

essa ação deve ser tal que, quando $x = 0$,

$$D'a = \frac{D'}{1,67} \ ,$$

e que, quando $x = 2r$,

$$D'\left(\frac{1,00}{1,67} + b\right) = \frac{2,33D}{1,67} \qquad \text{ou} \qquad b = \frac{1,33}{1,67} \ ;$$

o que fornecerá para a densidade δ aproximada de cada ponto m do pequeno globo, [o seguinte valor:]

$$\delta = D'a - 2D + \frac{bD' + 4D}{2r}x \ ;$$

e a ação de uma pequena zona superficial mm sobre o ponto de contato A será[690]

---

[689] Por um lapso no original apareceu aqui A em vez de A'.

[690] No original aparece a seguinte equação:

$$\frac{Dx}{2\sqrt{2r}\sqrt{x}}\left[(D'a - 2D) + \left(\frac{D' + 4D}{2r}\right)x\right] \ .$$

Substituí no primeiro numerador Dx por dx. No último numerador coloquei bD' em vez de D'.

$$\frac{dx}{2\sqrt{2r}\sqrt{x}}\left[(D'a-2D)+\left(\frac{bD'+4D}{2r}\right)x\right] \ ,$$

cuja integral [é dada por:][691]

$$\frac{1}{2\sqrt{2r}}\left[2x^{1/2}(D'a-2D)+\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\frac{bD'+4D}{2r}\right)\right] \ ,$$

quantidade essa que deve desaparecer quando $x=0$ e se completar quando $x=2r$. Assim a ação total do pequeno globo sobre o ponto de contato A será

$$D'a-2D+\frac{bD'+4D}{3} \ ;$$

porém, como a ação do pequeno globo deve equilibrar no ponto de contato a ação do globo grande que é igual a D, [ou seja, com a] densidade de fluido desse globo grande, teremos

$$D'\left(a+\frac{b}{3}\right)=\frac{5}{3}D \qquad \text{ou} \qquad D'=1,93D \ .$$

Para obter agora a densidade média do fluido elétrico do pequeno globo quando, ao removê-lo do contato com o globo grande, ele se distribui uniformemente sobre a superfície desse pequeno globo, é necessário ter a quantidade de fluido elétrico distribuída sobre o pequeno globo, e dividi-la pela superfície desse globo. Assim, é necessário retomar a equação

$$\delta=D'a-2D+(bD'+4D)\frac{x}{2r} \ ,$$

multiplicá-la por rdx, [grandeza essa] que exprime a superfície elementar do globo, e integrar essa quantidade por toda a superfície, o que fornecerá

$$(D'a-2D)2r^2+(bD'+4D)\frac{r^2}{2} \ ,$$

e dividir pela superfície do pequeno globo $2r^2$,[692] o que fornecerá para a densidade média [o seguinte valor:]

$$D'\left(\frac{2a+b}{2}\right) \ ,$$

de onde

$$D'=1,93D \ ,$$

quantidade essa que, como vemos, só difere do valor $2,00D$ encontrado pela experiência, de uma quantidade muito pequena para poder ser considerada em pesquisas desse tipo.

[691] No original aparece a seguinte equação:

$$\frac{dx}{2\sqrt{2r}}\left[2x^{1/2}(D'a-2D)+\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\frac{bD'+4D}{2r}\right)\right] \ .$$

Substituí no primeiro numerador dx por 1.

[692] A área do pequeno globo de raio r é dada por $4\pi r^2$. Nessa Seção Coulomb está deixando de lado em todas as contas o fator 2π, ver as Notas de rodapé 664 e 683 nas páginas 321 e 330, respectivamente.

18.33 XXXIII. *Segundo Método de Aproximação*

Nos servimos aqui de um método de aproximação diferente do anterior, mas que pode se aplicar a todos os valores de R/r.

Na Figura 9, sejam D a densidade média do globo grande e D' a ação média que queremos determinar do pequeno globo sobre cada ponto de sua superfície. Vimos que, quando os dois globos estavam em contato, a densidade era nula no ponto de contato. Se a determinarmos agora para dois outros pontos [sobre o pequeno globo], um [ponto] a 90° do ponto de contato, o outro a 180°, encontraremos, sempre denominando de R ao raio do globo grande e r ao raio do pequeno globo, que a densidade δ do pequeno globo no ponto E localizado a 90° do contato é, de acordo com nossa fórmula (Seção 18.28),

$$\delta = D' + \frac{2DR^2r}{[(R+r)^2+r^2]^{3/2}} \ ,$$

e que a densidade δ em A', [ou seja, na] extremidade do eixo, é

$$D' + \frac{2DR^2}{(R+2r)^2} \ .$$

Assim, se supormos a densidade δ que cresce desde o ponto A até o ponto A', representada por

$$D'\left[\frac{ax}{2r} + \frac{bx^2}{(2r)^2}\right] \ ,$$ [693]

será necessário que essa quantidade seja nula quando $x = 0$, que ela seja [dada por]

$$D' + \frac{2DR^2r}{[(R+r)^2+r^2]^{3/2}}$$

quando $x = r$, e que ela seja [dada por]

$$D' + \frac{2DR^2r}{(R+2r)^2}$$

quando $x = 2r$.

Façamos, para simplificar o cálculo,

$$\frac{2R^2r}{[(R+r)^2+r^2]^{3/2}} = A \ ,$$

e

$$\frac{2R^2}{(R+2r)^2} = B \ .$$

Determinaremos a e b pelas duas equações

[693] Como definido anteriormente por Coulomb, ver a Nota de rodapé 684 na página 331, a grandeza x é definida por $x = AP$, sendo os pontos A e P (ou A e p) mostrados na Figura 9.

$$D'\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{4}\right)=D'+AD\ ,$$

e

$$D'(a+b)=D'+BD\ ,$$

de onde resultará

$$a=3+(4A-B)\frac{D}{D'}\ ,$$

e

$$b=-2+2(B-2A)\frac{D}{D'}\ .$$

Para determinar D', retomemos a equação

$$\delta=D'\left[a\frac{x}{2r}+b\frac{x^2}{(2r)^2}\right]\ ,$$

e teremos, para a ação superficial de uma zona mm sobre o ponto A de contato,

$$\frac{D'dx}{2\sqrt{2r}\sqrt{x}}\left[\frac{ax}{2r}+\frac{bx^2}{(2r)^2}\right]\ ,$$

a qual, integrada e completada, fornecerá, para a ação total do pequeno globo sobre o ponto de contato A, a quantidade

$$D'\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)\ ,$$

a qual deve ser igual à ação do globo grande sobre o mesmo ponto de contato. Se esse globo for muito maior que o pequeno, sua ação será aproximadamente igual a D. Assim, nesse caso, teremos, para determinar a razão D'/D, a equação

$$\frac{D}{D'}=\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\ .$$

18.34 XXXIV

Para ter a densidade média do fluido espalhado uniformemente sobre o pequeno globo após o contato, é necessário determiná-la ao dividir a quantidade de eletricidade do pequeno globo por sua superfície, o que fornecerá para essa densidade [o seguinte valor:]

$$\int\frac{\delta dxr}{2r^2}\ .$$

Ao substituir no lugar de δ seu valor e ao fazer a operação [de integração], obteremos

$$D'\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\ ,$$

a qual exprime a densidade média, isto é, a densidade do fluido elétrico, quando, após o contato, separamos o pequeno globo do globo grande e quando, deixando o globo grande de agir sobre o pequeno globo, o fluido elétrico vai se distribuir uniformemente sobre a superfície do pequeno globo.

18.35 XXXV. Segundo Exemplo: $R = 4r$

Apliquemos as fórmulas anteriores a um exemplo no qual temos o resultado das experiências relatado na forma de uma Tabela na Seção 18.11; ao supor a ação do globo grande sobre o ponto de contato [como sendo] $= D$.

Como [estamos supondo agora] $R = 4r$, encontramos

$$A = 0,24 \qquad \text{e} \qquad B = 0,89 \ ;$$

assim

$$a = 3,00 + 0,07\frac{D}{D'} \qquad \text{e} \qquad b = -2,00 + 0,82\frac{D}{D'} \ ;$$

de onde resulta

$$\frac{D'}{D} = 1,36 \ .$$

Substituindo agora os valores de a, b e D na fórmula $D'(a/2 + b/3)$, que exprime a densidade média, encontraremos a densidade igual a $1,42D$, que é um pouco maior que a quantidade 1,30, fornecida (Seção 18.11) pelas experiências. Porém, é necessário observar que supomos a ação D do globo grande C igual à sua densidade média, como se o fluido elétrico estivesse distribuído uniformemente sobre esse globo; contudo, como ele é um pouco repelido pela ação do pequeno globo, sua ação sobre o ponto de contato será menor que a densidade média. Assim, na comparação da densidade média do pequeno globo e do grande, devemos ter, de acordo com essa observação, uma razão um pouco menor do que aquela que acabamos de encontrar, o que, como vemos, está de acordo com a experiência.

Para ter, de acordo com a densidade média D', a densidade do ponto A' na extremidade do eixo de um pequeno globo, é necessário, como já dissemos, que a ação de um pequeno glóbulo que fosse colocado em A' se equilibrasse em seu ponto de contato com a ação dos dois globos C e C', o que forneceria

$$\delta = 1,42D + 0,89D = 2,31D \ ,$$

quantidade essa que encontramos pela experiência (Seção 18.30), [como sendo dada por] $2,35D$, que não difere significativamente disso.

Se quiséssemos obter um valor mais exato, seria necessário fazer para o globo grande um cálculo análogo àquele que fizemos para o pequeno globo, para determinar dessa forma a ação sobre o ponto de contato A e equacionar as duas ações.

Capítulo 19

Observações sobre a Quinta Memória de Coulomb

19.1 Método Experimental para Determinar a Divisão de Cargas entre Dois Globos Condutores de Tamanhos Diferentes ao Entrarem em Contato

Na Seção 18.2 dessa Memória Coulomb eletriza um globo condutor a de raio R_a com um carga q, sendo esse globo apoiado pelo isolante I, como ilustrado na Figura 19.1 (a). Um segundo globo condutor g de raio R_g, também isolado da Terra, está inicialmente descarregado e afastado do globo a. Ele então coloca os dois globos em contato, Figura 19.1 (b). Após afastar os globos, o globo a fica com uma carga q_1 e o globo g com uma carga q_2, Figura 19.1 (c). Coulomb tem dois objetivos nessa experiência. O primeiro é obter a razão q_2/q_1 em função de R_2/R_1. O segundo é obter a razão entre as densidades superficiais de carga em função da razão entre os raios, ou seja, determinar $[q_2/(4\pi R_2^2)]/[q_1/(4\pi R_1^2)]$ em função de R_2/R_1.

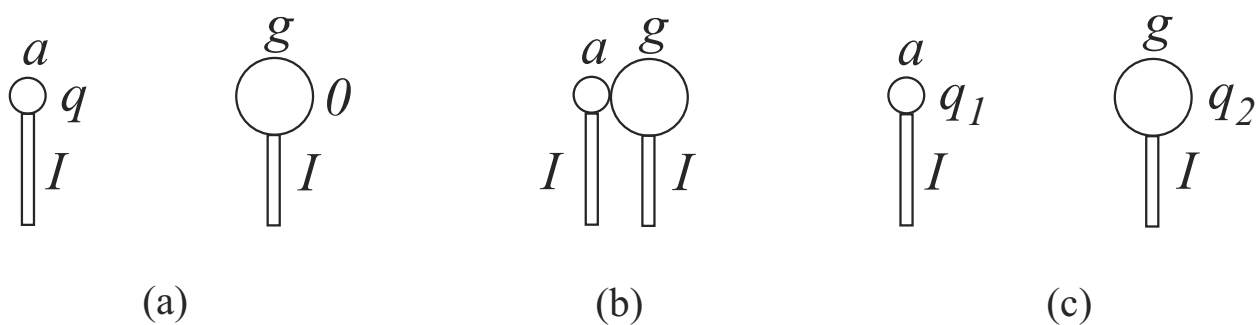



Figura 19.1: Ideia geral da experiência.

Na Figura 19.2 ilustro qualitativamente o procedimento de Coulomb. Ele utiliza a grande balança elétrica mostrada na Figura 1, Número 1. A marcação o indica a partir de onde ele vai medir a torção da parte inferior do fio preso à agulha $8b$, sendo S o ponto do micrômetro a partir de onde ele vai medir a torção da parte superior do fio, estando esse micrômetro no ponto 7 mostrado na Figura 1, Número 1. Estou supondo que o fio 78 e os pontos o e S estão inicialmente no mesmo plano vertical quando o fio não está torcido. A agulha $8b$

é feita de um isolante tendo um disco de papel dourado b em sua extremidade, sendo esse disco condutor preso verticalmente na agulha. A seta indica a orientação do micrômetro.

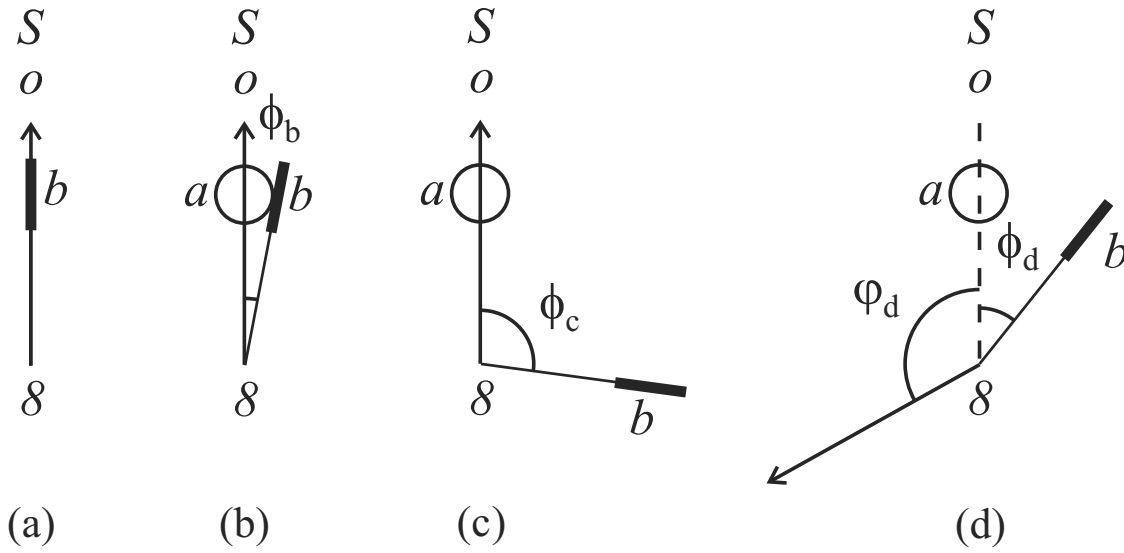



Figura 19.2: Preparação da experiência.

Na Figura 19.2 (a) o fio está distorcido. Em (b) estou supondo que o globo condutor a afastou um pouco o disco de papel b fazendo com que a agulha se afaste de um ângulo ϕ_b em relação à sua orientação natural. Nessa situação inicial o globo a e o disco de papel b estão descarregados. Em (c) eles são eletrizados com cargas de mesmo sinal, ocorrendo uma repulsão entre eles. No equilíbrio a agulha $8b$ fica então girada de um ângulo ϕ_c no sentido horário devido a essa repulsão, Figura 19.2 (c). Na Figura 19.2 (d) Coulomb gira o micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão no sentido anti-horário de um ângulo φ_d tal que a separação angular entre o globo eletrizado a e o disco de papel eletrizado b tenha um valor escolhido por ele dado por ϕ_d. A torção total do fio é dada por $\varphi_d + \phi_d$.

Nessa situação o globo eletrizado a é tocado por um outro globo condutor g que é manipulado pelo cabo isolante I, sendo que esse globo g está inicialmente descarregado, como ilustrado na Figura 19.3 (a). Após o globo g ser afastado da balança, o globo a e a agulha ficam distanciados entre si de um ângulo ϕ_e menor do que ϕ_d, sendo que o micrômetro continua torcido de um ângulo φ_d, Figura 19.3 (b). Coulomb então distorce o micrômetro no sentido horário até que o globo a e a agulha $8b$ fiquem afastadas do ângulo ϕ_d, como indicado na Figura 19.3 (c), sendo essa a mesma separação angular da Figura 19.2 (d). Vou supor que nesse instante o micrômetro fica torcido de um ângulo φ_e em relação à reta $8S$, Figura 19.3 (c). A torção total do fio nesse caso é dada por $\phi_d + \varphi_e$.

Algumas vezes o micrômetro tem de ser distorcido no sentido anti-horário chegando até mesmo a ultrapassar a reta $8S$, como indicado na Figura 19.4 (c). Isso ocorre quando sobra bem pouca carga no globo a, tal que, para trazer a agulha de volta à separação ϕ_d da Figura 19.2 (d), é necessário distorcer bastante o micrômetro. A torção φ_e do micrômetro nesse caso está à direita da reta $8S$. A torção total do fio nesse caso da Figura 19.4 (c) é dada por $\phi_d - \varphi_e$, sendo que estamos supondo apenas o módulo de φ_e, não importando se o micrômetro está torcido no sentido horário ou anti-horário em relação à reta $8S$.

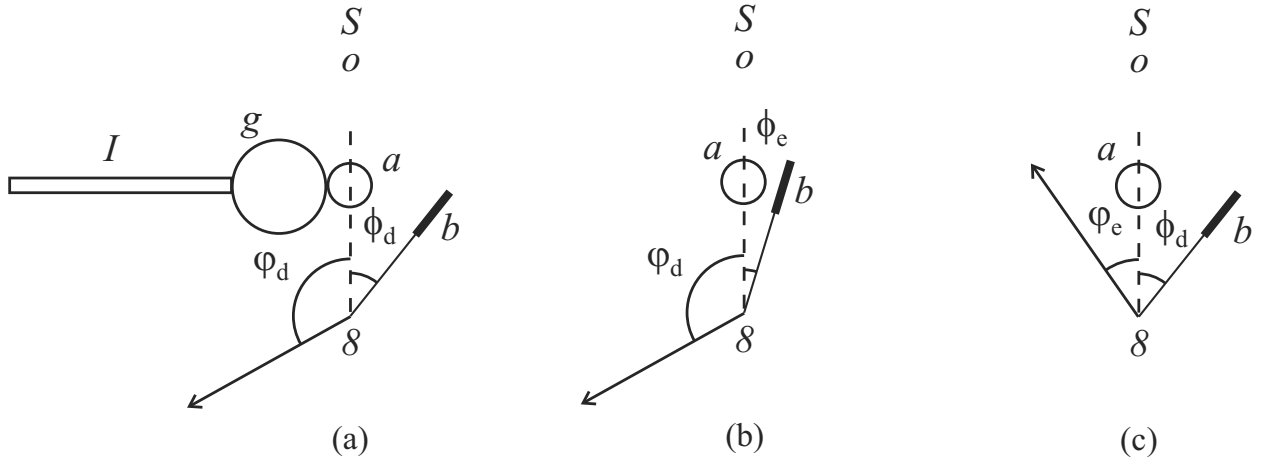



Figura 19.3: Parte final da primeira experiência.

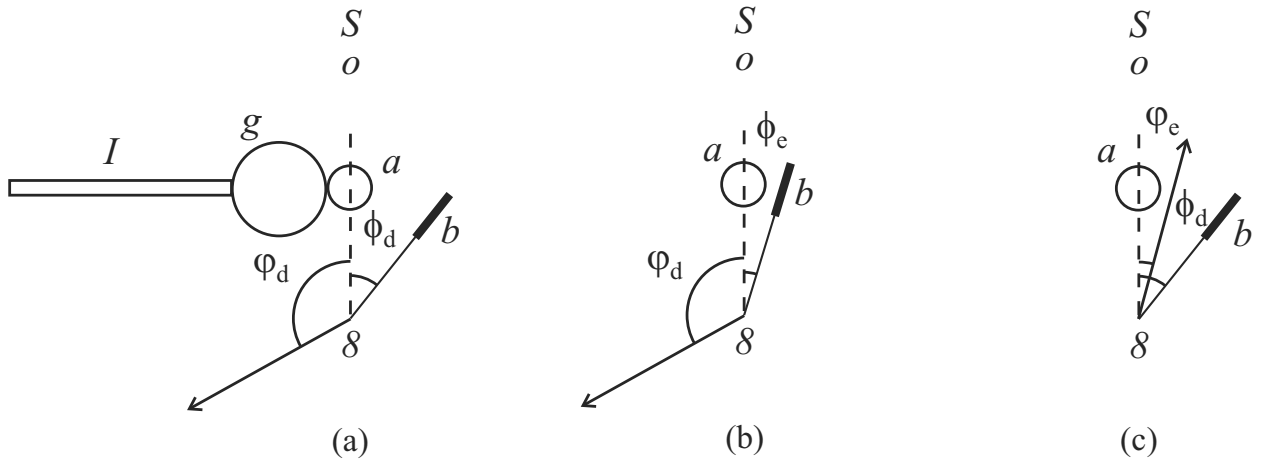



Figura 19.4: Parte final da primeira experiência quando o ponteiro do micrômetro ultrapassa a reta $8S$.

19.2 Comparação das Medidas de Coulomb com os Cálculos Teóricos de Poisson

Apresento na Tabela a seguir os resultados experimentais de Coulomb dados na Seção 18.11 comparados com os cálculos de Poisson publicados mais de 20 anos após Coulomb ter apresentado suas medidas.[694] Sendo Q a quantidade total de carga ou de eletricidade em um globo condutor de raio R, sua densidade superficial de carga D é dada por $D = Q/(4\pi R^2)$. Inicialmente tínhamos o globo a (ou o globo 1) com a carga q e o globo g (ou o globo 2) estava descarregado. Após o contato e a separação, o globo a ficou com a carga Q_1 e o globo 2 com a carga Q_2. Vamos supor que temos globos 1 e 2 de raios R_1 e R_2 com $R_2 \geq R_1$. Após terem sido colocados em contato e separados, suas cargas são Q_1 e Q_2, respectivamente. A razão entre seus raios é dada por R_2/R_1, a razão entre suas áreas (ou entre suas superfícies) é dada por $(4\pi R_2^2)/(4\pi R_1^2) = R_2^2/R_1^2$. Já a razão entre as densidades superficiais de carga do globo menor para o globo maior é dada por

[694][Poisson, 1812b, págs. 60-62], [Potier, 1884, pág. 198] e [Gillmor, 1971a, pág. 203].

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{Q_1/(4\pi R_1^2)}{Q_2/(4\pi R_2^2)} = \frac{Q_1/R_1^2}{Q_2/R_2^2} = \frac{Q_1 R_2^2}{Q_2 R_1^2} . \tag{19.1}$$

Com $R_2 > R_1$ Coulomb obteve experimentalmente $Q_2 > Q_1$, obtendo ainda $D_2 < D_1$. Na última coluna dessa Tabela aparece a diferença percentual entre o valor V_c calculado por Poisson e o valor V_m medido por Coulomb, ou seja, $[(V_c - V_m)/V_c] \cdot 100\%$.

Razão entre os globos		Razão entre as densidades elétricas do pequeno e do grande globo, ou seja, $D_1/D_2 = (Q_1 R_2^2)/(Q_2 R_1^2)$		
Raios R_2/R_1	Superfícies $(R_2/R_1)^2$	Observada por Coulomb	Calculada por Poisson	Diferença percentual
1	1	1	1	0%
2	4	1,08	1,16	+ 7%
4	16	1,30	1,32	+ 1%
8	64	1,65	1,44	−15%
∞	∞	2,00	$\pi^2/6 = 1,65$	$< -21\%$

Coulomb obteve a última linha dessa Tabela como um caso limite da Seção 18.9 na qual um globo com 8 polegadas de diâmetro entrou em contato com outro globo tendo 2 linhas de diâmetro (ou seja, 1/6 de polegada), tal que a razão entre seus raios é de 48/1 e a razão entre suas superfícies é de 2304/1. O valor 2 para a razão entre suas densidades superficiais de carga é então um limite superior para o caso em que a razão entre seus raios ou entre suas superfícies tende a infinito.

É impressionante que as medidas de Coulomb só se afastem de alguns pontos percentuais dos valores teóricos de Poisson que só foram calculados 20 anos após Coulomb. Coulomb não podia ter feito esses cálculos teóricos exatos com as ferramentas matemáticas de que dispunha. Portanto, não podia prever de antemão os valores que veio a obter experimentalmente. Tudo isso mostra a precisão de suas medidas e sua destreza manual, principalmente levando em conta a dificuldade e delicadeza dessas experiências. Ver também a discussão apresentada na Subseção 11.5.4.

19.3 Método Experimental para Determinar a Distribuição de Cargas de Dois Globos Eletrizados Enquanto Estão em Contato

Na Seção 18.12 Coulomb determinou experimentalmente a densidade superficial de carga em diferentes pontos de dois globos eletrizados enquanto estavam em contato. Inicialmente considerou dois globos condutores de mesmo raio e isolados da Terra. Para determinar a quantidade de carga em pontos diferentes de qualquer globo utilizou seu plano de prova mostrado na Figura 3 na página 305. A Figura 19.5 ilustra a colocação do disco condutor e do plano de prova em um ponto de um dos globos localizado a 90° do ponto de contato entre os globos eletrizados.

Nas experiências de Coulomb temos dois globos condutores de raios R_1 e R_2, com a razão entre os raios dada por R_2/R_1. Eles estão em contato, eletrizados e isolados da Terra. Na

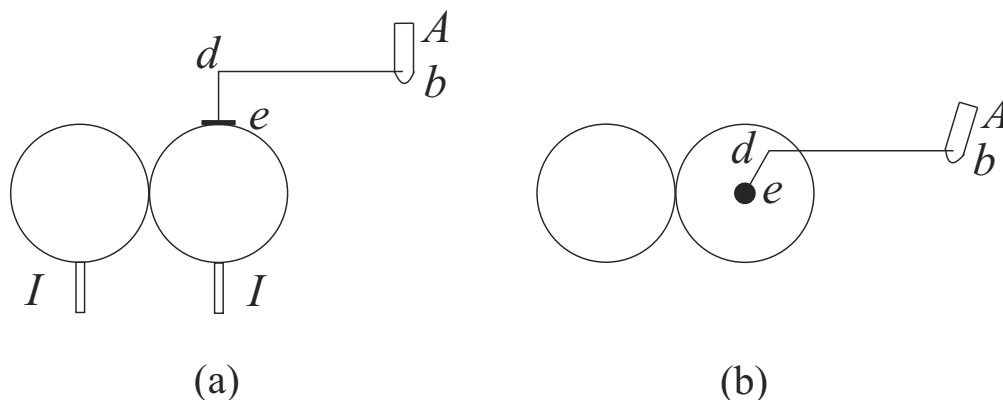



Figura 19.5: Dois globos condutores de mesmo tamanho, eletrizados, em contato e apoiados por suportes isolantes I. Disco condutor e do plano de prova colocado a 90° do ponto de contato. (a) Vista lateral. (b) Vista de cima.

quarta experiência, Seção 18.13, tínhamos $R_2/R_1 = 1$. Na quinta experiência, Seção 18.14, tínhamos $R_2/R_1 = 2$. Na sexta experiência, Seção 18.15, tínhamos $R_2/R_1 = 4$.

Coulomb mediu a densidade superficial de carga (ou seja, a carga por unidade de área) de um ponto do globo menor localizado em uma certa separação angular θ do ponto de contato. Ou seja, mediu a densidade superficial D_θ sempre sobre o globo menor, sendo D_θ a quantidade de carga por unidade de área em função do ângulo θ, onde esse ângulo é medido em relação ao ponto de contato. Em particular, fez medidas a 30°, 60°, 90° e 180° do ponto de contato, Fig 19.6. Em seus cálculos normalizou essas medidas pela densidade superficial de carga que havia em um ponto desse mesmo globo pequeno localizado a 90° do ponto de contato.

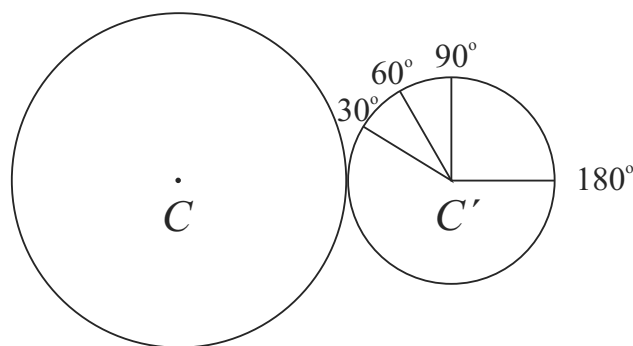



Figura 19.6: Dois globos condutores de tamanhos diferentes em contato, eletrizados e isolados da Terra. Coulomb comparou as densidades superficiais de carga sobre o pequeno globo em pontos a 30°, 60°, 90° e 180° do ponto de contato.

Apresento a seguir uma Tabela com as medidas de Coulomb e apresentados na Seção 18.16 comparadas com os cálculos teóricos de Poisson feitos 20 anos depois.[695] Na última coluna dessa Tabela aparece a diferença percentual entre o valor V_c calculado por Poisson e o valor V_m medido por Coulomb, ou seja, $[(V_c - V_m)/V_c] \cdot 100\%$.

[695] [Poisson, 1812b, págs. 76-80] e [Potier, 1884, pág. 204].

Razão entre os raios	Distância angular do ponto observado até o ponto de contato	Razão entre a densidade elétrica do ponto observado para o ponto a 90° do contato, ou seja, D_θ/D_{90°		
R_2/R_1	θ	Observado por Coulomb	Calculado por Poisson	Diferença percentual
1	30°	$1/4,80 = 0,21$	$1/5,857 = 0,171$	$-22,8\%$
1	60°	$1,25 = 0,80$	$1/1,342 = 0,746$	$-7,2\%$
1	90°	1	1	0%
1	180°	$1/0,95 = 1,05$	$1/0,877 = 1,14$	$+7,9\%$
2	60°	$1/1,70 = 0,59$	$1/1,80 = 0,556$	$-6,1\%$
2	90°	1	1	0%
2	180°	$1/0,75 = 1,33$	$1/0,741 = 1,35$	$+1,5\%$
4	90°	1	1	0%
4	180°	$1/0,70 = 1,43$	$1/0,599 = 1,67$	$+14,4\%$

Novamente há uma concordância muito boa entre as medidas experimentais de Coulomb e os cálculos teóricos de Poisson, principalmente levando em conta o valor extremamente pequeno das forças envolvidas. Além disso, ninguém antes de Coulomb havia tentado estimar essas grandezas. Os cálculos teóricos precisos vieram apenas 20 anos depois de suas medidas com a publicação da obra de Poisson. Ver também a discussão apresentada na Subseção 11.5.4.

19.4 Método Experimental para Determinar a Distribuição de Cargas de Dois Globos Eletrizados Enquanto Estão em Contato e Após Terem Sido Afastados

Na décima experiência da Seção 18.30 Coulomb colocou dois globos condutores C' e C em contato enquanto estavam eletrizados e isolados da Terra, Figura 19.7.

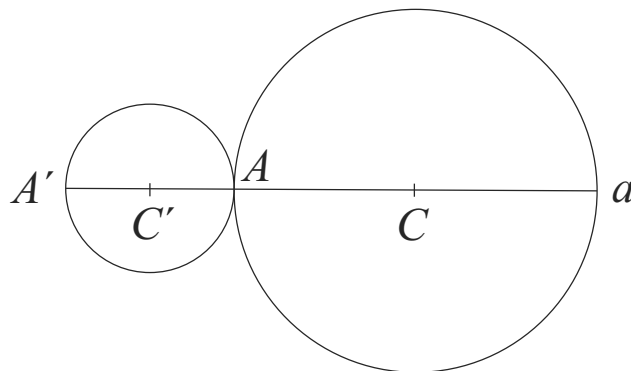



Figura 19.7: Dois globos de centros C' e C, em contato no ponto A.

Seja R o raio do globo grande e r o raio do globo pequeno. Coulomb mede a densidade superficial de carga δ no ponto A' da extremidade do globo menor enquanto estão em contato.

Em seguida afasta os dois globos eletrizados e mede a densidade superficial média de carga D do globo grande. Caso esse globo grande esteja eletrizado com uma carga total Q, essa densidade superficial é dada por $D = Q/(4\pi R^2)$. Compara então essas duas densidades de carga.

Na próxima Tabela apresento os resultados experimentais de Coulomb comparados com os cálculos teóricos de Poisson.[696] Na última coluna dessa Tabela aparece a diferença percentual entre o valor V_c calculado por Poisson e o valor V_m medido por Coulomb, ou seja, $[(V_c - V_m)/V_c] \cdot 100\%$.

R/r	δ/D observada por Coulomb	δ/D calculada por Poisson	Diferença percentual
1	1,27	1,32	$+3,8\%$
2	1,55	1,83	$+15,3\%$
4	2,35	2,48	$+5,2\%$
8	3,18	3,09	$-2,9\%$
∞	$> 4,00$	4,27	$< 6,3\%$

Novamente há uma concordância muito boa entre os valores medidos por Coulomb e os valores teóricos calculados com grande precisão por Poisson vários anos depois dessas experiências. Ver também a discussão apresentada na Subseção 11.5.4.

[696][Poisson, 1812b, pág. 66], [Potier, 1884, pág. 219], [Gillmor, 1971a, pág. 204] e [Heilbron, 1999, pág. 497].

Capítulo 20

Sexta Memória sobre Eletricidade: Pesquisas Adicionais sobre a Distribuição do Fluido Elétrico entre Vários Corpos Condutores — Determinação da Densidade Elétrica nos Diferentes Pontos da Superfície Desses Corpos

Por Coulomb[697]

20.1 I

Na nossa *Quinta Memória*,[698] da qual essa aqui é a continuação, tentamos determinar a maneira pela qual o fluido elétrico se divide entre dois globos [condutores] de diâmetros diferentes colocados em contato, assim como entre três globos de mesmo diâmetro. Ao mesmo tempo determinamos pela experiência e pela teoria a densidade elétrica[699] de cada ponto da superfície desses globos quando estão em contato. Agora vamos buscar:[700]

1. Como a eletricidade se distribui entre um número qualquer de globos [de tamanhos] iguais colocados em contato, de maneira que todos os centros estejam ao longo de uma linha reta.

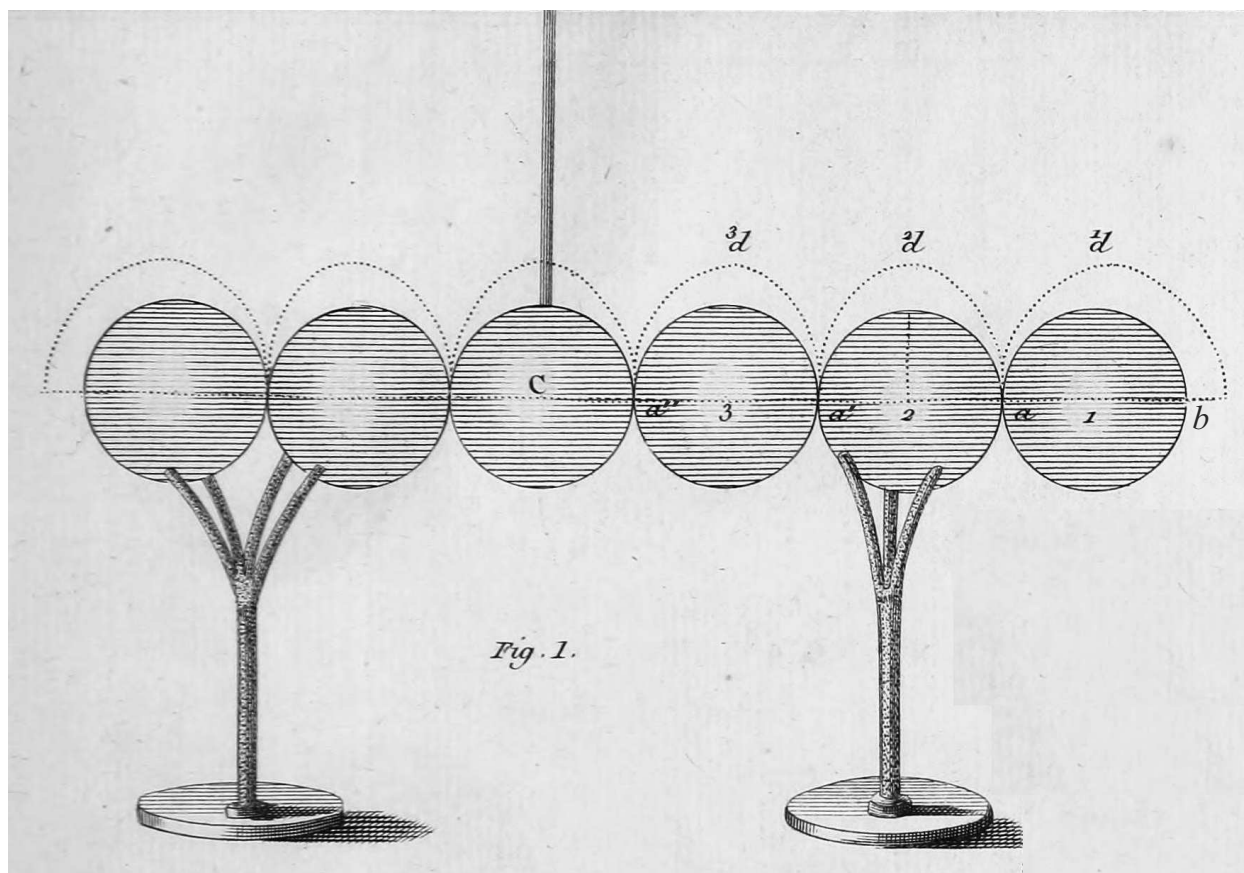
2. Como o fluido elétrico se distribui sobre as diferentes partes de um cilindro eletrizado.

3. Como ele se distribui entre um globo grande e uma sequência de pequenos globos em contato com esse globo grande.

[697]Esse trabalho foi apresentado em 1788 à Academia de Ciências da França, sendo publicado em 1791, [Coulomb, 1791].
[698]Essa Memória está traduzida no Capítulo 18.
[699]Ou seja, a quantidade de carga por unidade de área.
[700]Sempre supondo corpos condutores eletrizados em contato e isolados da Terra.

4. Em qual razão o fluido elétrico se divide entre um globo grande e cilindros de diâmetros diferentes e de comprimentos diferentes, colocados sucessivamente em contato com o globo.

20.2 II. *Determinação da Distribuição do Fluido Elétrico entre Seis Globos Iguais Colocados em Contato*

Formei uma linha de seis globos de duas polegadas de diâmetro [5,4 cm], que podem ser separados à vontade, sendo que um deles, C, Figura 1, é apoiado por um pequeno cilindro de goma-laca,[701] podendo ser colocado na balança elétrica ou na fila de globos.

Após ter eletrizado, de acordo com os métodos indicados no Volume de 1787,[702] o pequeno disco de papel que termina a agulha da balança, eletrizo[703] os seis globos que são colocados (Figura 1) sobre suportes dielétricos.[704] Em seguida coloco alternadamente o globo C como sendo o primeiro e o segundo da fila e em cada teste o apresento à agulha na balança, a qual tenho o cuidado de trazer de volta à mesma distância do centro do globo C. Depois faço a mesma operação colocando o globo [C] alternadamente como sendo o primeiro e o terceiro na fila. Por essas operações, determino a razão entre as quantidades de eletricidade contidas

[701]Ver a Nota de rodapé 383 na página 199.
[702]Ver [Coulomb, 1789]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 18.
[703]Com uma carga de mesmo sinal que aquela contida na agulha da balança elétrica.
[704]Ver a Nota de rodapé 433 na página 219.

no primeiro, no segundo e no terceiro globo da fila.

20.2.1 Primeira Experiência. *O globo C Colocado em Primeiro Lugar na Fila, Comparado com o Mesmo Globo Colocado em Segundo Lugar na Fila*

Em cada teste, quando o globo C, após ter sido retirado da fila, era colocado na balança, trazíamos a agulha, pela força de torção [do fio de suspensão], a 30° do centro do globo C.[705]

Primeiro teste. O globo C colocado em 2, ou sendo o segundo na fila, e apresentado em seguida à balança [elétrica], repeliu a agulha, que foi trazida de volta a 30° do centro desse globo por uma força de torção, com tudo incluído,[706] de 44°.

Segundo teste. Colocado em primeiro lugar na fila ... 64°.[707]

Terceiro teste. Colocado em segundo lugar ... 40°.

Quarto teste. Colocado em primeiro lugar ... 54°.

Quinto teste. Colocado em segundo lugar ... 34°.

20.2.2 Segunda Experiência. *O globo C Colocado em Primeiro Lugar na Fila, Comparado com o Mesmo Globo Colocado em Terceiro Lugar*

Primeiro teste. O globo C colocado em terceiro lugar na fila; o restante como na experiência anterior; a força de torção é de 81°.

Segundo teste. Colocado em primeiro lugar na fila ... 111°.

Terceiro teste. Colocado em terceiro lugar ... 61°.

Quarto teste. Colocado em primeiro lugar ... 85°.

Quinto teste. Colocado em terceiro lugar ... 51°.

20.3 III. *Resultado das Duas Experiências Anteriores*

Os cinco testes em cada experiência foram feitos em intervalos de tempo aproximadamente iguais, tal que ao pegar uma média entre o primeiro e o terceiro teste, por exemplo, essa média possa ser comparada com o segundo teste. A diferença do resultado fornecido pela experiência entre o primeiro e o terceiro teste vem da diminuição da eletricidade que é ocasionada nesse intervalo de tempo pelo contato com o ar, como já observamos nas Memórias anteriores.

Na primeira experiência, ao pegar um valor médio entre o primeiro e o terceiro teste comparado com o segundo, encontraremos que a quantidade de eletricidade contida no primeiro globo está para a quantidade contida no segundo globo

$$:: 64 : 42 \qquad \text{ou} \qquad :: 1,52 : 1,00 \ .$$ [708]

[705] Apresento na Seção 21.1 uma ilustração do procedimento experimental de Coulomb.

[706] Isto é, levando em conta a torção da agulha presa à parte inferior do fio de suspensão e também a torção do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão, ver a Seção 21.1.

[707] Essas reticências significam que o restante foi como no teste anterior.

[708] Sejam Q_1 e Q_2 as quantidades totais de eletricidade contidas no primeiro e no segundo globo, respectivamente, onde o primeiro globo é o que está na extremidade da direita da fila de seis globos e o segundo globo aquele logo em seguida a esse. Coulomb encontrou que

Uma média entre o segundo e o quarto teste, comparada com o terceiro, fornecerá essa razão :: 1,47 : 1,00.

Uma média entre o terceiro e o quinto, comparada ao quarto, fornecerá essa razão :: 1,46 : 1,00.

Assim ao pegar um valor médio entre esses três resultados, encontraremos que em nossa fila de seis globos, a quantidade de eletricidade do primeiro globo está para a quantidade do segundo globo assim como 1,48 está para 1,00.

Um cálculo análogo entre o primeiro e o terceiro globo fornecerá, de acordo com os testes da segunda experiência, que a quantidade de eletricidade contida no primeiro globo na fila de seis globos, está para a quantidade contida no terceiro globo :: 1,56 : 1,00. De maneira que a massa do fluido elétrico diminui de aproximadamente um terço do primeiro para o segundo globo, e somente de 1/15 do segundo ao terceiro.

20.4 IV. *Aplicação da Teoria a Essa Experiência*

É necessário lembrar o seguinte em todas as Seções dessa Memória em relação à teoria:

1. Que o fluido elétrico atua em razão inversa do quadrado das distâncias entre suas partes.

2. Que ele se distribui sobre a superfície dos corpos, mas não penetra ao menos de uma maneira perceptível no interior dos corpos.

Provamos a primeira proposição em nossa Primeira Memória, *Volume de 1785*; a segunda [proposição foi provada] na Quarta Memória, impressa em 1786.[709] Podemos confirmá-la por uma nova experiência que parece decisiva, aqui vai no que ela consiste. Isolamos um corpo condutor que depois é eletrizado. Em seguida formamos ao redor dele uma cobertura dividida em duas partes, que ao serem reunidas deixam uma pequena folga entre ela e o corpo.[710] Para o sucesso da experiência pouco importa se essa cobertura tem ou não o mesmo formato que o corpo. Se eletrizarmos o corpo colocado sobre um isolante e o incluirmos entre essas duas partes da cobertura apoiadas por dois bastões dielétricos, ao retirar as duas partes da cobertura encontraremos, por meio de nossos eletrômetros pequenos suspensos por fios de seda, que toda a eletricidade do corpo passou para a cobertura e que o corpo ou não conserva nada dela, ou conserva apenas uma parte imperceptível.[711]

Sendo admitidas essas duas proposições, para determinar por aproximação a quantidade média de eletricidade que cada globo contém em nossa fila de seis globos, suponho, para

---

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{64}{42} = \frac{1,52}{1,00} \; .$$

[709] Essas Memórias estão traduzidas nos Capítulos 10 e 16, respectivamente.

[710] Essa cobertura é feita de um material condutor e deve tocar o corpo eletrizado em seu interior em pelo menos um ponto.

[711] Algumas vezes essa experiência é citada como sendo a experiência dos hemisférios de Cavendish. Embora Henri Cavendish (1731-1810) tenha feito uma experiência análoga em 1771, antes de Coulomb, seus manuscritos só foram publicados por Maxwell em 1879, [Gillmor, 1971a, págs. 206-210], [Blondel and Wolff, 2008a], [Blondel and Wolff, 2009], e [Falconer, 2017]. Coulomb, portanto, foi a primeiro a tornar conhecida essa experiência bem importante.

ter uma primeira aproximação, que a massa elétrica de cada um dos globos está distribuída uniformemente sobre a superfície desses globos,[712] mas que ela é diferente para cada globo, de maneira que a ação elétrica de todos os globos sobre cada ponto de contato esteja em equilíbrio. Com essa suposição, a ação de uma superfície esférica, na qual todos os pontos possuem a mesma densidade D,[713] atuando sobre um ponto da superfície cuja massa elétrica fosse μ, seria representada por $2\pi D\mu$, sendo π a razão da circunferência para o diâmetro.[714] Porém se a mesma superfície esférica cujo raio é R atua sobre um ponto afastado da superfície pela quantidade a, a ação sobre esse ponto será representada por $4\pi D\mu R^2 : (R+a)^2$.[715] Assim, ao calcular em nossa experiência, Figura 1, a ação dos seis globos sobre os pontos de contato a e a',[716] teremos, ao denominar δ_1 à densidade [superficial] média do fluido elétrico sobre o globo 1, δ_2 à densidade média sobre o globo 2; δ_3 à densidade média sobre o globo 3, as duas equações a seguir:[717]

Primeira equação, equilíbrio em a:

$$\delta_1 = \delta_2 + \frac{2\delta_3}{3^2} + \frac{2\delta_3}{5^2} + \frac{2\delta_2}{7^2} + \frac{2\delta_1}{9^2} \ .$$

Segunda equação, equilíbrio em a':

---

[712]Ou seja, Coulomb está supondo que a carga elétrica total de cada globo está distribuída uniformemente sobre sua superfície.

[713]Ou seja, D é a densidade superficial de eletricidade, isto é, a quantidade de carga por unidade de área.

[714]No original, [Coulomb, 1791, pág. 621]:

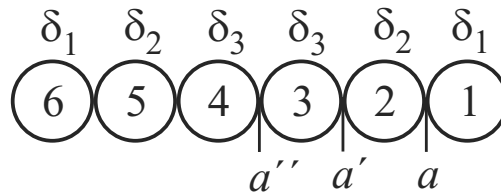
> Dans cette supposition, l'action d'une surface sphérique, dont tous les points ont la même densité D, agissant sur un point de la surface dont la masse électrique seroit μ, seroit représentée par $\Pi D\mu$; Π étant le rapport de la circonférence au rayon.

Coulomb foi um dos autores que durante o século XVIII definia Π ou π como sendo a razão da circunferência de um círculo para seu raio, isto é, com $\Pi = \pi = 6,28318...$. Para tornar o texto de Coulomb inteligível para o leitor moderno e seguindo o procedimento de Potier, [Potier, 1884, pág. 233], substituí os símbolos Π ou π de Coulomb por 2π, enfatizando a definição moderna de π como sendo a razão da circunferência para o diâmetro, isto é, com $\pi = 3,14159$...

Apresento uma discussão dessa expressão $2\pi D\mu$ na Seção 21.2 na página 418.

[715]Ver as Notas de rodapé 664 e 665.

[716]Pela Figura 1 vem que o ponto a está localizado no contato entre o globo 1 da extremidade direita e o globo 2, o ponto a' é o ponto de contato entre os globos 2 e 3, enquanto que o ponto a'' é o ponto de contato entre o globo 3 e o globo C.

[717]Essas equações podem ser obtidas usando os resultados da Nota de rodapé 664 da página 321 observando ainda que, por simetria, $\delta_4 = \delta_3$, $\delta_5 = \delta_2$ e $\delta_6 = \delta_1$, como mostrado na Figura dessa Nota de rodapé na qual o ponto a é o ponto de contato entre os globos 1 e 2, o ponto a' é o ponto de contato entre os globos 2 e 3, enquanto que o ponto a'' é o ponto de contato entre os globos 3 e 4:

Ou seja, a força para a esquerda exercida pela esfera 1 sobre uma carga μ localizada no ponto a, contato entre as esferas 1 e 2, é equilibrada pela força para a direita exercida pelas esferas 2 a 6 sobre a mesma carga μ.

Já a força para a esquerda exercida pelas esferas 1 e 2 sobre uma carga μ localizada no ponto a', contato entre as esferas 2 e 3, é equilibrada pela força para a direita exercida pelas esferas 3 a 6.

$$\frac{2}{3^2}\delta_1 = -\delta_2 + \delta_3 + \frac{2\delta_3}{3^2} + \frac{2\delta_2}{5^2} + \frac{2\delta_1}{7^2} \ .$$

Essas duas equações se reduzem ao seguinte:

Primeira equação:

$$0,98\delta_1 = 1,04\delta_2 + 0,29\delta_3 \ ,$$

segunda equação:

$$0,18\delta_1 = -0,92\delta_2 + 1,22\delta_3 \ ;$$

de onde obtemos $\delta_1 = 1,33\delta_2$ e $\delta_1 = 1,42\delta_3$.

Encontramos pela experiência, $\delta_1 = 1,48\delta_2$ e $\delta_2 = 1,56\delta_3$; assim a experiência fornece a razão da densidade média do fluido elétrico do primeiro globo para os outros dois, de um décimo aproximadamente maior do que a teoria. Já havíamos obtido esse resultado na Memória anterior para três globos iguais colocados em linha reta.[718]

É fácil de ver a que se deve em sua maior parte a diferença dos resultados entre o cálculo que acabamos de fornecer e a experiência. No cálculo anterior supusemos que a densidade elétrica é distribuída uniformemente sobre cada globo; porém, na realidade, essa densidade é nula, ou ao menos imperceptível, em todos os pontos de contato entre os globos, como provamos no *Volume de 1787, página 437 e seguintes*.[719] No globo 2, Figura 1, assim como em todos os outros, exceto o primeiro e o último da fila, a densidade elétrica cresce desde o ponto de contato até o ponto d_2, colocado no vértice do equador, onde ela tem seu valor *máximo*. No primeiro e no último globo da fila, essa densidade cresce desde o ponto de contato até o ponto b, o polo oposto.[720] As linhas pontilhadas em nossa Figura fornecem aproximadamente a forma da curva das densidades.

Se procurarmos agora determinar o equilíbrio no ponto a, ao supor que toda a massa do fluido elétrico do globo 2 está reunida no ponto d_2 ou no equador,[721] e que a massa do fluido elétrico do globo 1 é uma quantidade média entre aquela reunida no ponto d_1 e aquela reunida no ponto b; sendo $4\pi\delta r^2$ a quantidade do fluido elétrico espalhada sobre a superfície de cada globo, onde r é o raio do globo e δ a densidade [superficial] média do fluido elétrico, ou aquela [densidade] que ocorreria caso o fluido elétrico de cada globo se espalhasse uniformemente sobre a superfície desse globo, teríamos

$$\frac{4\pi\delta_2}{2^{3/2}} = 1,40\pi \cdot \delta_2$$

como sendo a ação do fluido elétrico do globo 2 sobre o ponto a, com a suposição de que todo esse fluido estivesse concentrado no equador; sendo essa ação avaliada na direção do

[718] Ver as Seções 18.22 e 18.23.

[719] [Coulomb, 1789, página 437 e seguintes]. Ver a Seção 18.12.

[720] Esse ponto b mencionado por Coulomb não estava representado em sua Figura original. Indiquei esse ponto na Figura 1.

O trecho daqui para a frente até o final dessa Seção não foi incluído na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[721] Isto é, Coulomb vai supor que toda a carga elétrica do globo 2 está distribuída ao longo da linha do equador do globo 2, com o plano do equador sendo ortogonal à reta passando pelos centros das esferas alinhadas.

eixo $a1$. Podemos supor, sem erro perceptível, que os outros globos afastados do ponto de contato sobre o qual calculamos o equilíbrio da ação atuam como se a massa de seu fluido elétrico estivesse no centro de cada globo.

Quanto ao globo 1, em relação ao qual queremos ter a ação em relação ao ponto a, sendo δ_1 sua densidade média, caso a massa de seu fluido estivesse concentrada no ponto d_1 do equador, sua ação seria igual a $1,40\pi\delta_1$; caso ela estivesse concentrada no ponto b, ela seria $1,00\pi\delta_1$: pegando a média entre essas duas quantidades, ela será $1,20\pi\delta_1$. Podemos agora formar com essa nova suposição duas equações; a primeira, que exprime o equilíbrio no ponto a, a segunda, que exprime o equilíbrio no ponto a'.

Primeira equação:

$$0,60\delta_1 = 0,70\delta_2 + 0,22\delta_3 + 0,08\delta_3 + 0,04\delta_2 + 0,02\delta_1 \ ;$$

segunda equação:

$$0,22\delta_1 = -0,70\delta_2 + 0,70\delta_3 + 0,22\delta_3 + 0,08\delta_2 + 0,04\delta_1 \ ;$$

que ao serem reduzidas fornecem

$$\left(\frac{58}{74} + \frac{18}{62}\right)\delta_1 = \left(\frac{30}{74} + \frac{92}{62}\right)\delta_3 \ ,$$

de onde $\delta_3 = 1,75\delta_1$, [sendo que] a experiência nos forneceu $\delta_3 = 1,56\delta_1$. Assim, com nossa suposição nova, o cálculo fornece δ_3 aproximadamente um oitavo maior do que a experiência. Em nossa primeira suposição com o fluido elétrico distribuído uniformemente sobre cada globo, encontramos $\delta_3 = 1,42\delta_1$. Porém, assim como provamos em nossa Memória anterior, o fluido elétrico distribui-se sobre a superfície dos globos de acordo com uma forma média entre essas duas suposições, sendo nula a densidade no ponto de contato e não estando a massa do fluido totalmente reunida no equador. Assim, a razão fornecida pela experiência deve ser aproximadamente uma quantidade média entre os resultados do cálculo de nossas duas suposições. Temos, pela primeira suposição com o fluido elétrico distribuído uniformemente sobre a superfície de cada globo, $\delta_3 = 1,42\delta_1$; pela segunda suposição com o fluido concentrado no equador, $\delta_3 = 1,75\delta_1$, o que fornece para a quantidade média, $\delta_3 = 1,58\delta_1$: a experiência fornece 1,56. A correção indicada pelo cálculo dessa Seção aplica-se facilmente a toda a teoria dessa Memória.

20.5 V. Terceira Experiência. *Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico se Distribui entre Doze Globos Iguais de Duas Polegadas de Diâmetro Colocados em Contato ao longo da Mesma Reta*

Os detalhes que apresentamos para explicar a experiência anterior são suficientes, creio, para que se entendam os procedimentos que devem ser seguidos; assim, para não aumentar inutilmente essa Memória, só apresentaremos os resultados nas experiências análogas. Ao longo de uma linha [reta], formada por doze globos de 2 polegadas de diâmetro [5,4 cm], encontramos que a quantidade de fluido elétrico contida pelo primeiro globo está para a quantidade contida no segundo :: 1,50 : 1,00. Ao comparar o primeiro globo com o sexto, ou com aquele do meio, encontramos que a quantidade de fluido elétrico adquirida pelo primeiro globo está para aquela adquirida pelo sexto :: 1,70 : 1,00.

20.6 VI. Quarta Experiência. *Distribuição do Fluido Elétrico entre Vinte e Quatro Globos de 2 Polegadas de Diâmetro Colocados em Contato sobre uma Mesma Reta*

Ao comparar sempre pelo mesmo método o primeiro globo com o segundo, encontrei que a quantidade de eletricidade contida no primeiro globo estava para aquela contida no segundo :: 1,56 : 1,00. Ao comparar o primeiro e o décimo segundo, ou aquele do meio, encontrei que a quantidade de eletricidade contida no primeiro globo da fila estava para aquela do globo do meio :: 1,75 : 1,00.

20.6.1 *Resultado das Duas Últimas Experiências*

Resulta dessas duas experiências que, qualquer que seja o número de globos colocados em contato sobre uma linha reta, a densidade média varia consideravelmente do primeiro para o segundo globo, mas que em seguida ela varia muito lentamente do segundo até aquele do meio: na quarta experiência, tínhamos uma linha formada de 24 globos. A densidade média do primeiro para o segundo globo, diminuiu na razão de 1,56 para 1,00; porém, do segundo ao décimo segundo, ela variou apenas na razão de 1,75 para 1,56.[722]

Se quisermos aplicar aqui os métodos de aproximação anteriores, consideremos inicialmente a linha formada de doze globos. Ao denominar δ_1 à densidade média do primeiro globo, δ_2 àquela do segundo, δ_3 àquela do terceiro, δ_4 àquela do quarto, etc. teremos para a primeira equação que exprime o equilíbrio no ponto a:

$$\delta_1 = \delta_2 + \frac{2}{3^2}\delta_3 + \frac{2}{5^2}\delta_4 + \frac{2}{7^2}\delta_5 + \frac{2}{9^2}\delta_6 + \frac{2\delta_6}{11^2} + \frac{2\delta_5}{13^2} + \frac{2\delta_4}{15^2} + \frac{2\delta_3}{17^2} + \frac{2\delta_2}{19^2} + \frac{2\delta_1}{21^2} \ .$$

Mas como as densidades desde o segundo globo até aquele do meio variam lentamente e, além disso, como os coeficientes diminuem de acordo com uma série bem convergente na medida em que nos afastamos de δ_2, podemos, sem grande erro, supor $\delta_3, \ \delta_4 = \delta_2$;[723] de onde ao formar a série, teremos muito aproximadamente $\delta_1 = 1,41\delta_2$; quantidade menor aproximadamente de um décimo que $\delta_1 = 1,55\delta_2$ fornecido pela experiência, diferença essa produzida, assim como explicamos na Seção 20.3, pelo fluido condensado no último globo na extremidade do eixo; sendo que nos outros [globos] é no equador que ocorre o *máximo* da condensação.

Para determinar agora a quantidade de eletricidade que o sexto globo contém, em relação ao primeiro, formo uma Tabela de cinco equações de acordo com o método da Seção 20.4, Tabela essa que exprime o estado de equilíbrio em todos os pontos de contato.

Aqui vão essas cinco equações:

No ponto a:

$$-\delta_1 + \delta_2 + \frac{2}{3^2}\delta_3 + \frac{2}{5^2}\delta_4 + \frac{2}{7^2}\delta_5 + \frac{2}{9^2}\delta_6 + \frac{2}{11^2}\delta_6 + \frac{2}{13^2}\delta_5 + \frac{2}{15^2}\delta_4 + \frac{2}{17^2}\delta_3 + \frac{2}{19^2}\delta_2 + \frac{2}{21^2}\delta_1 = 0 \ .$$

No ponto a_1:

$$-\frac{2}{3^2}\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \frac{2}{3^2}\delta_4 + \frac{2}{5^2}\delta_5 + \frac{2}{7^2}\delta_6 + \frac{2}{9^2}\delta_6 + \frac{2}{11^2}\delta_5 + \frac{2}{13^2}\delta_4 + \frac{2}{15^2}\delta_3 + \frac{2}{17^2}\delta_2 + \frac{2}{19^2}\delta_1 = 0 \ .$$

[722] O trecho daqui para a frente até o final dessa Seção não foi incluído na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[723] Creio que aqui Coulomb quis dizer $\delta_3 = \delta_2$, $\delta_4 = \delta_2$, $\delta_5 = \delta_2$ e $\delta_6 = \delta_2$.

No ponto a_2:

$$-\frac{2}{5^2}\delta_1 - \frac{2}{3^2}\delta_2 - \delta_3 + \delta_4 + \frac{2}{3^2}\delta_5 + \frac{2}{5^2}\delta_6 + \frac{2}{7^2}\delta_6 + \frac{2}{9^2}\delta_5 + \frac{2}{11^2}\delta_4 + \frac{2}{13^2}\delta_3 + \frac{2}{15^2}\delta_2 + \frac{2}{17^2}\delta_1 = 0 \ .$$

No ponto a_3:

$$-\frac{2}{7^2}\delta_1 + \frac{2}{5^2}\delta_2 - \frac{2}{3^2}\delta_3 - \delta_4 + \delta_5 + \frac{2}{3^2}\delta_6 + \frac{2}{5^2}\delta_6 + \frac{2}{7^2}\delta_5 + \frac{2}{9^2}\delta_4 + \frac{2}{11^2}\delta_3 + \frac{2}{13^2}\delta_2 + \frac{2}{15^2}\delta_1 = 0 \ .$$

No ponto a_4:

$$-\frac{2}{9^2}\delta_1 - \frac{2}{7^2}\delta_2 - \frac{2}{5^2}\delta_3 - \frac{2}{3^2}\delta_4 - \delta_5 + \delta_6 + \frac{2}{3^2}\delta_6 + \frac{2}{5^2}\delta_5 + \frac{2}{7^2}\delta_4 + \frac{2}{9^2}\delta_3 + \frac{2}{11^2}\delta_2 + \frac{2}{13^2}\delta_1 = 0 \ .$$

Sendo do primeiro grau essas cinco equações com seis incógnitas, é fácil pelos métodos comuns reduzi-las a uma única equação, que representará a razão da densidade média entre dois globos escolhidos à vontade em nossa linha formada por 12 globos colocados em contato. Porém, como não temos necessidade aqui de uma precisão muito maior do que aquela fornecida pela experiência, observamos que as densidades dos globos diferentes não variam consideravelmente, exceto do primeiro ao segundo globo. Assim, podemos considerar as densidades intermediárias como sendo iguais, quando as introduzimos no cálculo apenas em frações pequenas. Dessa forma, para ter a razão da densidade de um dos globos da linha em relação ao primeiro, é necessário combinar as equações de maneira que o coeficiente da densidade que queremos avaliar seja muito maior do que os outros; porém, caso junte as cinco equações anteriores, terei

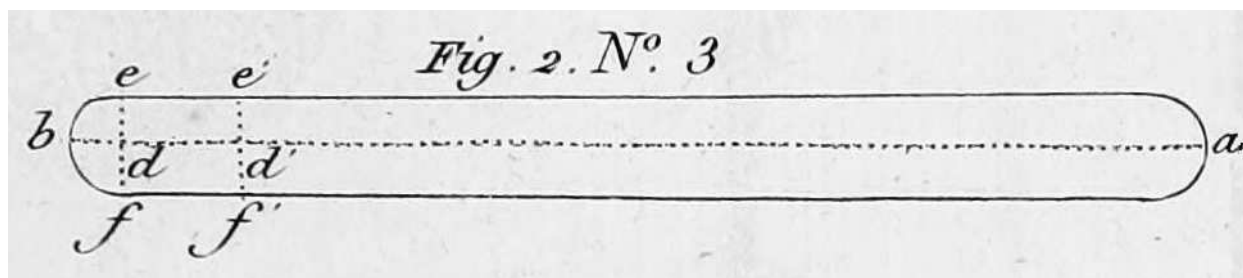
$$0 = -1,38\delta_1 - 0,33\delta_2 - 0,07\delta_3 + 0,07\delta_4 + 0,33\delta_5 + 1,36\delta_6 + 0,38\delta_6 + 0,16\delta_5 + 0,10\delta_4 + 0,07\delta_3 + 0,05\delta_2 + 0,04\delta_1 \ .$$

Vemos que nessa equação apenas os coeficientes de δ_1 e δ_6 são consideráveis. Além disso, sabemos que a densidade varia pouco, exceto do primeiro ao segundo globo. Assim, podemos supor a densidade média elétrica como sendo aproximadamente a mesma nos termos cujos coeficientes são frações desde o segundo até o sexto globo. Resultará dessa suposição $1,34\delta_1 = 2,16\delta_6$, de onde $\delta_1 = 1,54\delta_6$.

A experiência forneceu $\delta_1 = 1,70\delta_6$; de maneira que a razão da quantidade de fluido elétrico do primeiro globo encontra-se, em relação à quantidade do globo do meio, aproximadamente um décimo maior pela experiência do que pelo cálculo. Esse resultado está de acordo com tudo que encontramos anteriormente.

20.7 VII. Quinta Experiência. *Distribuição do Fluido Elétrico sobre a Superfície de um Cilindro*

Utilizamos nessa experiência para suspender a agulha da balança elétrica um fio de prata dourado cuja força de torção, para o mesmo ângulo de torção, era apenas a vigésima parte daquela do fio de cobre mais fino, vendido como número 12 no comércio, que foi utilizado nas quatro experiências anteriores.

Colocamos sobre um suporte dielétrico um cilindro de 2 polegadas de diâmetro [5,4 cm] e 30 polegadas de comprimento [81,2 cm], terminado por dois hemisférios, Figura 2, Número 3.

Esse cilindro eletrizado foi tocado por um pequeno disco de papel dourado suspenso por um fio de goma-laca que era introduzido em seguida na balança [elétrica] de acordo com os procedimentos indicados em nossa Quinta Memória, *Volume de 1787, Figura 3*.[724] Resultou dessa experiência, ao tocar alternadamente um ponto situado no meio da superfície cilíndrica e um ponto situado na extremidade, que a densidade no meio do cilindro está para a densidade na extremidade assim como 1,00 : 2,30.

Ao comparar um ponto no meio do cilindro com um ponto a 2 polegadas da extremidade, encontramos a densidade elétrica no meio do cilindro para aquela a 2 polegadas da extremidade, como 1,00 : 1,25.

Ao comparar o ponto do meio com um ponto sobre o grande círculo do hemisfério que termina o cilindro ou no ponto e, localizado a 1 polegada de sua extremidade, encontramos a [razão das] densidades, como 1,00 : 1,80.

20.7.1 *Resultado Dessa Experiência*

Resulta dessa experiência que sobre as duas últimas polegadas na extremidade do cilindro, a densidade elétrica é muito maior do que no meio do cilindro; mas que ela varia pouco desde o meio do cilindro até [um ponto localizado] a duas polegadas de sua extremidade.

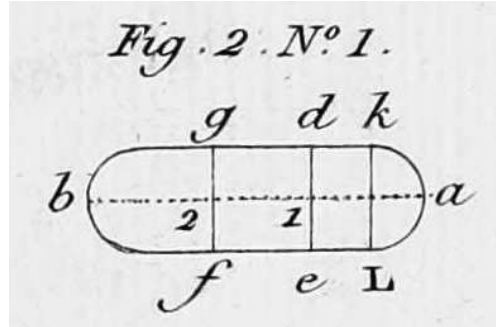
20.8 **VIII.** *Teoria da Distribuição do Fluido Elétrico sobre a Superfície de um Cilindro Isolado*

Quando um corpo está carregado de fluido elétrico e quando esse fluido está em equilíbrio, ao dividir o corpo em duas partes e ao calcular a ação dessas duas partes sobre um ponto qualquer, sendo essa ação avaliada em uma mesma direção, é necessário que haja equilíbrio [entre as ações opostas]. Assim, para ter as condições de equilíbrio do fluido elétrico sobre a superfície de um cilindro, é suficiente calcular as condições de equilíbrio em relação ao eixo desse cilindro.[725]

[724]Esse disco condutor de papel dourado suspenso por um fio isolante de goma-laca é um plano de prova. Ver a representação do plano de prova na Figura 3 da Quinta Memória, página 305.

[725]O trecho daqui para a frente até o final da Seção 20.9 não foi incluído na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

20.8.1 Primeiro Exemplo. *Cilindro de Duas Polegadas de Diâmetro e Seis Polegadas de Comprimento*

O cilindro da Figura 2, Número 1, tem 2 polegadas de diâmetro e 6 polegadas de comprimento [5,414 e 16,242 cm, respectivamente].

Ele é dividido nos pontos 1 e 2 por planos perpendiculares ao eixo, em três partes iguais;[726] ele é terminado por um hemisfério nas duas extremidades. Supomos que a densidade média sobre a superfície da parte dae é δ_1 e que aquela sobre a parte $degf$ é δ_2. A densidade média da parte fgb será a mesma que aquela de dae.

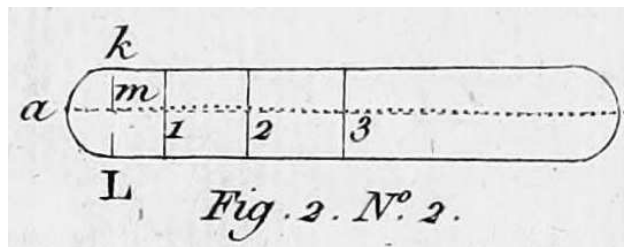
Mas a ação do hemisfério kaL sobre o ponto 1, na direção $a1$, é $2\pi\delta_1(1 - 1/\sqrt{2})$, sendo de 1 unidade o raio do cilindro.[727] A porção do cilindro $dkLe$, cujo comprimento é igual ao raio, tem por ação sobre o ponto 1 na direção $a1$ a quantidade $2\pi\delta_1(1 - 1/\sqrt{2})$. A ação da porção $degf$, que tem 2 polegadas de comprimento, sobre o mesmo ponto 1 na direção oposta, é igual a $2\pi\delta_2(1 - 1/\sqrt{5}) = 1,10\pi\delta_2$. A ação da porção fgb sobre o mesmo ponto 1 na mesma direção pode ser calculada sem erro perceptível como se essa porção estivesse reunida no meio de $2b$ ou a 3 polegadas do ponto 1. Assim, sua ação sobre o ponto 1 é muito próxima de $0,44\delta_1$, de onde resulta a seguinte equação para exprimir o equilíbrio no ponto 1 de todas as ações avaliadas ao longo da direção do eixo:

$$0,59\delta_1 = 0,55\delta_2 + 0,22\delta_1 \ ,$$

fornecendo $\delta_1 = 1,49\delta_2$.

20.8.2 Segundo Exemplo. *Cilindro de Duas Polegadas de Diâmetro e Doze Polegadas de Comprimento*

Se o cilindro, Figura 2, Número 2, tivesse 12 polegadas de comprimento [32,5 cm] e se ele fosse terminado em um hemisfério em cada extremidade, [então] para ter um valor aproximado da densidade média de suas partes diferentes, o dividiríamos em 6 partes iguais de 2 polegadas de comprimento cada uma, e buscaríamos as condições de equilíbrio na direção do eixo para o ponto 1 e para o ponto 2.

[726]Ou seja, em três partes de mesmo comprimento, embora seus formatos sejam diferentes.
[727]Isto é, raio = 1 polegada = 2,707 cm.

Seja δ_1 a densidade média sobre a parte da superfície que corresponde à [porção] $a1$; δ_2 a densidade média sobre a superfície que corresponde à [porção] 12; δ_3 sobre a superfície que corresponde à [porção] 23. Teremos [então,] de acordo com o que está explicado na Seção anterior, as duas equações a seguir.

Para o equilíbrio no ponto 1, *primeira equação*:

$$0,59\delta_1 = 0,55\delta_2 + 0,22\delta_3 + 0,08\delta_3 + 0,04\delta_2 + 0,02\delta_1 \ .$$

Para o equilíbrio no ponto 2, *segunda equação*:

$$0,22\delta_1 = -0,55\delta_2 + 0,55\delta_3 + 0,22\delta_3 + 0,08\delta_2 + 0,04\delta_1 \ .$$

Essas duas equações são reduzidas ao seguinte resultado, *primeira equação*:

$$0,57\delta_1 = 0,59\delta_2 + 0,30\delta_3 \ ,$$

segunda equação:

$$0,18\delta_1 = -0,47\delta_2 + 0,77\delta_3 \ ,$$

de onde resulta $\delta_1 = 1,60\delta_3$ e $\delta_1 = 1,55\delta_2$; razões essas um pouco maiores, mas que contudo se aproximam bastante daquelas razões que encontramos nas Seções 20.2 e 20.3 para o caso de seis globos iguais colocados em contato ao longo de uma linha reta. De fato percebemos, de acordo com as observações que fizemos na Seção 20.4, na teoria da distribuição do fluido elétrico sobre seis globos em contato e em linha reta, que sendo a densidade quase nula nos pontos de contato entre os globos e nas partes vizinhas, a distribuição média do fluido elétrico sobre cada globo deve ser aproximadamente a mesma que [a distribuição] sobre um cilindro contínuo que tivesse 12 polegadas de comprimento e que fosse terminado por dois hemisférios.

20.9 IX. *Segundo Método de Aproximação para Determinar pela Teoria a Distribuição do Fluido Elétrico ao longo da Superfície de um Cilindro Terminado por Dois Hemisférios*

De acordo com os dois exemplos anteriores e de acordo com a teoria que fornecemos para a distribuição do fluido elétrico sobre uma linha [reta] formada de doze globos de 2 polegadas em contato, é fácil determinar, ao dividir um cilindro em várias partes iguais, cada uma [de comprimento] igual a seu diâmetro, a densidade média de cada uma de suas partes. Porém,

quando o cilindro tem um grande comprimento, o próximo método é suficiente e simplifica bastante o cálculo.

Tomo como exemplo um cilindro de 30 polegadas de comprimento [81,2 cm] e 2 polegadas de diâmetro, Figura 2, Número 3.

Para ter uma primeira aproximação, dividirei esse cilindro em três partes desiguais; a primeira formada pelo hemisfério ebf, cuja densidade é δ_1; a segunda, pela porção cilíndrica $ee'ff'$, tendo 2 polegadas de comprimento, cuja densidade é δ_2; a terceira indo de d' até a, [ou seja, até] a extremidade do eixo do cilindro cuja densidade é δ_3. Agora é necessário calcular a ação dessas três partes sobre os pontos d e d' ao longo da direção do eixo. Dessa forma obteremos as duas equações aproximadas [a seguir].

Primeira equação para o equilíbrio no ponto d:

$$\frac{\delta_1}{2} = \delta_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \delta_3 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{29}\right) .$$

Segunda equação para o equilíbrio no ponto d':

$$\frac{\delta_1}{\left(2\frac{1}{2}\right)^2} = -\delta_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \delta_3 \left(1 - \frac{1}{27}\right) .$$

O cálculo [para chegar nessas] duas equações é baseado em que a ação da superfície hemisférica ebf sobre o ponto d que está em seu centro é igual a $\pi\delta_1$; [e no fato de] que a ação de uma porção da superfície cilíndrica, cuja densidade D é uniforme, ao agir na direção do eixo, é igual a

$$2\pi Dr \left(\frac{1}{(r^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 + x^2)^{1/2}}\right) ,$$

na qual a representa a distância do ponto onde começa o cilindro até o ponto sobre o qual ele atua; x representa a distância do ponto onde termina o cilindro até o ponto sobre o qual ele exerce sua ação; sendo r o raio do cilindro; e π a razão da circunferência para o diâmetro.[728]

Ao aplicar essa fórmula ao nosso exemplo, obtemos as duas equações anteriores, de onde resulta $\delta_1 = 2,09\delta_3$ e $\delta_2 = 1,14\delta_3$.

Assim, pelo cálculo aproximado, encontramos que a densidade média do fluido elétrico sobre a superfície do hemisfério que termina o cilindro é o dobro da densidade média sobre a superfície do cilindro. Se compararmos esse resultado com a última experiência, Seção 20.7, encontraremos por essa experiência, que a densidade na extremidade do eixo do cilindro ou no polo do hemisfério que o termina, está para a densidade no meio do cilindro :: 2,30 : 1,00. Encontramos igualmente, *na mesma Seção*, que a densidade sobre o grande círculo desse hemisfério está para a densidade no meio do cilindro :: 1,80 : 1,00. Assim, ao considerar uma média entre esses dois valores, no qual um [valor] representa a densidade maior do hemisfério e o outro [valor] a densidade menor, com essa densidade diminuindo desde o polo do hemisfério até o equador, teremos a razão da densidade média do hemisfério para a densidade média sobre o cilindro, como [sendo dada por]

[728]No original, [Coulomb, 1791, pág. 633], Coulomb afirma aqui que π representa "le rapport de la circonférence au rayon", isto é, a razão da circunferência para o raio, grandeza igual a $6,28318....$ Como afirmei na Nota de rodapé 714 e na Seção 21.2, estou substituindo os símbolos Π ou π de Coulomb por 2π, enfatizando ainda a definição moderna de π como sendo a razão da circunferência para o diâmetro, isto é, $\pi = 3,14159....$

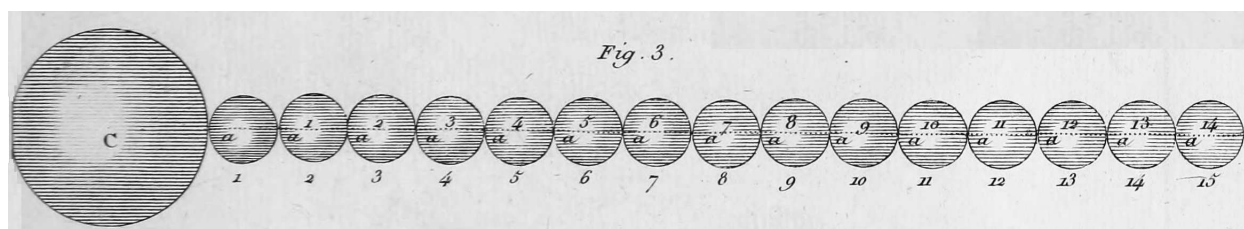
$$\frac{2,30+1,80}{2} : 1,00 :: 2,05 : 1,00 \ ,$$

[ou seja,] quase exatamente a mesma quantidade fornecida pela teoria; isso efetivamente deve ocorrer, pois a densidade varia muito pouco desde o meio do cilindro até a 2 ou 3 polegadas de sua extremidade. Na sequência dessa Memória daremos os métodos de aproximação para determinar de uma maneira suficientemente exata para a prática, as leis de variação da densidade elétrica ao longo da superfície de um cilindro.

20.10 X. *Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico se Distribui entre um Certo Número de Globos Iguais Colocados em Contato sobre uma Mesma Reta Terminada por um Globo de um Diâmetro Maior*

As experiências dessa Seção são realizadas como as anteriores. Colocamos sobre isolantes dielétricos a fila de pequenos globos de 2 polegadas de diâmetro, assim como o globo de 8 polegadas [de diâmetro]. Um desse pequenos globos é colocado alternadamente em lugares diferentes ao longo da linha e na balança [elétrica].

20.11 XI. Sexta Experiência. *Distribuição do Fluido Elétrico entre Três Globos em Contato, um tendo 8 Polegadas de Diâmetro e os Outros Dois tendo 2 Polegadas de Diâmetro*

Ao seguir nessa experiência, Figura 3, os procedimentos das Seções anteriores, encontrei que ao colocar apenas dois globos, 1 e 2, com 2 polegadas de diâmetro, cujos centros estavam colocados em linha [reta] com o centro do globo C de 8 polegadas de diâmetro, a quantidade de eletricidade com a qual se carregava o globo 2, o mais afastado do globo grande, estava para a quantidade do globo 1 em contato com o globo C :: 2,54 : 1,00.

20.12 XII. *Teoria Dessa Experiência*

Se fizermos o cálculo dessa experiência ao supor,[729] como nas Seções anteriores, que a massa do fluido elétrico de cada globo está distribuída uniformemente sobre a superfície desse globo; se representarmos por D à densidade média do fluido elétrico sobre a superfície do globo grande, por R ao raio desse globo; se δ_1 representar a densidade do fluido elétrico sobre a superfície do pequeno globo 1 em contato com o globo grande; e se δ_2 representar a densidade elétrica sobre a superfície do globo 2, cujo raio é r, teremos as duas próximas equações:[730]

No contato no ponto a, *primeira equação*:

$$D = \delta_1 + 0,22\delta_2 \ .$$

No contato no ponto a_1, *segunda equação*:

$$\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} = -\delta_1 + \delta_2 \ .$$

E como em nossa experiência o globo C tem 8 polegadas de diâmetro[731] e os outros dois [globos têm diâmetros de] apenas 2 polegadas, teremos, de acordo com essas duas equações:

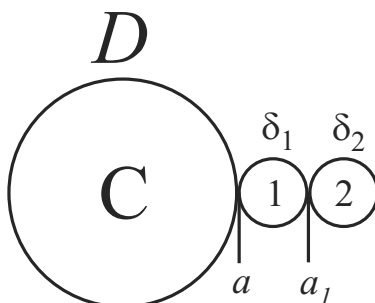
$$\delta_2 = 1,55D \ , \qquad \delta_1 = 0,67D \qquad \text{e} \qquad \delta_2 = 2,35\delta_1 \ .$$

Acabamos de encontrar pela experiência $\delta_2 = 2,54\delta_1$, quantidade essa um pouco maior que aquela encontrada pela teoria; o que deve efetivamente acontecer, assim como dissemos anteriormente, em virtude da condensação do fluido elétrico na direção do ponto a_1, [ou seja, na] extremidade do eixo do pequeno globo que termina a fila.

20.13 XIII. Sétima Experiência. *Um Globo de 8 Polegadas e Quatro Globos de 2 Polegadas em Contato*

Colocamos, Figura 3, quatro globos de 2 polegadas de diâmetro, [a saber,] 1, 2, 3, 4, em contato com o globo C, de 8 polegadas de diâmetro, e buscamos a razão das quantidades de

[729] O texto de toda essa Seção não foi incluído na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[730] Essa situação está representada na Figura dessa Nota de rodapé na qual o ponto a é o ponto de contato entre os globos C e 1, enquanto que o ponto a_1 é o ponto de contato entre os globos 1 e 2:

[731] Por um lapso no original apareceu aqui "raio" ao invés de "diâmetro".

eletricidade adquirida por um globo de 2 polegadas colocado sucessivamente em 1 e em 4.[732] Para um resultado médio entre seis observações alternadas, encontramos que ao colocar 4 pequenos globos de 2 polegadas em fila em contato com o globo C, a quantidade de fluido elétrico adquirida por um pequeno globo de 2 polegadas colocado na extremidade da fila em 4 estava para a quantidade do [pequeno] globo 1, em contato imediato com o globo C de 8 polegadas, assim como 3,40 : 1,00.

20.14 XIV. *Resultado e Teoria da Sétima Experiência*

Para calcular pela teoria a sétima experiência,[733] na qual colocamos em contato quatro globos de 2 polegadas com um globo de 8 polegadas, formaremos, de acordo com os métodos que já explicamos, quatro equações que exprimirão o estado de equilíbrio nos pontos a, a_1, a_2 e a_3. Seja D, como na *Seção anterior*, a densidade média do fluido elétrico sobre a superfície do globo grande C, cujo raio é R; δ_1 a densidade média sobre a superfície do globo 1; δ_2 aquela sobre o globo 2; δ_3 aquela sobre o globo 3 e δ_4 aquela sobre o globo 4. Como em nossa experiência $R = 4r$, teremos as quatro equações [a seguir].

Primeira equação. O equilíbrio no ponto a fornece:

$$D = \delta_1 + 0,22\delta_2 + 0,08\delta_3 + 0,04\delta_4 \ .$$

Segunda equação. O equilíbrio no ponto a_1 [fornece:]

$$0,89D = -\delta_1 + \delta_2 + 0,22\delta_3 + 0,08\delta_4 \ .$$

Terceira equação. O equilíbrio no ponto a_2 [fornece:]

$$0,50D = -0,22\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + 0,22\delta_4 \ .$$

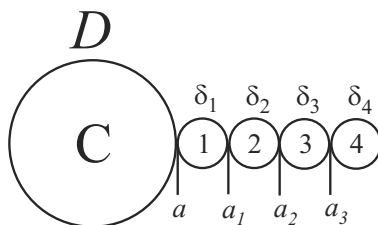
Quarta equação. O equilíbrio no ponto a_3 [fornece:]

$$0,32D = -0,08\delta_1 - 0,22\delta_2 - \delta_3 + \delta_4 \ .$$

Para resolver essas quatro equações, somamos a primeira com a quarta, e a segunda com a terceira, obtendo:

Primeira e quarta equações:

---

[732]Essa situação está representada na Figura dessa Nota de rodapé na qual o ponto a é o ponto de contato entre os globos C e 1, o ponto a_1 é o ponto de contato entre os globos 1 e 2, o ponto a_2 é o ponto de contato entre os globos 2 e 3, enquanto que a_3 é o ponto de contato entre os globos 3 e 4:

[733]O texto de toda essa Seção não foi incluído na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

$$1,32D = 0,92\delta_1 - 0,92\delta_3 + 1,04\delta_4 \ .$$

Segunda e terceira equações:

$$1,39D = -1,22\delta_1 + 1,22\delta_3 + 0,30\delta_4 \ .$$

É claro que nessa operação o coeficiente de δ_2 desaparece nos dois resultados e que em cada equação δ_1 e δ_3 possuem o mesmo coeficiente. Assim, dividindo o primeiro resultado por 0,92, o segundo por 1,22, [e então] somando um e outro, teremos[734]

$$\left(\frac{1,32}{0,92} + \frac{1,39}{1,22}\right) D = \left(\frac{1,04}{0,92} + \frac{0,30}{1,22}\right) \delta_4 \ ;$$

de onde obtemos $\delta_4 = 1,88D$.

Se substituirmos esse valor de δ_4 nas três primeiras equações e se continuarmos a operação para determinar os valores de δ_3, δ_2, δ_1, encontraremos $\delta_1 = 0,60D$; $\delta_2 = 1,06D$; $\delta_3 = 1,28D$; $\delta_4 = 1,88D$; de onde resulta $\delta_4/\delta_1 = 1,88/0,60 = 3,13$. Mas encontramos pela experiência $\delta_4 = 3,40\delta_1$. Assim a razão fornecida por nossa teoria é, como podemos ver, menor de aproximadamente um décimo em relação à razão fornecida pela experiência; o que está de acordo com tudo que encontramos previamente, e em relação às reflexões de acordo com as quais vimos que seria necessário corrigir nossa teoria.

20.14.1 *Observação*

Se somarmos as densidades dos quatro pequenos globos e se pegarmos um quarto dessa soma, teremos a densidade média dos quatro pequenos globos ao supor que a soma das densidades esteja distribuída uniformemente sobre os quatro globos. Essa densidade média será igual a

$$\frac{0,60D + 1,06D + 1,28D + 1,88D}{4} = 1,205D \ .$$

20.15 XV. Oitava Experiência

Para confirmar a teoria anterior, tentei determinar de uma maneira direta pela experiência a razão entre a densidade do globo grande C de 8 polegadas de diâmetro e aquela do pequeno globo 4 que termina a linha com a suposição anterior de cinco globos em contato. Vai aqui o procedimento que segui nessa comparação.

Inicialmente determinei como na experiência anterior a densidade do globo 4 colocado na extremidade da fila; em seguida separei o globo C da fila de quatro globos pequenos, sem destruir sua eletricidade; e fiz tocar o globo grande pelo globo 4 o qual apresentei em seguida na balança elétrica, para determinar de uma maneira direta a quantidade de eletricidade que esse globo 4 adquiria por um contato imediato com o globo grande. De

[734]No original essa equação apareceu da seguinte forma:

$$\left(\frac{1,32}{0,92} + \frac{1,39}{1,22}\right) D = \left(\frac{1,04}{0,92} + \frac{0,30}{1,22}\delta_4\right) \ .$$

acordo com esse procedimento, encontrei que o globo 4 colocado na extremidade da fila de pequenos globos, adquiria uma quantidade de eletricidade que estava para aquela que ele adquiria quando o colocávamos sozinho em contato imediato com o globo C isolado, :: 1,60 : 1,00. Pela teoria encontramos essa razão como sendo :: 1,88 : 1,00. Porém a teoria, como vimos na suposição da densidade uniforme sobre a superfície de cada globo, fornece essa razão necessariamente como sendo muito pequena, e de acordo com as reflexões e as experiências anteriores, a teoria corrigida teria dado essa razão muito próxima de :: 2,00 : 1,00. Para avaliar a dificuldade da experiência, é necessário agora lembrar, assim como vimos na Memória anterior, que um globo de 2 polegadas colocado em contato com um globo de 8 polegadas, adquire uma densidade média, maior que aquela do globo de 8 polegadas, na razão de 1,30 para 1,00. Assim, para ter a razão verdadeira entre a densidade do globo 4 colocado em último lugar na fila, e aquela do globo C, é necessário multiplicar $1,60D$, que representa a densidade adquirida pelo globo 4 ao tocar o globo C, por 1,30. Encontraremos assim pela experiência a razão entre a densidade média do pequeno globo 4 colocado em último lugar na fila e a densidade média da superfície do globo de 8 polegadas, como sendo 2,08 : 1,00, quase exatamente a mesma [razão] que aquela que acaba de ser fornecida pela teoria corrigida.

20.16 XVI. Nona Experiência. *Um Globo de 8 Polegadas de Diâmetro Colocado em Contato com uma Linha de 24 Pequenos Globos de 2 Polegadas de Diâmetro Cada Um, Formando um Comprimento de 48 Polegadas*

Nessa experiência comparamos os diferentes globos que formam a linha até o vigésimo quarto, isto é, até aquele que termina a linha.

Vigésimo quarto comparado com o vigésimo terceiro.

Ao comparar o último com o penúltimo, isto é, o vigésimo quarto globo de 2 polegadas com o vigésimo terceiro, encontramos por uma média entre seis testes, que a quantidade de eletricidade, ou a densidade média do fluido elétrico sobre a superfície do vigésimo quarto globo, estava para aquela do vigésimo terceiro, assim como 1,49 : 1,00.

Vigésimo quarto comparado com o décimo segundo.

Ao comparar o vigésimo quarto globo com o décimo segundo, ou com aquele colocado no meio da linha [reta], encontramos a densidade média do vigésimo quarto para aquela do décimo segundo globo, assim como 1,70 : 1,00.

Vigésimo quarto comparado com o segundo.

Ao comparar o vigésimo quarto com o segundo, encontramos que a quantidade de eletricidade média do vigésimo quarto globo estava para aquela do segundo, assim como 2,10 : 1,00.[735]

Vigésimo quarto comparado com o primeiro.

[735]No original apareceu 2,00 : 10.

Ao comparar o vigésimo quarto globo com aquele em contato direto com o globo de 8 polegadas, encontramos que a quantidade média de eletricidade do vigésimo quarto globo [estava] para aquela do primeiro, assim como 3,72 : 1,00.

O vigésimo quarto globo comparado com o globo de 8 polegadas.

Enfim, ao comparar pelo método corrigido, explicado na Seção anterior, a densidade média da eletricidade do vigésimo quarto globo de 2 polegadas com aquela do globo de 8 polegadas, encontramos essa razão como 2,16 : 1,00, razão essa que difere apenas muito pouco, como vemos, daquela razão que havíamos encontrado na Seção anterior para o quarto globo que terminava uma linha formada de 4 globos de 2 polegadas em contato com um globo de 8 polegadas.

20.17 **XVII.** *Aplicação do Cálculo nas Experiências Anteriores*

Formei uma Tabela de 24 equações que representam,[736] de acordo com o método das Seções anteriores, o estado de equilíbrio em todos os pontos de contato:[737]

[736]O texto de toda essa Seção não foi incluído na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[737]Para facilitar a visualização dessa Tabela, ela é apresentada na forma de 24 equações na Seção 21.3, página 419.

Na parte superior esquerda da primeira linha dessa Tabela está escrito o seguinte:

"Ação do globo grande sobre os diferentes pontos de contato. A densidade média do globo grande é D; seu raio R, o raio do pequeno globo é r."

Na parte superior direita da primeira linha dessa Tabela está escrito o seguinte:

"*Tabela com 24 equações destinadas a determinar a densidade elétrica média dos 24 pequenos globos, os centros colocados em linha reta, o pequeno globo 1 em contato com um grande globo.* Nessa Tabela, os números na parte superior de cada coluna indicam o lugar do pequeno globo; de maneira que, por exemplo, na oitava coluna vertical, terceira linha horizontal, encontramos a quantidade $\frac{2}{11^2}$ que deve ser multiplicada por δ_8, ou pela densidade média do oitavo pequeno globo, a partir do globo grande."

A partir da segunda linha da primeira coluna temos "Primeira equação. $D =$", "Segunda equação. $\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} =$", etc.

ACTION

Du gros globe sur les différens points du contact. La densité moyenne du gros globe est D; son rayon R, le rayon du petit globe est r.

TABLEAU de 24 Équations destinées à déterminer la densité électrique moyenne de 24 petits globes, les centres placés en ligne droite, le petit globe 1 en contact avec un gros globe.

Dans ce Tableau, les N.os au haut de chaque colonne indiquent la place du petit globe; en sorte, par exemple, qu'à la huitième colonne verticale, troisième ligne horizontale, l'on trouve la quantité $\frac{2}{11^2}$ qui est censée multipliée par $\overset{8}{\delta}$, ou par la densité moyenne du huitième petit globe, à compter du gros globe.

Équation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1.ère ÉQUATION. $D =$	$+\delta$	$+\frac{2\delta}{3^2}$	$+\frac{2\delta}{5^2}$	$+\frac{2\delta}{7^2}$	$+\frac{2\delta}{9^2}$	$+\frac{2\delta}{11^2}$	$+\frac{2\delta}{13^2}$	$+\frac{2\delta}{15^2}$	$+\frac{2\delta}{17^2}$	$+\frac{2\delta}{19^2}$	$+\frac{2\delta}{21^2}$	$+\frac{2\delta}{23^2}$	$+\frac{2\delta}{25^2}$	$+\frac{2\delta}{27^2}$	$+\frac{2\delta}{29^2}$	$+\frac{2\delta}{31^2}$	$+\frac{2\delta}{33^2}$	$+\frac{2\delta}{35^2}$	$+\frac{2\delta}{37^2}$	$+\frac{2\delta}{39^2}$	$+\frac{2\delta}{41^2}$	$+\frac{2\delta}{43^2}$	$+\frac{2\delta}{45^2}$	$+\frac{2\delta}{47^2}$
2.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} =$	$-\delta$	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$	$+\frac{2}{41^2}$	$+\frac{2}{43^2}$	$+\frac{2}{45^2}$
3.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+4r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$	$+\frac{2}{41^2}$	$+\frac{2}{43^2}$
4.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+6r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$	$+\frac{2}{41^2}$
5.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+8r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$
6.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+10r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$
7.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+12r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$
8.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+14r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$
9.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+16r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$
10.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+18r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+2$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$
11.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+20r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{1}{27^2}$
12.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+22r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$
13.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+24r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$
14.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+26r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$
15.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+28r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$
16.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+30r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$
17.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+32r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$
18.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+34r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$
19.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+36r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$
20.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+38r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$
21.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+40r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$
22.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+42r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{41^2}$	$-\frac{2}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$
23.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+44r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{43^2}$	$-\frac{2}{(41)^2}$	$-\frac{2}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$
24.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+46r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{45^2}$	$-\frac{2}{43^2}$	$-\frac{2}{41^2}$	$-\frac{2}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$

A redução das 24 equações para [uma equação com] duas incógnitas exige apenas paciência, não tem qualquer dificuldade; mas como o tamanho do cálculo poderia cansar a maioria dos físicos, é fácil imaginar métodos diferentes de aproximação para abreviar esse cálculo; aqui vão alguns deles.

Se considerarmos em nossa Tabela a vigésima quarta equação, observaremos, de acordo com a experiência e com as observações teóricas anteriores, que a diferença da densidade média entre o vigésimo terceiro e o vigésimo quarto globo, é bem considerável, porém a variação da densidade dos globos diminui em seguida muito lentamente do vigésimo terceiro ao vigésimo segundo globo, e consecutivamente do vigésimo segundo ao vigésimo primeiro. Além disso, observamos que nessa vigésima quarta equação, os coeficientes diminuem muito rapidamente. Assim, podemos sem grande erro supor nessa vigésima quarta equação que a densidade média de todos os pequenos globos, desde o vigésimo terceiro até o primeiro, é

igual, e disso resultará[738]

$$\delta_{24} = \delta_{23}\left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \text{etc.} + \frac{2}{45^2}\right) + 0,013D \ .$$

Como D é menor que δ_{23}, podemos desprezar $0,013D$ e teremos:[739]

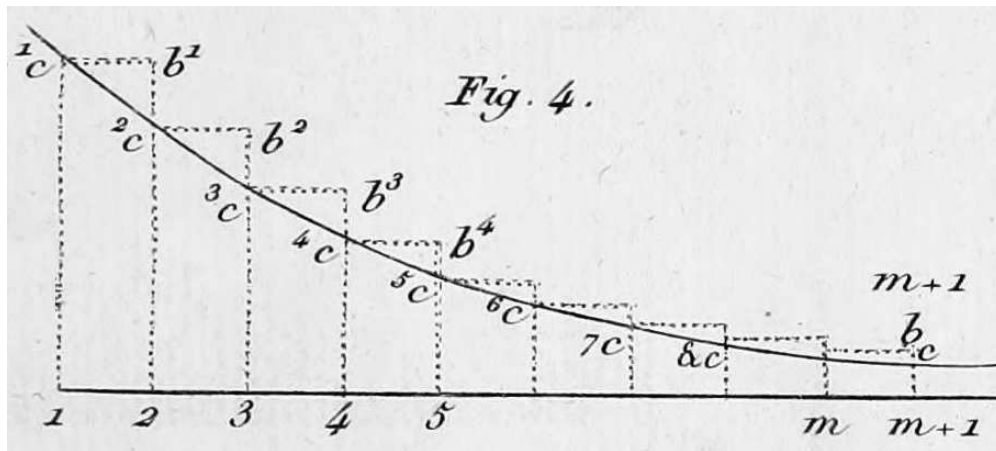
$$\delta_{24} = \delta_{23}\left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \text{etc.} + \frac{2}{45^2}\right) = 1,44\delta_{23} \ ,$$

[sendo que] a experiência forneceu na Seção anterior, $\delta_{24} = 1,49\delta_{23}$, que, como vemos, difere muito pouco do resultado fornecido pela teoria. Porém é necessário observar que os erros de

[738]Usando ainda $R = 4r$ tal que

$$\frac{2DR^2}{(R+46r)^2} = \frac{2D \cdot 4^2}{50^2} = 0,0128D \approx 0,013D \ .$$

[739][Nota de Coulomb:] Para ter de uma maneira aproximada o valor dessa série bem convergente, podemos utilizar um método conhecido, muito simples, que é suficiente na prática.

Vemos que os termos consecutivos possuem o mesmo numerador, os denominadores seguem a progressão do quadrado dos números ímpares; assim, se pegarmos um dos termos da progressão [localizado] à distância m de um outro termo, tal como, por exemplo, $1/72$, essa soma integrada como formando uma linha curva comum, daria para a diferencial $2dm/(7+2m)^2$, e para a integral $k - \frac{1}{7+2m}$; ou $k = 1/7$, já que essa quantidade deve se anular quando $m = 0$. Assim, se os termos consecutivos da série diferem pouco um do outro, essa integral representará bem exatamente a soma da série. Porém é necessário observar que, para corrigir esse valor, caso, Figura 4, c_1, c_2, etc., c_m, representarem a curva que acabamos de integrar, cuja base $1m$ é dividida em partes iguais à unidade; e se construirmos sobre as divisões dessa base, cada termo da série, esses termos serão representados pelos paralelogramos $12c_1b_1$, $23c_2b_2$, etc.; assim cada termo da série vai diferir do termo na diferencial da superfície da curva de um pequeno triângulo $c_1b_1c_2$; e se cada elemento c_1c_2, c_2c_3, etc. puder ser considerado como uma linha reta, é fácil de ver que a soma da série difere da integral da curva, de uma quantidade igual à soma de todos os pequenos triângulos $c_1b_1c_2$, $c_2b_2c_3$, etc. mais o último termo da série, representado na Figura pelo paralelogramo retângulo $m(m+1) \cdot c_mb_m$.

Porém a soma desses pequenos triângulos, mais a metade do último termo ou do pequeno paralelogramo $c_mb_m \cdot m(m+1)$, é igual à metade do primeiro termo ou do paralelogramo retângulo c_1b_112. Assim, a soma dos termos que formam a série, é igual à integral da curva, mais a metade do primeiro termo, mais a metade do último. Logo, em nosso exemplo:

$$1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \text{etc.} + \frac{2}{45^2} = 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{45}\right) + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{45^2} = 1,44 \ .$$

suposição em que baseamos nossos cálculos, se compensam mutuamente; fizemos a densidade média do vigésimo quarto globo menor do que ela realmente é, como vimos na Seção 20.4; mas também fizemos a densidade do vigésimo terceiro globo muito pequena, já que assumimos a mesma densidade desde o vigésimo terceiro até o primeiro globo, em vez de ela ir sempre diminuindo.

Se quisermos ter de uma maneira aproximada os valores das densidades $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ em relação a D, faremos a suposição de que nas quatro primeiras equações, as densidades são iguais desde δ_4 até δ_{24}, e nesse caso as quatro primeiras equações da Tabela serão reduzidas a (Figura 3):

Para o ponto de contato a:

$$D = \delta_1 + 0,22\delta_2 + 0,08\delta_3 + 0,14\delta_4 \ .$$

Para o ponto de contato a_1:

$$0,89D = -\delta_1 + \delta_2 + 0,22\delta_3 + 0,22\delta_4 \ .$$

Para o ponto de contato a_2:

$$0,50D = -0,22\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + 0,44\delta_4 \ .$$

Para o ponto de contato a_3:

$$0,32D = -0,08\delta_1 - 0,22\delta_2 - \delta_3 + 1,44\delta_4 \ .$$

Façamos para essas quatro equações as mesmas operações que fizemos na Seção 20.15 e teremos

$$\delta_1 = 0,54D; \qquad \delta_2 = 0,92D; \qquad \delta_3 = 1,04D; \qquad \delta_4 = 1,14D \ .$$

Os valores δ_2, δ_3 e δ_4 que diferem pouco entre si, anunciam que, sem um grande erro, pudemos adotar densidades iguais desde δ_4 até δ_{24}, já que os coeficientes diminuem de acordo com uma série bem convergente. Contudo é claro que δ_4, obtido por essa operação, é um pouco grande demais, já que as densidades vão aumentando[740] desde δ_4 até δ_{24}, e que em nossa suposição elas são iguais.

Sendo as densidades δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 determinadas em relação a D, de acordo com as equações anteriores, se substituirmos seus valores na quinta, sexta, sétima e oitava equações de nossa Tabela, e se supusermos nessas quatro equações todas as outras densidades iguais, desde δ_8 até δ_{24}, poderemos determinar, ao seguir o mesmo procedimento, por meio dessas quatro novas equações, as densidades aproximadas de δ_5, δ_6, δ_7, δ_8; chegaremos em seguida, pelo mesmo método, a determinar por aproximação os valores de δ_9, δ_{10}, δ_{11}, δ_{12}, etc. Caso, de acordo com esses valores assim determinados, quisermos ter os valores de δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, de uma maneira mais aproximada do que aqueles valores que obtivemos pela primeira operação, substituiríamos nas quatro primeiras equações, os valores que teríamos encontrado para δ_5, δ_6, δ_7, etc. e as quatro primeiras equações combinadas nos forneceriam nesse caso de uma maneira bem aproximada os valores de δ_1, δ_2, δ_3, etc., tendo o cuidado de introduzir as correções indicadas no começo dessa Memória.

[740] Por um lapso no original apareceu aqui "vão diminuindo" ao invés de "vão aumentando".

20.18 XVIII. *Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico se Distribui entre um Globo e Cilindros de Comprimentos Diferentes, mas de Mesmo Diâmetro*

20.18.1 Décima Experiência

Eletrizamos um globo de 8 polegadas de diâmetro [21,7 cm], então o fizemos tocar uma bola de 9 linhas de diâmetro [2,0 cm], isolada e apoiada por um fio de goma-laca que introduzimos de maneira comum na balança [elétrica]; a agulha foi repelida a 28°, com uma força de torção, tudo incluído,[741] de 154°.

Esse globo de 8 polegadas foi imediatamente tocado por um cilindro de 2 polegadas de diâmetro [5,4 cm] e 30 polegadas de comprimento [81,2 cm]. Ao retirar o cilindro, o globo foi tocado pela pequena bola de 9 linhas de diâmetro a qual introduzimos novamente na balança; a agulha foi repelida à mesma distância que na primeira vez com uma força, tudo incluído, de 68°.

20.19 XIX. *Resultado Dessa Experiência*

O globo de 8 polegadas antes do contato do cilindro, tem uma quantidade de eletricidade que encontramos ser representada por 154°. Porém, é necessário observar que no intervalo entre as observações, a quantidade de eletricidade diminuía de 1/40 pelo contato com o ar; assim, para comparar a primeira observação com a segunda, é necessário reduzir a 150° a quantidade de eletricidade da primeira observação. Mas encontramos que pelo contato do cilindro, esses 150° são reduzidos a 68°. Assim, pelo contato, o cilindro adquiriu 82° da massa elétrica do globo, deixando apenas 68°, de maneira que a quantidade de fluido elétrico do cilindro estava para a quantidade do globo, após essa divisão, :: 82 : 68; [ou seja,] :: 1,21 : 1,00.

Para obter agora a razão das densidades médias do fluido elétrico distribuído sobre a superfície do cilindro em relação à densidade do fluido elétrico sobre a superfície do globo, observaremos que tendo o globo 8 polegadas de diâmetro, e o cilindro 2 polegadas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento, a superfície do cilindro está para a superfície do globo, :: 60 : 64. Assim, as densidades médias do fluido elétrico distribuído unicamente sobre a superfície dos corpos, sendo iguais à quantidade desse fluido dividida pela superfície, a densidade média desse fluido sobre a superfície do cilindro, estará para a densidade sobre a superfície do globo,

$$:: \frac{1,21}{60} : \frac{1,00}{64} ,$$

[ou seja,] :: 1,29 : 1,00.

Através de uma média tomada entre muitas outras experiências, podemos avaliar essa razão, :: 1,30 : 1,00.

[741] Ou seja, levando em conta a torção da agulha presa à parte inferior do fio de suspensão e também a torção do micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão.

20.20 XX. Décima Primeira Experiência

Determinamos pelo mesmo método a quantidade de eletricidade adquirida por um cilindro que tinha apenas a metade ou mesmo um terço do comprimento do primeiro cilindro; e encontramos, ao seguir os procedimentos da experiência anterior, que a densidade média de um cilindro com 15 polegadas [40,6 cm] e até mesmo de 10 polegadas de comprimento [27,1 cm], estava para a densidade média do mesmo fluido sobre o globo de 8 polegadas, aproximadamente na mesma razão que acabamos de encontrar para o globo de 8 polegadas quando ele divide seu fluido elétrico com um cilindro de 30 polegadas de comprimento.

Somente é necessário observar que, quando o globo é muito grande em relação ao cilindro, e quando o cilindro tem um comprimento muito pequeno, nesse caso a densidade média do pequeno cilindro, em relação à densidade do globo, será muito menor do que quando o cilindro tiver um grande comprimento. Assim, por exemplo, quando coloquei em contato com um globo de 8 polegadas, um pequeno cilindro de 5 a 6 linhas de comprimento [1,13 a 1,36 cm] e de 2 linhas de diâmetro [0,45 cm], a densidade média do fluido elétrico sobre a superfície desse cilindro, estava para a densidade do globo aproximadamente na razão de 2 para 1; porém, caso colocasse em contato com esse mesmo globo, um cilindro de 2 linhas de diâmetro e com mais de 6 polegadas de comprimento [16,2 cm], a densidade média do cilindro estaria para a densidade do globo de 8 polegadas, aproximadamente :: 8 : 1. Veremos na sequência que a teoria está de acordo com esse resultado.

20.21 XXI. *Observação*

É fácil de perceber que a teoria deve dar aproximadamente os resultados que nos foram fornecidos pelas experiências anteriores; pois, se supormos que colocamos sucessivamente nosso globo de 8 polegadas em contato com um cilindro de 30 polegadas, e em seguida com um cilindro de 15 polegadas, eletrizando esse globo a cada vez, de maneira que após o contato com os dois cilindros, ele conserve nos dois casos a mesma quantidade de eletricidade, será necessário, para que haja equilíbrio, que a quantidade de eletricidade e a distribuição sobre o cilindro de 15 polegadas, sejam tais que sua ação sobre o ponto de contato com o globo, seja a mesma [ação] que aquela do cilindro de 30 polegadas. Porém, como a ação ocorre em razão inversa do quadrado das distâncias no cilindro de 30 polegadas, todas as partes colocadas além de 15 polegadas encontram-se a uma distância bem considerável do ponto de contato para que sua ação seja apenas uma quantidade muito pequena em relação à ação das 15 primeiras polegadas vizinhas ao contato. Assim, para conservar o equilíbrio nas duas suposições, a quantidade do fluido elétrico do globo grande sendo suposta a mesma, é necessário que o fluido sobre as primeiras 15 polegadas produza, nos dois casos, aproximadamente a mesma ação. Logo, é necessário que o fluido elétrico nessa primeira parte esteja aproximadamente em quantidade igual, e que a distribuição seja aproximadamente a mesma. Consequentemente, a razão da densidade média entre o globo e os cilindros, deve ser aproximadamente a mesma nos dois casos.

20.22 XXII. *Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico se Distribui entre um Globo Eletrizado e Cilindros de Diâmetros Diferentes, mas de Mesmo Comprimento*

Como as experiências destinadas a essa Seção são realizadas exatamente pelos mesmos métodos que as experiências anteriores, só apresentarei aqui os resultados.

O globo de 8 polegadas de diâmetro colocado sobre suportes dielétricos, estando eletrizado, fizemos esse globo ser tocado por três cilindros diferentes de trinta polegadas de comprimento.

O primeiro cilindro tem 2 polegadas de diâmetro [5,414 cm]; o segundo cilindro tem 1 polegada de diâmetro [2,707 cm]; o terceiro cilindro tem apenas 2 linhas de diâmetro [0,452 cm].

Inicialmente determinamos a quantidade de eletricidade do globo antes que ele fosse tocado por um cilindro. Em seguida determinamos sua quantidade de eletricidade após ter sido tocado por esse cilindro. A diferença entre essas duas quantidades de eletricidade fornece a quantidade que o cilindro adquire no contato, a qual, comparada com aquela que permanece no globo, fornece a razão entre a quantidade de eletricidade do globo e a quantidade de eletricidade média do cilindro após o contato. Porém, como o fluido elétrico é distribuído, como provamos, somente sobre a superfície dos corpos, teremos a densidade desse fluido ao dividir a quantidade [de fluido] pela superfície do corpo. Ao seguir esse método de redução, resultou de muitas experiências que a densidade média sobre a superfície de um globo de 8 polegadas sendo representada pelo número 1,00, então:

A densidade média de um cilindro de duas polegadas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento seria representada por 1,30.

Aquela de um cilindro de uma polegada de diâmetro ... por 2,00.[742]

Aquela de um cilindro de 2 linhas de diâmetro ... por 9,00.

Nesses resultados, o cilindro de 2 linhas de diâmetro tendo apenas a décima segunda parte do diâmetro do primeiro, a densidade média do fluido elétrico que cobre a superfície é 7 a 8 vezes maior que aquela do cilindro de 2 polegadas de diâmetro. De onde resulta que esse aumento de densidade não segue exatamente a razão dos diâmetros dos cilindros, mas [segue] uma razão menor. Na prática, me parece que teríamos de uma maneira suficientemente exata as densidades dos cilindros diferentes, colocados em contato com um globo cuja densidade elétrica seria uma quantidade constante, ao supô-las entre si em razão inversa da potência $4/5$ do diâmetro dos cilindros; potência essa que varia e parece se aproximar da unidade, quando comparamos entre si cilindros cujo diâmetro é muito pequeno em relação ao diâmetro do globo; e [razão essa] que é menor que a unidade, na medida em que os diâmetros do cilindro aumentam em relação ao diâmetro do globo. De fato acabamos de encontrar que a densidade elétrica de um globo cujo diâmetro é 4 vezes maior que o diâmetro de um cilindro, sendo representada por D, a densidade média do cilindro é igual a $1,30D$. Porém encontramos por experiências análogas àquelas que acabamos de apresentar o resultado, que, quando o diâmetro do globo é apenas duas vezes maior que aquele do cilindro, a densidade média do cilindro será igual a $0,85D$. Se enfim o diâmetro do globo for igual ao diâmetro do cilindro, encontraremos a densidade elétrica média do cilindro igual a $0,60D$.

[742] As reticências indicam "e 30 polegadas de comprimento seria representada".

20.23 **XXIII.** *Primeira Observação*

O raciocínio, independente de todo cálculo, anuncia o resultado anterior. Ou seja, de acordo com o raciocínio, percebemos que a densidade média de dois cilindros de diâmetros diferentes, não deve seguir exatamente [a razão] inversa dos diâmetros, mas sim uma razão um pouco menor.

Consideremos dois cilindros iguais em comprimento, cujos diâmetros estejam [entre si] como 2 : 1, e vamos colocá-los sucessivamente em contato com um globo eletrizado. Suponhamos que a quantidade inicial de eletricidade desse globo tenha sido tal que após o contato ele tenha conservado nos dois casos a mesma quantidade de eletricidade. Se dividirmos os cilindros em um grande número de partes iguais em comprimento, [então,] para que haja equilíbrio nos pontos de contato entre o globo e os cilindros, é necessário que, como a ação do globo é a mesma nos dois casos, cada parte correspondente e de mesmo comprimento nos dois cilindros, tenha a mesma força elétrica para equilibrar a força do globo. Porém é necessário observar que estando os dois cilindros em contato com o globo pela extremidade de seus eixos, o fluido elétrico distribuído sobre a superfície dos dois cilindros agirá, sobre as partes vizinhas ao globo, mais diretamente sobre o ponto do eixo em contato com o globo em um cilindro de um diâmetro pequeno do que em um cilindro com um diâmetro grande. Assim, não será necessário para o equilíbrio [que exista] precisamente a mesma quantidade de fluido elétrico sobre a superfície de um cilindro de diâmetro pequeno, do que sobre a superfície de um cilindro de um diâmetro maior. Logo a densidade sobre a superfície do globo sendo suposta a mesma após o contato dos dois cilindros, a densidade média do fluido elétrico sobre a superfície do cilindro pequeno, não estará para a densidade média de um cilindro maior absolutamente em razão inversa do diâmetro dos cilindros, e a variação dessa razão será tanto maior, quanto maior for o diâmetro do cilindro em relação ao diâmetro do globo.

20.24 **XXIV.** *Segunda Observação*

Aqui se apresenta uma observação muito interessante, a saber, aquela da ação das pontas, ou a de cilindros com um diâmetro muito pequeno aplicados por suas extremidades a um corpo eletrizado. A experiência ensina que um corpo assim equipado de uma ponta, perde rapidamente a maior parte de sua eletricidade. Os resultados anteriores explicam esse fenômeno.

De fato encontramos pela experiência, que um cilindro de 2 linhas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento, colocado em contato com um globo de 8 polegadas, reveste-se de um fluido elétrico cuja densidade média é 9 vezes maior que aquela do globo. Mas vimos anteriormente na *Seção* 20.7, *quarta experiência*, que quando um cilindro é eletrizado e terminado por um hemisfério de mesmo diâmetro que o cilindro, a densidade do fluido elétrico na extremidade do eixo do cilindro estava para a densidade no meio do cilindro, :: 2,30 : 1,00. Essa razão deve ser maior, assim como indicam o raciocínio e a experiência, quando esse cilindro tem um grande comprimento e quando uma de suas extremidades está em contato com um globo grande. Dessa forma, ao supor o cilindro de 2 linhas de diâmetro, arredondado em sua extremidade na forma de um hemisfério, a densidade elétrica na extremidade do eixo desse cilindro, estará para a densidade sobre a superfície do globo de 8 polegadas, assim como nove vezes 2,30 está para 1,00, [ou seja,] assim como 20,7 está para 1,0. Porém, como o ar é um corpo dielétrico imperfeito no qual todas as partes móveis só resistem à

comunicação e à penetração do fluido elétrico na medida em que ela seja levada apenas a um grau de densidade muito baixo,[743] resulta disso que ao tocar a extremidade de nosso cilindro de 2 linhas de diâmetro no globo de 8 polegadas carregado de eletricidade, o fluido elétrico deve escapar pela extremidade do cilindro com tanto maior rapidez, quanto maior for a densidade elétrica.[744] E sendo essa densidade ainda maior na extremidade do cilindro, ao mesmo tempo em que ela é quase imperceptível sobre a superfície do globo, o globo deve livrar-se bem rapidamente de quase toda sua eletricidade. Isso não contraria em nada a lei que acabamos de encontrar em nossa Terceira Memória, a qual nos forneceu a diminuição sucessiva da densidade dos pequenos globos proporcional à densidade,[745] já que, assim como dissemos para aquele caso, essa lei só ocorre quando a densidade elétrica é pequena.

20.25 XXV. *Sobre a Maneira pela qual o Fluido Elétrico se Distribui entre Globos de Diâmetros Diferentes e um Mesmo Cilindro*

Ao utilizar nas experiências e em suas reduções os mesmos métodos das Seções anteriores encontraremos que, quando os globos têm um diâmetro muito maior que aquele do cilindro como, por exemplo, oito vezes maior e além disso, as densidades elétricas dos diferentes globos em contato com o cilindro sendo supostas iguais a uma mesma quantidade D, as densidades do fluido elétrico que revestirão o cilindro estarão entre si como o diâmetro dos globos; de maneira que, por exemplo, se considerarmos nosso globo de 8 polegadas em contato com um cilindro de 1 polegada, vimos na Seção 20.12, que sendo D a densidade do globo, aquela do

[743] Ou seja, na medida em que a eletricidade ou carga elétrica tenha uma densidade muito pequena.

[744] Coulomb está tentando explicar o poder das pontas em corpos eletrizados. A explicação moderna sobre a descarga elétrica através das pontas de condutores eletrizados é mais complexa. Essa alta densidade superficial de cargas que ocorre nas pontas dos condutores provoca, nas vizinhanças dessas pontas, uma ionização do ar. São essas cargas produzidas pela ionização do ar que são colocadas em movimento. Deve-se enfatizar aqui que as descargas elétricas no ar não são devidas ao arrancamento de elétrons dos eletrodos, como algumas vezes se afirma erroneamente. Para que elétrons sejam emitidos de superfícies metálicas mantidas a baixas temperaturas, são necessárias forças por unidade de carga da ordem de 10^8 V/m. Essa força por unidade de carga é bem maior do que o valor de 3×10^6 V/m necessário para ionizar o ar à pressão atmosférica, quando então ocorre a descarga elétrica. Ou seja, a força por unidade de carga necessária para ionizar o ar é bem menor do que a força por unidade de carga necessária para arrancar elétrons de eletrodos frios. Mais detalhes sobre o poder ou efeito das pontas podem ser encontrados na Seção B.9 (Descoberta do efeito das pontas) de [Assis, 2010b], [Assis, 2010a], [Assis, 2015b] e [Assis, 2017]; assim como no Capítulo 9 (O poder das pontas) e na Seção 11.7 (Gray, Franklin, o poder das pontas e a natureza elétrica dos raios e relâmpagos) do Volume 2 do mesmo livro, [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019]. Ver ainda [Gray, 1732, pág. 42] com tradução para o português em [Boss et al., 2012, Capítulo 7], [Savelyev, 1989, pág. 249], [Ferreira and Maury, 1991, págs. 60-62], [Ferreira, s da, págs. 39-40], [Gaspar, 2003, págs. 239-243], [Blondel and Wolff, 2008b], [Laburú et al., 2008], [Silveira, 2010], [Silveira, 2011], [Blondel and Wolff, 2011d], [Silveira, 2016] e [Silveira, 2018].

[745] Seja uma esfera de raio r eletrizada no tempo t com uma carga q. Na terceira Memória, traduzida no Capítulo 14, Coulomb estudou a perda de carga dessa esfera em função do tempo quando colocada no ar. Encontrou a seguinte equação (ver ainda o Capítulo 15):

$$\frac{d\delta}{\delta} = -mdt \ , \tag{20.1}$$

onde δ pode representar o valor da carga q ou então a densidade superficial elétrica $q/(4\pi r^2)$, com m sendo uma constante positiva. A integração dessa equação leva a um decrescimento exponencia de δ em função do tempo t.

cilindro era aproximadamente $2D$: mas se ao invés de um globo de 8 polegadas tivéssemos colocado em contato com o mesmo cilindro um globo cujo diâmetro fosse de 24 polegadas, e cuja densidade de fluido elétrico espalhada sobre a superfície desse globo fosse, como no primeiro caso, igual a D, [então] a densidade elétrica média do fluido elétrico que revestiria o cilindro, seria aproximadamente igual a $6D$.

20.26 XXVI. *Resultado das Experiências Anteriores*

Se quisermos ter de acordo com as experiências anteriores a razão entre a densidade elétrica do fluido distribuído sobre a superfície de um globo e a densidade de um cilindro com um diâmetro qualquer em contato por sua extremidade com esse globo, será suficiente observar que como para um mesmo globo e cilindros diferentes, de acordo com a Seção 20.22, as densidades elétricas dos cilindros diferentes estarão entre si em razão inversa da potência 4/5 dos diâmetros dos cilindros; potência essa que se aproxima muito da unidade quando o globo tem um diâmetro bem maior que aquele do cilindro; para globos diferentes e o mesmo cilindro, caso o diâmetro dos globos seja bem maior que aquele do cilindro, a densidade do cilindro seguirá a razão do diâmetro dos globos: ao supor D [como sendo] a densidade do globo, R seu raio, δ a densidade média do cilindro e r seu raio, teremos de maneira geral

$$\delta = \frac{mDR}{r^{4/5}} \,,$$

ou $\delta = mDR/r$ quando R for muito maior do que r. Nessa equação m é um coeficiente constante que será facilmente determinado pela experiência.

De fato, se observarmos pela Seção 20.22[746] que quando colocamos um globo de 4 polegadas de raio em contato com um cilindro de 30 polegadas de comprimento e 2 linhas de diâmetro, tivemos para a densidade média do fluido elétrico que reveste o cilindro $\delta = 9D$; veremos que nesse exemplo nossa equação $\delta = mDR/r$, ao substituir no lugar de R/r o número 48, fornecerá $\delta = 48mD = 9D$; de onde resulta $m = 9/48$.

20.27 XXVII. *Aplicação Desse Resultado para a Pipa Elétrica*

Quando em um tempo tormentoso voamos uma pipa cuja linha[747] é condutora ou trançada com um fio de metal, sabemos que durante a passagem de uma nuvem carregada de fluido elétrico na região onde se encontra a pipa, caso a extremidade inferior da linha esteja isolada, ou ligada a um corpo dielétrico, a linha da pipa emite faíscas elétricas para todo lado, e essas faíscas são levadas com a maior violência e com o maior perigo sobre todos os corpos condutores vizinhos a essa linha.[748] É fácil de ver que esse fenômeno resulta necessariamente das experiências anteriores e da fórmula que obtivemos delas.

[746] Por um lapso no original aparece aqui Seção 33.

[747] No original: *corde*. Essa palavra também pode ser traduzida por "corda", "cordão", "cabo", "fio" ou "barbante".

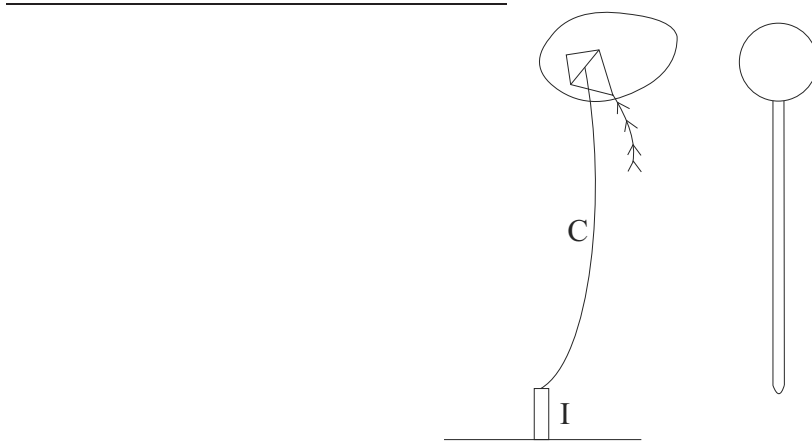
[748] Essa experiência é devida a Benjamin Franklin, ver a Nota de rodapé 51 na página 32. Coulomb imagina aqui uma pipa presa a um fio condutor C com a extremidade inferior do fio presa a um isolante I, como ilustrado nessa Nota de rodapé:

Suponhamos, para servir de exemplo, que a nuvem carregada de fluido elétrico tenha a forma de um globo de mil pés de raio [345 m]; que a corda da pipa tenha uma linha de raio;[749] e que δ seja a densidade média sobre a superfície da corda. Nesse caso a equação

$$\delta = \frac{mDR}{r}$$

fornece[750]

$$\delta = \frac{9}{48} 1000 \cdot 12^2 D = 27000D \ .$$

Mas vimos na *Seção* 20.7, *quarta experiência*, que a densidade elétrica na extremidade de um cilindro eletrizado terminado em hemisfério estava para a densidade média do cilindro, :: 2,30 : 1,00. Assim a densidade elétrica na extremidade da linha, seria igual a $62000D$, ou sessenta e duas mil vezes maior que a densidade elétrica do fluido que é suposto revestir a nuvem. Portanto, necessariamente deve acontecer, como de fato ocorre, que o fluido elétrico condensado a esse grau de densidade ao longo da linha da pipa, faísca para todo lado, principalmente na extremidade dessa linha ou em sua fixação [isolante] inferior, sendo levada com violência a distâncias muitas vezes de vários pés a todos os corpos condutores vizinhos.

Ele vai modelar a situação em que a pipa está imersa em uma nuvem eletrizada como sendo análoga à situação em que um longo e fino cilindro condutor está em contato por sua extremidade com um grande globo condutor eletrizado.

Para uma discussão sobre a pipa elétrica e os para-raios ver o Capítulo 11 (descargas elétricas no ar) do Volume 2 do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019], juntamente com as referências lá citadas.

[749] 1 linha = 0,226 cm. Coulomb está supondo a nuvem como uma grande esfera condutora em contato com a corda que sustenta a pipa, assumindo essa corda como sendo um longo e fino cilindro condutor.

[750] Temos 1 pé = 12 polegadas = 144 linhas = 12^2 linhas. Logo D/r = (1000 pés)/1 linha = $1000 \cdot 12^2$.

20.28 XXVIII. *Determinação Teórica da Densidade de Pontos Diferentes e da Densidade Média de um Cilindro Colocado em Contato por Sua Extremidade com um Globo de um Diâmetro Maior que Esse Cilindro*

20.28.1 *Cilindros de Diâmetros Diferentes e de Mesmo Comprimento*

O método de aproximação mais simples para determinar a razão entre a densidade elétrica da superfície do globo e a densidade do cilindro,[751] quando o cilindro tem um grande comprimento, é o de dividir todo o comprimento do cilindro em partes [de comprimentos] iguais a seu diâmetro, e de considerar cada parte como um pequeno globo de mesmo diâmetro, procurando, como fizemos anteriormente, *Seção* 20.17, as condições de equilíbrio em todos os pontos de contato. Aqui vão dois outros métodos de aproximação.

20.29 XXIX. *Primeiro Método*. **Primeiro Exemplo.** *Cilindro de 30 Polegadas de Comprimento, 2 Polegadas de Diâmetro, em Contato por Sua Extremidade com um Globo de 8 Polegadas de Diâmetro*

Se quero determinar a densidade média ou a densidade do fluido elétrico sobre o meio de um cilindro de 2 polegadas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento, em contato por sua extremidade com um globo de 8 polegadas de diâmetro, suporei esse cilindro terminado por dois hemisférios e dividido em quinze partes [de comprimentos] iguais ao diâmetro do cilindro; calcularei a ação de cada divisão, como se a linha [reta] fosse formada de quinze pequenos globos, com cada globo de 2 polegadas de diâmetro. De acordo com essa suposição, as quinze primeiras equações de nossa Tabela[752] nos forneceriam a densidade de cada pequeno globo que forma a linha. Mas se quisermos ter a densidade média aproximada, é necessário determinar essa densidade no meio do cilindro ou no oitavo globo. Para simplificar o cálculo, é necessário observar que, de acordo com nossa Tabela, se somarmos as oito primeiras equações, o coeficiente de δ_8 será maior que os coeficientes dos termos que estão longe dele; e que além disso é pequena a variação da densidade de um globo a outro que estão próximos do meio da linha. Após essas reflexões, se somarmos as oito primeiras equações, teremos para os termos que seguem δ_7, as seguintes séries:[753]

[751]As Seções 28 a 38 não foram incluídas na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[752]Ver a Nota de rodapé 737 na página 367 para o caso de 24 pequenos globos em contato com um globo grande. No caso atual de 15 pequenos globos em contato com um grande globo teríamos uma Tabela análoga com 15 equações, indo os termos de cada equação até δ_{15}.

[753]De acordo com a Nota de rodapé 739 na página 369, Coulomb substituiu

$$\frac{2}{7^2}+\frac{2}{9^2}+...+\frac{2}{45^2}$$

por

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{45}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{45^2}\,.$$

$$\delta_8\left(1+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+\text{etc.}+\frac{2}{15^2}\right)=\delta_8\left(1,30+\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{15^2}\right)\ ,$$

$$\delta_9\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+\text{etc.}+\frac{2}{17^2}\right)=\delta_9\left(0,30+\frac{1}{7}-\frac{1}{17}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{17^2}\right)\ ,$$

$$\delta_{10}\left(\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+\text{etc.}+\frac{2}{19^2}\right)=\delta_{10}\left(0,08+\frac{1}{7}-\frac{1}{19}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{19^2}\right)\ ,$$

$$\delta_{11}\left(\frac{2}{7^2}+\text{etc.}+\frac{2}{21^2}\right)=\delta_{11}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{21}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{21^2}\right)\ ,$$

$$\delta_{12}\left(\frac{2}{9^2}+\text{etc.}+\frac{2}{23^2}\right)=\delta_{12}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{23}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{23^2}\right)\ ,$$

$$\delta_{13}\left(\frac{2}{11^2}+\text{etc.}+\frac{2}{25^2}\right)=\delta_{13}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{25}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{25^2}\right)\ ,$$

$$\delta_{14}\left(\frac{2}{13^2}+\text{etc.}+\frac{2}{27^2}\right)=\delta_{14}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{27}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{27^2}\right)\ ,$$

$$\delta_{15}\left(\frac{2}{15^2}+\text{etc.}+\frac{2}{29^2}\right)=\delta_{15}\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{29}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{29^2}\right)\ .$$

Todos os primeiros termos dessa equação representam a soma dos coeficientes das oito primeiras equações da Tabela; o segundo termo à direita representa cada série que forma esses coeficientes, somada de acordo com o método que explicamos na Nota da Seção 20.15.[754] Agora sendo pequena a variação da densidade dos pequenos globos vizinhos ao globo δ_8, e como os coeficientes diminuem rapidamente na medida em que nos afastamos de δ_8 podemos, por aproximação, considerar todas as densidades iguais desde δ_8 até δ_{15}, o que fornecerá para a soma de nossas séries a equação definitiva

$$\delta_8\left(1,68+\frac{3}{7}+\int\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\text{etc.}+\frac{1}{15}\right)\right.$$

Aqui ele vai usar a mesma aproximação, ou seja, vai substituir

$$\frac{2}{m^2}+\frac{2}{(m+1)^2}+\ldots+\frac{2}{n^2}$$

por

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\ .$$

[754]Ver a Nota de rodapé 739 na página 369.

$$- \int \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \text{etc.} + \frac{1}{29}\right) + \frac{3}{7^2} + \int \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} + \frac{1}{29^2}\right) + \frac{1}{15^2}\right) \ .$$

Somaremos as séries por aproximação, seja ao considerar os valores médios, os quais multiplicaremos pelo número de termos, seja ao seguir, como faremos, o método que demos na *Seção* 20.15, o que fornecerá

$$\int \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{2\mu} \log \left(\frac{15}{7}\right) + \frac{1}{14} + \frac{1}{30} \ ,$$

onde μ é o módulo do sistema logarítmico.[755] Pelo mesmo método:

$$\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \text{etc.} + \frac{1}{29}\right) = \frac{1}{2\mu} \log \frac{29}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{58} \ .$$

Teremos além disso:

$$\int \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} + \frac{1}{29^2}\right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{29} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{29^2} \ .$$

Assim, ao reunir todos esses valores, e fazendo $\mu = 0,434$, módulo do sistema logarítmico das tabelas comuns, a soma de todos os coeficientes das oito primeiras equações de nossa Tabela, desde δ_8 até δ_{15}, fornecerá $2,40\delta_8$.

Para completar a equação, é necessário somar todos os termos que precedem δ_8 nas oito primeiras equações, desde δ_7 até δ_1. Observaremos ao examinar a Tabela que se todas as densidades fossem iguais desde δ_7 até δ_1, todos esses termos se destruiriam mutuamente, sendo o coeficiente positivo de δ_7 igual ao coeficiente negativo de δ_1, e assim alternadamente. Observaremos além disso que exceto esses coeficientes de δ_7 e de δ_1, os outros são muito pequenos; e que além disso a variação da densidade de um globo a outro, só cresce rapidamente do primeiro globo cuja densidade é δ_1 para o segundo cuja densidade é δ_2. Podemos assim, sem um grande erro, supor que todos os termos entre δ_7 e δ_1 se destroem mutuamente, e [então] o valor muito aproximado da soma de todos os termos que precedem δ_8 nas oito primeiras equações, será representado por

$$(\delta_7 - \delta_1) \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \text{etc.} + \frac{2}{13^2}\right) = 0,40\,(\delta_7 - \delta_1) \ ;$$

porém, após as observações anteriores, δ_7 pode ser tomado por δ_8. Encontramos na *Seção* 20.14, por aproximação, $\delta_1 = 0,52D$.

Assim, ao pegar a soma das oito primeiras equações de nossa Tabela, teremos de uma maneira aproximada a equação

$$D \left(1 + \frac{2R^2}{(R+2r)^2} + \frac{2R^2}{(R+4r)^2} + \text{etc.} + \frac{2R^2}{(R+14r)^2}\right) + 0,21D = 2,80\delta_8 \ .$$

Como em nossas experiências e na suposição desse exemplo, $R = 4r$, não será muito longo o cálculo exato da soma do primeiro termo; porém se determinarmos essa soma pelo método de aproximação da Seção 20.14, o que é mais do que suficiente, teremos em nosso exemplo,

$$D \left(1 + \frac{16}{6} - \frac{16}{18} + \frac{16}{6^2} + \frac{16}{18^2}\right) + 0,21D = 3,48D = 2,80\delta_8 \ ;$$

de onde resulta finalmente $\delta_8 = 1,24D$, quantidade que havíamos encontrado, pelas experiências, igual a $1,30D$. Assim a teoria e a experiência só diferem entre si por quantidades muito pequenas para que as operações aproximadas anteriores possam avaliá-las.

[755] Ver a Nota de rodapé 553 na página 264.

20.30 XXX. Segundo Exemplo. *Cilindro de 30 Polegadas de Comprimento, 2 Linhas de Diâmetro, em Contato por Sua Extremidade com um Globo de 8 Polegadas*

Se quero comparar agora um cilindro de 30 polegadas de comprimento e 2 linhas de diâmetro, com um globo de 8 polegadas [de diâmetro], no lugar do cilindro posso supor uma linha formada de 180 pequenos globos de 2 linhas de diâmetro, em contato por sua extremidade com esse globo. Assim, ao seguir, de acordo com essa suposição, o método do exemplo anterior, formarei uma Tabela de 180 equações análogas àquelas desse exemplo [anterior]; e ao realizar a soma das 91 primeiras equações, terei para todos os termos que seguem δ_{91}, a quantidade

$$\delta_{91}\left(1,68+\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{1}{181}+\int\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\text{etc.}+\frac{1}{181}\right)\right.$$

$$\left.-\int\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{183}+\text{etc.}+\frac{1}{359}\right)+\int\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}+\frac{1}{359^2}\right)\right)\ .$$

Ao pegar as somas das séries, de acordo com o método explicado na Nota da *Seção* 20.17, essa quantidade será reduzida a $3,70\delta_{91}$.

Se calcularmos agora a soma dos termos que precedem δ_{91}, no mesmo membro da equação, a encontraremos igual a $0,46(\delta_{90}-\delta_1)$, seguindo as observações da Seção anterior. Porém δ_{90} pode ser considerado igual a δ_{91}, e δ_3 pode, sem erro perceptível por nossa operação, ser calculado de acordo com as duas primeiras equações que formarão a Tabela. Ao supor as densidades iguais desde δ_2 até δ_{180}, essas duas primeiras equações seriam:

Primeira equação:

$$D=\delta_1+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\text{etc.}+\frac{2}{359^2}\right)\delta_2=\delta_1+0,46\delta_2\ .$$

Segunda equação:

$$1,84D=-\delta_1+\left(1+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\text{etc.}+\frac{2}{357^2}\right)\delta_2=-\delta_1+1,46\delta_2\ .$$

De onde resulta $\delta_2=48D$ e $\delta_1=0,32D$. Assim $0,46\delta_1=0,15D$. Dessa forma, o segundo membro da soma das 91 primeiras equações, seria igual a $(3,70+0,46)\delta_{91}=0,15D$.

Resta calcular a soma do primeiro membro formado pela adição dos 91 primeiros termos que exprimem a ação do globo grande. Essa soma, de acordo com o que dissemos na Seção anterior, será representada pela fórmula

$$D\left(1+(48)^2\left(\frac{2}{(48+2)^2}+\frac{2}{(48+4)^2}+\text{etc.}+\frac{2}{218^2}\right)\right)\ .$$

De acordo com o método de aproximação da *Seção* 20.14, essa quantidade é igual a:

$$D\left(1+(48)^2\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{228}+\frac{1}{50^2}+\frac{1}{228^2}\right)\right)=38,18D\ .$$

Assim, ao comparar esse termo com o segundo membro, teremos $(38,18+0,15)D=4,16\delta_{91}$, de onde resulta finalmente $\delta_{91}=9,21D$.

Na *Seção* 20.24 encontramos, ao colocar um globo de 8 polegadas de diâmetro em contato com um cilindro de 2 linhas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento, que caso a densidade do globo, após o contato, fosse D, a densidade média do cilindro seria, de acordo com a experiência, igual a $9,00D$. Assim, a experiência nesse exemplo está de acordo com a teoria tão bem quanto podemos esperar em pesquisas desse tipo. Encontramos a mesma concordância no exemplo anterior entre a teoria e a experiência, embora o cilindro fosse doze vezes mais grosso que na experiência atual. Assim a verdade dos dois resultados é confirmada um pelo outro.

20.31 XXXI. *Cilindros de Diferentes Comprimentos em Contato com o Mesmo Globo*

Encontramos na *Seção* 20.24, que pela teoria teríamos a densidade média de uma linha de 30 polegadas de comprimento, formada com quinze pequenos globos de 2 polegadas de diâmetro em contato com um globo de 8 polegadas, igual a $1,24D$, na qual D exprime a densidade da superfície do globo após o contato. Porém havíamos encontrado, na *Observação* da *Seção* 20.14,[756] que ao colocar apenas quatro globos de 2 polegadas de diâmetro em contato com o mesmo globo de 8 polegadas de diâmetro, a densidade da superfície do globo sendo D, a densidade média para a linha de quatro globos era, pela teoria, igual a $1,21D$. Assim a teoria nos ensina que, qualquer que seja o comprimento de um cilindro ou de uma linha formada por pequenos globos de mesmo diâmetro que esse cilindro, a densidade média é aproximadamente igual; resultado esse de acordo com aquele fornecido pela décima e pela décima primeira experiência.

20.32 XXXII. *Observação*

Só é necessário observar que quando os cilindros possuem um comprimento muito pequeno e têm um diâmetro muito pequeno em relação ao diâmetro do globo grande, nesse caso o pequeno cilindro adquire uma densidade média bem menor que aquela que seria adquirida por um cilindro de mesmo diâmetro, mas de um comprimento maior. Para se convencer dessa verdade, calculemos a densidade de dois pequenos globos de apenas 2 linhas de diâmetro cada um, formando um comprimento de 4 linhas em contato por sua extremidade com um globo de 8 polegadas de diâmetro.[757] Essa suposição forneceria as duas equações a seguir.

Primeira equação:

$$D = \delta_1 + 0,22\delta_2 \ .$$

Segunda equação:

$$1,84D = -\delta_1 + \delta_2 \ .$$

Resulta dessas duas equações, $\delta_1 = 0,48D$ e $\delta_2 = 2,36D$. Assim, a densidade média do sistema de 4 linhas de comprimento, formado por dois pequenos globos de 2 linhas cada um de diâmetro, seria igual a $(0,48 + 2,36)D/2 = 1,42D$, quantidade essa que acabamos de encontrar na Seção 20.30 igual a $0,21D$ para uma linha de mesmo diâmetro, mas com 30 polegadas de comprimento.

[756] Ver a Subseção 20.14.1.

[757] Essa situação está representada na Figura da Nota de rodapé 730 na página 363.

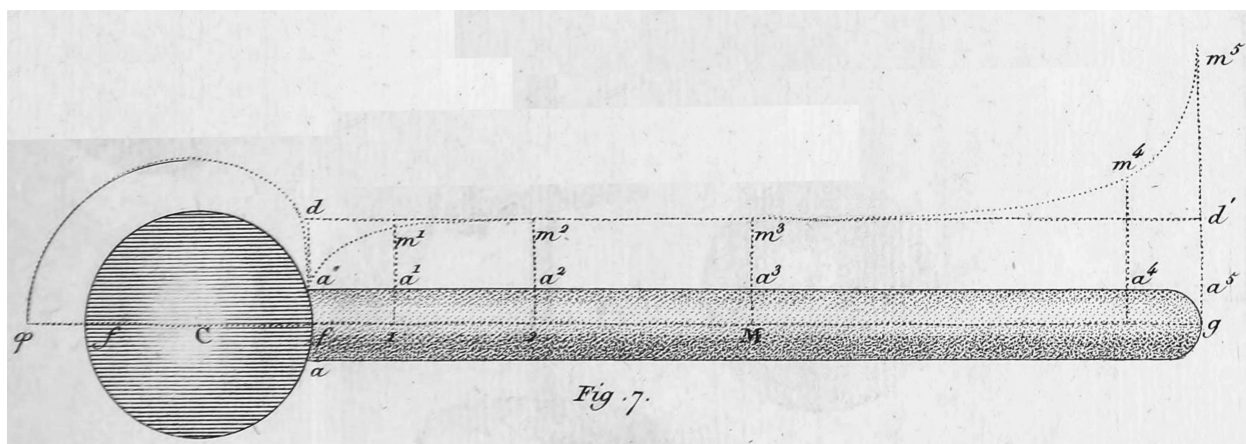
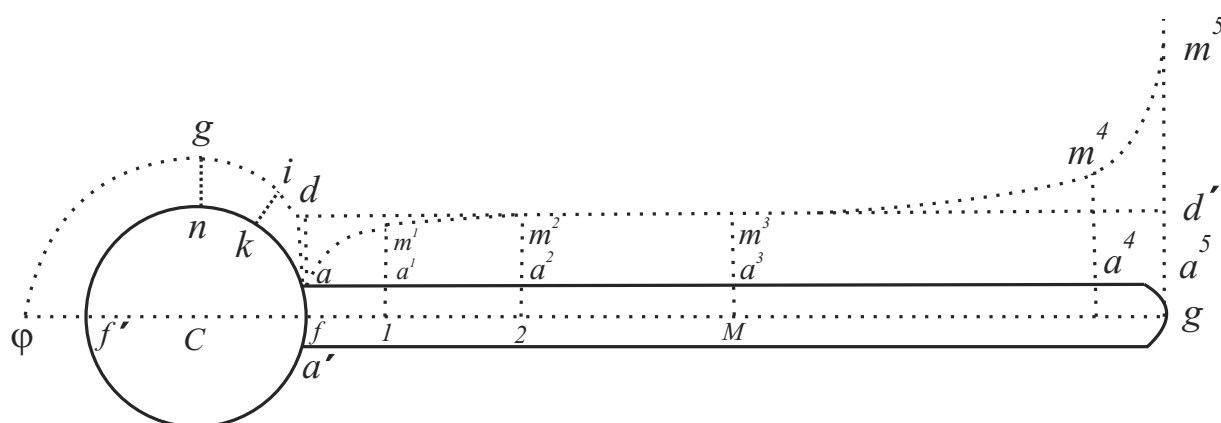
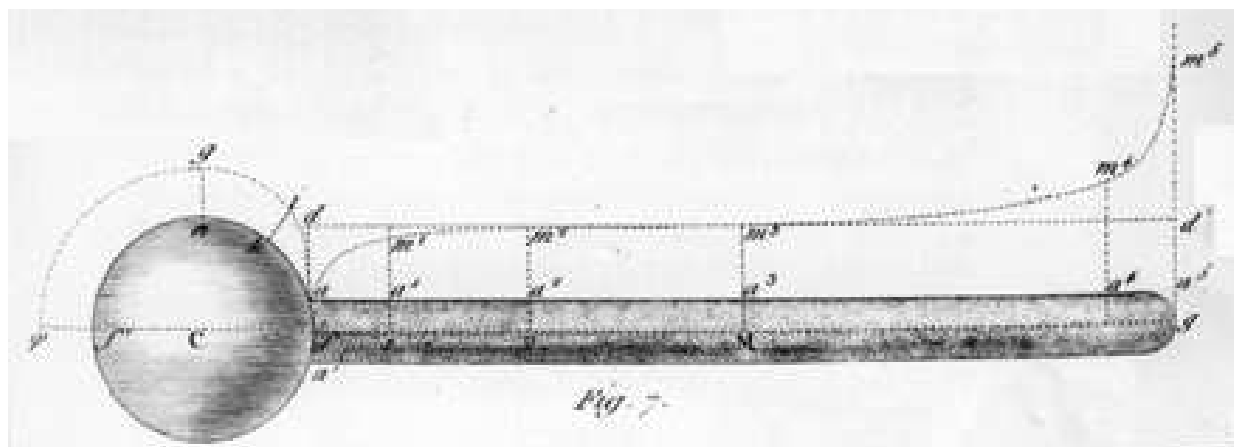
20.33 XXXIII. *Observação*

Essa teoria confirmada pela experiência,[758] de acordo com os métodos que acabamos de explicar mais acima, explica um fenômeno elétrico conhecido há muito tempo. Sabemos que, quando um globo eletrizado é munido de uma agulha ou de uma ponta, ele perde rapidamente sua eletricidade, porém bem menos rapidamente quando essa agulha é muito curta. Aqui vai a explicação desse fenômeno. A força coercitiva que o ar opõe ao escoamento do fluido elétrico é limitada. Logo, quanto maior for a densidade desse fluido, mais rapidamente escoará o fluido. Assim, em nosso exemplo, quando a agulha tem 30 polegadas de comprimento e 2 linhas de diâmetro, sua densidade média é igual a $9,21D$; porém ela é igual a apenas $1,42D$ quando o cilindro tem 4 linhas de comprimento. Assim o fluido elétrico deve escapar com uma rapidez bem maior pela primeira agulha do que pela segunda.

20.34 XXXIV. *Segundo Método de Aproximação para Determinar a Variação da Densidade Elétrica ao Longo da Superfície de um Cilindro em Contato por Sua Extremidade com um Globo*

É fácil, de acordo com as observações anteriores, de encontrar pelo cálculo diferentes meios de aproximar tão bem quanto quisermos a variação da densidade elétrica ao longo da superfície de um cilindro. Para fixar a imaginação sobre um exemplo, consideremos nosso cilindro, *Figura 7*, de duas polegadas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento, e vamos supô-lo como nessa Figura, em contato por sua extremidade com um globo de 8 polegadas [de diâmetro].[759]

[758]Por um lapso no original essa Seção saiu com o mesmo número que a Seção anterior, a saber, 32.

[759]Nessa Nota de rodapé apresento uma outra reprodução dessa Figura 7. Ela está mais clara do que a Figura 7 que coloquei no meio do texto, mas não aparecem os pontos n, g, k, i. Além disso, os pontos a e a' ficaram invertidos na Figura dessa Nota de rodapé em relação à Figura original de Coulomb:

De acordo com tudo o que foi dito nessa Memória e na anterior, é fácil de ver que a densidade do fluido elétrico é nula no círculo de contato $a'a$ entre o cilindro e o globo;[760] que para o globo, a densidade elétrica cresce desde o ponto a até o polo oposto f' onde ela tem seu valor *máximo*; que o crescimento rápido dessa densidade ao longo dos primeiros 25° ou 30°, partindo do ponto a, abranda consideravelmente em seguida, de maneira que o crescimento da densidade elétrica é quase imperceptível desde o ponto n do equador[761] até o polo f'. Na superfície cilíndrica, a densidade é nula ou ao menos imperceptível no ponto a; em seguida ela cresce rapidamente sobre as primeiras duas ou três polegadas, onde ela se encontra aproximadamente no *máximo* de seu crescimento; crescendo menos rapidamente em seguida na medida em que nos aproximamos do meio do cilindro; a variação do crescimento da densidade aumenta em seguida bem lentamente até a duas ou três polegadas da extremidade, crescendo bem rapidamente sobre essas duas últimas polegadas. A distância na *Figura 7* da linha pontilhada ao globo e ao cilindro indica aproximadamente o lugar geométrico da densidade elétrica. Ao pegar o círculo fkf' e a linha aa_5 como eixo, as ordenadas ki, ng, $f'\varphi$; a_1m_1, a_2m_2, a_3m_3, etc. representarão as densidades.

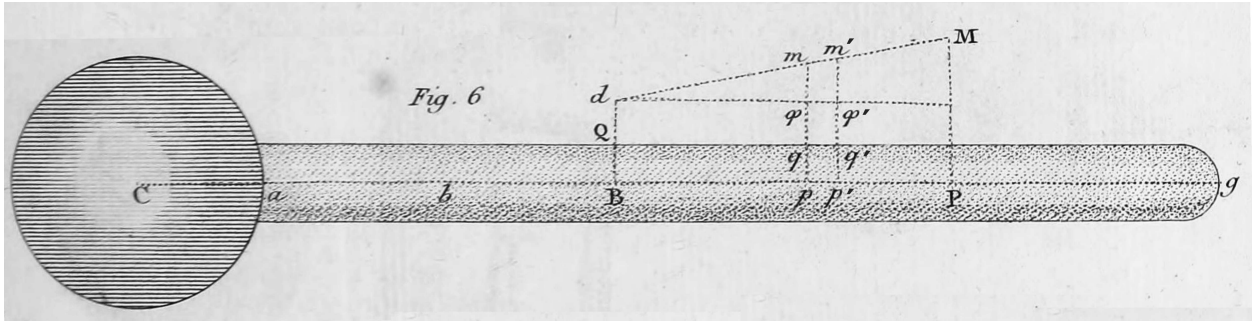
Se dividirmos agora o cilindro, *Figura 7*, em um número qualquer de partes iguais ou desiguais [em comprimento], tais como $f1$; 12, $2M$, etc. tendo o cuidado de fazer bem curtas as partes onde a variação da densidade deve ser considerável, será fácil de formar um

[760]Coloquei abaixo da Figura 7 que vai no meio do texto uma outra representação da imagem na qual indiquei mais claramente as letras mencionadas por Coulomb.

[761]No original: *depuis le point μ de l'équateur*. Substitui nessa sentença a letra μ por n, de acordo com a Figura 7 original de Coulomb, onde não aparece o símbolo μ no equador da esfera, mas sim o ponto n.

polígono no lugar da curva $am_1m_2m_3m_4m_5$, ao ligar os ponto a, m_1, m_2, m_3 etc. por meio de linhas retas. Nesse polígono as densidades crescem de um ponto a outro seguindo uma linha reta, e o polígono terá o mesmo número de lados que o número de divisões do cilindro. Assim, buscando em cada divisão o estado de equilíbrio ao longo do eixo entre a ação de todas as porções do cilindro e a ação do globo que o termina, teremos o mesmo número de equações que o número de lados do polígono. Consequentemente, será possível e até mesmo fácil, como acabamos de ver, determinar, em relação ao eixo, a inclinação de cada lado do polígono e, consequentemente, ter a variação aproximada da densidade.

20.35 XXXV

Aqui vão os princípios do cálculo para cada parte do cilindro. Uma porção (Figura 6) BP de uma superfície cilíndrica agindo sobre um ponto b de seu eixo, de acordo com o inverso do quadrado das distâncias, a densidade [superficial elétrica] no ponto Q sendo $Qd = \delta$, e crescendo em seguida ao longo da linha dM, queremos saber a ação dessa superfície sobre o ponto b.

Seja $bB = a$; $bp = x$; $Bp = x - a$, $\frac{\varphi m}{Bp} = n$; seja R o raio do globo, r o raio do cilindro e a razão da circunferência para o raio igual a 2π.[762] Teremos para a ação da zona de superfície elementar que corresponde a pp', com essa ação avaliada na direção do eixo, a quantidade:[763]

$$[\delta + n(x-a)]\frac{2\pi r x dx}{(r^2+x^2)^{1/2}} = \frac{(\delta - na)2\pi r x dx}{(r^2+x^2)^{1/2}} + \frac{2\pi r x^2 dx}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$= (\delta - na)\frac{2\pi r x dx}{(r^2+x^2)^{1/2}} + \frac{2\pi r x^2 dx}{(r^2+x^2)^{1/2}} - \frac{2\pi r dx}{(r^2+x^2)^{1/2}} + \frac{2\pi r dx}{(r^2+x^2)^{1/2}} ,$$

cuja integral considerada de maneira que ela se anule quando $x = a$ fornece, sendo μ o módulo logarítmico:[764]

$$2\pi r\delta\left[\frac{1}{(r^2+a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+x^2)^{1/2}}\right] + 2\pi r n\left[\frac{a-x}{(r^2+x^2)^{1/2}}\right] + \frac{n2\pi r}{\mu}\log\frac{x+(r^2+x^2)^{1/2}}{a+(r^2+a^2)^{1/2}} .$$

762No original, [Coulomb, 1791, pág. 665], essa frase aparece como: "le rapport de la circonférence au rayon égal π". Novamente estou substituindo os símbolos Π ou π de Coulomb por 2π, enfatizando ainda a definição moderna de π como sendo a razão da circunferência para o diâmetro, isto é, $\pi = 3,14159....$ Ver ainda as Notas de rodapé 714 e 728 nas páginas 353 e 361, respectivamente.

763Ou seja, a próxima equação representa a força exercida pela seção pp' do cilindro, com um comprimento dx, ao atuar sobre uma partícula eletrizada pontual localizada em b.

764Ver a Nota de rodapé 553 na página 264.

20.36 XXXVI

Suponho agora que quero inicialmente determinar a variação da densidade perto do centro do meu cilindro, que em nosso exemplo tem 2 polegadas de diâmetro e 30 polegadas de comprimento. Caso, Figura 7, eu faça passar pelo ponto m_3, que suponho corresponder ao centro de meu cilindro, uma linha dm_3d' paralela ao eixo do cilindro, será fácil de ver de acordo com todas as observações anteriores, que a variação da densidade próxima do centro a_3 segue aproximadamente uma linha reta até a uma distância bem grande desse ponto. Assim, a ação dos pontos afastados ao diminuir como a razão inversa do quadrado das distâncias, só pode resultar um pequeno erro da suposição que a linha que exprime a densidade estende-se em linha reta até as extremidades do cilindro.

De acordo com essa reflexão, será fácil de aplicar a fórmula ao nosso exemplo, observando que aqui $a = 0$, e que a metade do comprimento do cilindro representada por x é muito maior do que r. Assim, teremos para o valor da ação da metade do cilindro Mg sobre o ponto M, a quantidade

$$2\pi r\delta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right)-2\pi rn+\frac{n2\pi r}{\mu}\log\frac{2x}{r}\ .$$

Para obter a ação contrária da outra metade do cilindro Mf, é necessário tornar a quantidade n negativa, já que a densidade diminui de a_3 em direção ao ponto a, o que fornece:[765]

$$2\pi r\delta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right)+2\pi rn-\frac{n2\pi r}{\mu}\log\frac{2x}{r}\ .$$

Assim, a ação de todo o cilindro na direção Mf será

$$\frac{4n\pi r}{\mu}\log\frac{2x}{r}-4n\pi r\ .$$

É necessário igualar essa quantidade à ação do globo C, a qual, como x é a metade do comprimento do cilindro, será $4\pi DR^2/(R+x)^2$. De onde resulta finalmente a equação

$$\frac{4\pi DR^2}{(R+x)^2}=4n\pi r\log\frac{2x}{r}-4n\pi r\ ,$$

que exprime a variação nr da densidade do centro do cilindro, sobre um comprimento igual ao raio. Em nosso exemplo, o diâmetro do cilindro é de 2 polegadas, seu comprimento é de 30 polegadas, o raio do globo é de 4 polegadas. Assim, $R = 4$, $r = 1$, $x = 15$, de onde resulta $n = 0,018D$. Ou seja, sobre uma polegada de comprimento, a densidade elétrica cresce aproximadamente no centro do cilindro, da quinquagésima parte da densidade do globo.

Se considerarmos como segundo exemplo o cilindro com um raio de uma linha [0,226 cm] e 30 polegadas de comprimento [81,21 cm], do qual determinamos a densidade média por nossas experiências; nesse caso $R = 48r$, $x = 180r$, o que fornece $n = 0,09D$. Ou seja, em um cilindro cujo diâmetro seria doze vezes menor que o anterior, a densidade sobre uma linha de

[765]No original a próxima equação apareceu da seguinte forma:

$$2\pi r\delta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right)+2\pi rn-\frac{n2\pi r}{\mu}\log 2x\ .$$

comprimento cresceria, no centro do cilindro, de 1/1000, e sobre 12 linhas de comprimento, ela cresceria consequentemente seis vezes mais para o cilindro de 2 linhas de diâmetro do que para o cilindro de 2 polegadas de diâmetro.

Enfim, se considerarmos o raio do cilindro como sendo de um centésimo de linha,[766] encontraremos que sobre uma polegada de comprimento, a densidade cresce cinquenta vezes mais que sobre um cilindro de uma linha de raio e, consequentemente, trezentas vezes mais que sobre um cilindro de 2 polegadas de diâmetro.

Caso os cilindros tivessem um comprimento muito maior que no exemplo anterior, nesse caso as variações da densidade no centro de dois cilindros, para um mesmo comprimento de uma polegada, estariam entre si em uma razão mais aproximada do inverso dos diâmetros entre os dois cilindros. Assim, por exemplo, caso o comprimento dos cilindros fosse de 300 polegadas [812,1 cm], nossa fórmula nos daria no centro dos cilindros, a variação da densidade do cilindro de uma linha de raio para a variação da densidade no cilindro de uma polegada de raio, aproximadamente :: 8 : 1; razão essa que seria :: 6 : 1, quando o comprimento dos cilindros fosse apenas de 30 polegadas.

20.37 XXXVII

Se quisermos, de acordo com o método das duas Seções anteriores, determinar de uma maneira aproximada as variações da densidade para pontos diferentes de nosso cilindro aa_5, Figura 7, será necessário dividir em partes diferentes esse cilindro, e supor que em cada parte a variação da densidade segue uma linha reta. Para não nos afastarmos muito da verdade com essa suposição, é necessário que a primeira parte aa_1 seja muito curta. Assim tendo o cilindro 2 polegadas de diâmetro, darei 2 polegadas de comprimento a essa primeira parte aa_1; darei 4 polegadas de comprimento à segunda [parte] a_1a_2; darei 9 polegadas à terceira [parte] a_2a_3; o que me conduz ao meio do cilindro. Assumo para a variação da densidade, desde o meio a_3 do cilindro até sua extremidade a_5, aquela que me foi fornecida há pouco; busco em seguida as condições de equilíbrio dessas quatro partes do cilindro em relação ao ponto de contato f, e [em relação] aos pontos 1 e 2 do eixo do cilindro, o que fornece três equações que, combinadas, determinam a variação das densidades em cada divisão do cilindro, sendo a curva das densidades considerada como um polígono. E como a densidade do fluido elétrico é nula no ponto de encontro entre o globo e o cilindro, será fácil de concluir a partir disso, de uma maneira aproximada, a densidade elétrica sobre todos os pontos da superfície do cilindro. Encontraremos no fim dessa Memória uma aplicação bem detalhada desse método.

[766] Isto é, $r = (1 \text{ linha})/100 = 0,00226$ cm.

20.38 XXXVIII. *Determinação Teórica da Razão entre as Densidades Elétricas Médias de Dois Cilindros de um Diâmetro Muito Pequeno e de um Comprimento Muito Grande, em Contato por Sua Extremidade com um Grande Globo*

Se buscarmos a variação no meio de dois cilindros, cujos comprimentos fossem $2a$, os quais supomos de um diâmetro diferente, mas muito pequeno, em relação ao diâmetro do globo, teríamos de acordo com as fórmulas anteriores, Seção 20.36:[767]

$$\frac{2DR^2}{(R+a)^2} = 2nr\left(\log\frac{2a}{r} - 1\right) \ ;$$

porém é necessário observar que, para todo cilindro de mesmo comprimento, mas com um outro diâmetro, haveria apenas nessa fórmula as quantidades n e r que variariam, sendo supostos [com] os mesmos [valores tanto] o diâmetro R do globo, quanto a metade do comprimento a dos cilindros. De onde resulta que caso n_1 represente a variação da densidade no meio do cilindro cujo raio é r_1, e caso n_2 represente a variação da densidade no meio do cilindro cujo raio é r_2, tendo o mesmo [valor] os comprimentos dos dois cilindros, teríamos:

$$n_1r_1 = n_2r_2 \ , \qquad \text{ou} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_2}{n_1} \ ;$$

ou seja, as variações das densidades no meio dos cilindros estarão entre si como o inverso dos raios.

É fácil agora de perceber que essa mesma proporção deve ocorrer se dividirmos os dois cilindros iguais em comprimento em um número de partes reciprocamente iguais, e quando comparamos nos dois cilindros as partes correspondentes uma a uma. De fato, concebe-se de acordo com os princípios sobre os quais são baseados todos os cálculos anteriores, que caso em um dos cilindros tivermos, para expressar a variação a uma distância qualquer a' do globo, a fórmula

$$\frac{2DR^2}{(R+a')^2} = n_1r_1A' \ ,$$

sendo A' uma função de a', ao pegar um ponto a uma distância igual do globo no segundo cilindro, cujo comprimento está dividido em um número de partes iguais àquelas do primeiro, teremos a fórmula

$$\frac{2DR^2}{(R+a')^2} = n_2r_2A' \ ,$$

sendo a quantidade A' a mesma, já que a distância a e o número de divisões são os mesmos. Assim, para cada ponto correspondente, [a razão] $\frac{n_1r_1}{n_2r_2}$ terá o mesmo valor. Portanto, as

[767] No original a próxima equação apareceu como:

$$\frac{2DR^2}{(R+a)^2} = 2nr\left(\frac{\log 2a}{\mu} - 1\right) \ .$$

variações da densidade para pontos a uma igual distância do globo, estarão nos dois cilindros em razão inversa do raio dos cilindros e, consequentemente, a soma dessas variações ou as densidades médias dos dois cilindros de um diâmetro muito pequeno em contato com um globo grande, estarão em razão inversa dos raios, assim como nos ensina a experiência.

20.39 XXXIX. *Dois Corpos Condutores Colocados a uma Distância Bem Grande Entre Si, para que a Eletricidade Não Possa se Comunicar Através da Camada de Ar que Os Separa*

Determinamos nas Seções anteriores a maneira pela qual o fluido elétrico se distribui entre dois corpos condutores em contato. Buscamos agora o estado elétrico das diferentes partes de um corpo não eletrizado apresentado a um corpo eletrizado a uma distância muito grande, para que a eletricidade do corpo eletrizado não possa se comunicar ao corpo não eletrizado através da camada de ar que os separa. Sabemos há muito tempo que nessa disposição o corpo não eletrizado, caso esteja isolado [eletricamente da Terra], fornecerá devido apenas à influência do corpo eletrizado, sinais de uma eletricidade contrária àquela do corpo eletrizado nas partes vizinhas desse corpo, e sinais [de uma eletricidade] de mesma natureza que o corpo eletrizado nas partes que são mais afastadas dele. Sabemos ainda que caso o corpo não eletrizado apresentado a um corpo eletrizado não esteja isolado [eletricamente da Terra], ele fornecerá sobre todos os pontos de sua superfície sinais de eletricidade contrária àquela do corpo eletrizado.

A avaliação do estado elétrico das diferentes partes de um corpo [condutor] não eletrizado, isolado ou não, mas apresentado a uma distância qualquer de um corpo eletrizado, é o assunto dessa Segunda Parte de minha Memória.

20.40 XL. *Os Dois Tipos de Eletricidade*

Qualquer que seja a causa da eletricidade, explicaremos todos os fenômenos, e o cálculo estará de acordo com os resultados das experiências, ao supor dois fluidos elétricos, as partículas[768] do mesmo fluido se repelindo em razão inversa do quadrado das distâncias, e atraindo as partículas do outro fluido na mesma razão inversa do quadrado das distâncias. Essa lei foi encontrada pela experiência para a atração e a repulsão elétrica, na Primeira e na Segunda Memória sobre eletricidade, *volume de 1785 da Academia*.[769] De acordo com essa suposição, os dois fluidos nos corpos condutores tendem sempre a se reunir até que haja equilíbrio, isto é, até que através de sua reunião, as forças atrativas e repulsivas se compensem mutuamente. É nesse estado que se encontram todos os corpos em seu estado natural. Mas caso por uma operação qualquer, fizermos passar para um corpo isolado, uma quantidade em excesso de um dos fluidos elétricos, ele ficará eletrizado, isto é, ele repelirá as partículas elétricas[770]

[768] No original: *parties*. Essa palavra pode ser traduzida como "partes", "elementos" ou "partículas". Ver ainda as Notas de rodapé 146, 333 e 513 nas páginas 68, 174 e 244, respectivamente.

[769] Essas Memórias estão traduzidas nos Capítulos 10 e 12, respectivamente.

[770] No original: *parties électriques*. Essa expressão pode ser traduzida por "partes elétricas", "elementos elétricos" ou "partículas elétricas". Ver ainda as Notas de rodapé 146, 333 e 513 nas páginas 68, 174 e 244, respectivamente.

de mesma natureza e atrairá as partículas elétricas de uma natureza diferente do fluido em excesso com o qual está carregado. Caso o corpo condutor eletrizado seja colocado em contato com um outro corpo condutor isolado, eles dividirão entre si o fluido elétrico em excesso nas proporções indicadas nessa Memória e nas Memórias anteriores. Porém, caso ele entre em comunicação com um corpo não isolado,[771] ele perderá instantaneamente toda sua eletricidade, já que ela será dividida com o globo terrestre, cujas dimensões em relação a ele são infinitas.

O Sr. Aepinus supôs na teoria da eletricidade,[772] que existe apenas um único fluido elétrico cujas partículas se repelem mutuamente e que eram atraídas pelas partículas dos corpos com a mesma força com que elas se repelem. Porém, para explicar o estado dos corpos em sua situação natural, assim como a repulsão nos dois tipos de eletricidade, ele foi obrigado a supor que as moléculas dos corpos se repelem mutuamente com a mesma força com a qual elas atraem as moléculas elétricas, e que essas moléculas elétricas se repelem entre si.[773] É fácil de perceber que a suposição do Sr. Aepinus fornece, quanto ao cálculo, os mesmos resultados que a suposição de dois fluidos. Prefiro a suposição de dois fluidos que já foi proposta por vários físicos, já que me parece contraditório admitir ao mesmo tempo nas partículas dos corpos uma força atrativa em razão inversa do quadrado das distâncias demonstrada pelo peso universal,[774] e uma força repulsiva na mesma razão inversa do quadrado das distâncias; força essa que seria necessariamente infinitamente grande em relação à ação atrativa de onde resulta o peso.

Além disso, a suposição de dois fluidos está de acordo com todas as descobertas modernas dos químicos e físicos, as quais nos fizeram conhecer gases diferentes cuja combinação em certas proporções destrói a elasticidade de maneira repentina e total; efeito esse que não pode ocorrer sem que exista qualquer coisa de equivalente a uma repulsão entre as partículas do mesmo gás que constitui seu estado elástico, e a uma atração entre as partículas de gases diferentes que os faça perder de maneira repentina sua elasticidade.

Como essas duas explicações possuem apenas um grau de probabilidade maior ou menor, advirto, para deixar a teoria que vai seguir livre de toda disputa sistemática, que na suposição de dois fluidos elétricos, tenho apenas a intenção de apresentar com o menor número de elementos possíveis os resultados do cálculo e da experiência, e não de indicar as verdadeiras causas da eletricidade. Retornarei no fim do meu trabalho sobre eletricidade ao exame dos principais sistemas aos quais os fenômenos elétricos deram origem.

[771]Ou seja, caso ele seja aterrado ao entrar em contato com um corpo condutor ligado à Terra.

[772]Ver a Nota de rodapé 147 na página 69. Ver ainda [Aepinus, 1759] com tradução para o inglês em [Aepinus, 1979].

[773]Dois corpos neutros não se atraem nem se repelem. Dois corpos eletrizados positivamente se repelem, assim como se repelem dois corpos eletrizados negativamente. Para explicar a não existência de força no primeiro caso, assim como a repulsão nos dois últimos casos, Aepinus teve de fazer essas suposições apontadas por Coulomb. Em particular, Aepinus teve de admitir uma repulsão entre as partes materiais de dois corpos.

[774]No original: *par la pesanteur universelle*. Ou seja, pela gravitação universal proposta por Isaac Newton.

20.41 XLI

Nas Memórias anteriores,[775] assim como nas pesquisas que virão a seguir, frequentemente toquei pontos diferentes de um corpo eletrizado com um pequeno disco de papel dourado isolado, o qual colocava em seguida na balança [elétrica] para determinar sua ação sobre a agulha. Supus nos resultados que a densidade [superficial] elétrica dos pontos tocados era proporcional à densidade que o pequeno plano adquiria no contato com o corpo. Para saber se essa suposição pode ser admitida, é necessário determinar de acordo com qual razão o fluido elétrico se divide entre um corpo e um pequeno disco que o toca.

20.42 XLII. Experiência. *Distribuição de um Único Fluido Elétrico entre um Globo e um Disco de uma Espessura Muito Pequena que Toca o Globo Tangencialmente pelo Centro do Disco*

Coloquei um globo de 8 polegadas de diâmetro [21,656 cm] sobre um isolante descrito nas Memórias anteriores; o eletrizei positivamente, assim como [eletrizei positivamente] a agulha da balança. Por meio de um pequeno globo de uma polegada de diâmetro [2,707 cm], que fazia tocar no globo grande, e que introduzia na balança, determinei a densidade elétrica do globo de 8 polegadas, a qual encontrei de 144°. Fiz com que o globo fosse tocado por um disco isolado de 16 polegadas de diâmetro e com um quarto de linha de espessura [0,0565 cm], retirei imediatamente o disco; e por meio de meu pequeno globo de uma polegada de diâmetro, determinei novamente a densidade elétrica que restava no globo de 8 polegadas, encontrando-a igual a 47°.

20.43 XLIII. *Explicação e Resultado Dessa Experiência*

A densidade original do fluido elétrico ou, o que dá no mesmo, a quantidade de fluido elétrico distribuída sobre a superfície do globo era, antes do contato do disco, representada por 144°. Devido ao contato com o disco, ela foi reduzida para 47°. Assim, na divisão entre o globo e o disco, o globo conserva 47 partes e o disco adquire 97 partes. Logo a quantidade de fluido se divide entre o disco e o globo de maneira que a quantidade do disco é o dobro da quantidade do globo. Se calcularmos agora a superfície do globo de 8 polegadas de diâmetro, a encontraremos igual a uma das duas superfícies do disco de 16 polegadas de diâmetro.[776] Assim, como o disco possui duas superfícies, parece por essa experiência que o fluido elétrico se distribui entre o disco e o globo proporcionalmente às superfícies.

Encontrei por um grande número de experiências feitas com discos menores que o anterior, que esse resultado sempre ocorria. Ou seja, quaisquer que fossem o diâmetro do globo e

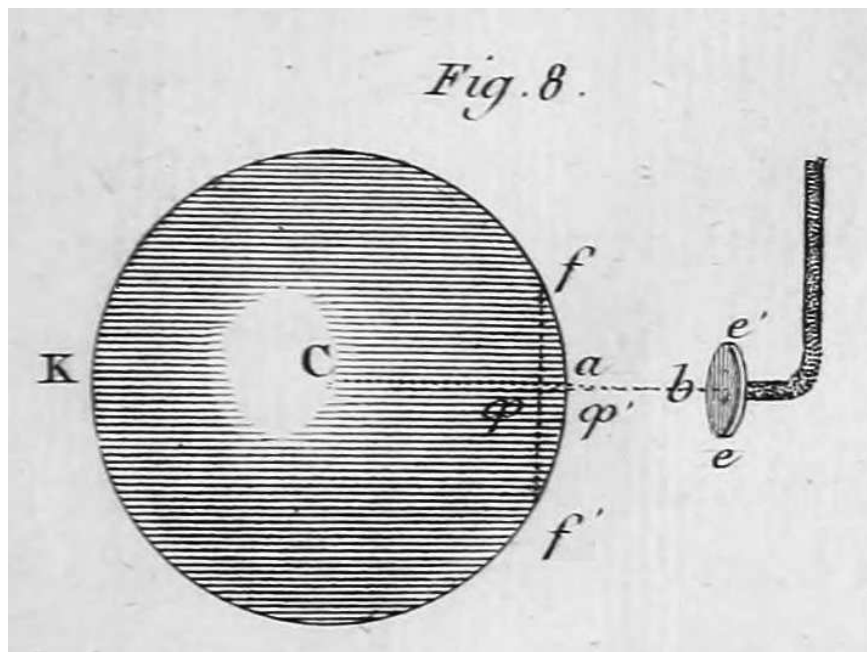
[775] Há uma falha no artigo original, sendo que as Seções a partir dessa foram numeradas com uma unidade adicional. Isto é, no original a presente Seção tem o número XLII em vez de XLI e assim por diante. Para amenizar esse problema resolvi denominar de Seção XLII à Experiência que vem logo a seguir, sendo que essa Experiência não aparece como uma Seção numerada no artigo de Coulomb. Com isso as Seções XLIII em diante ficam de acordo com a numeração original.

[776] Isto é, a área do globo de 4 polegadas de raio, $A_G = 4\pi 4^2 = 64\pi$ polegadas quadradas, é igual à área de uma das faces do disco de 8 polegadas de raio, $A_P = \pi 8^2 = 64\pi$ polegadas quadradas.

aquele do disco, todas as vezes que o disco era colocado em contato tangencialmente com o globo, ele divide a eletricidade do globo na razão da soma da extensão das duas superfícies do disco para a superfície do globo. A experiência forneceu especialmente esse resultado de uma maneira bem exata quando o disco colocado em contato com o globo era de um diâmetro bem pequeno em relação ao diâmetro do globo; de maneira que, por exemplo, quando tocamos o globo de 8 polegadas de diâmetro [21,656 cm] com um pequeno disco isolado de 6 linhas de diâmetro [1,356 cm], ele adquire em cada uma de suas superfícies uma densidade elétrica igual à densidade da superfície do globo, isto é, esse pequeno disco de 6 linhas de diâmetro se carrega com uma quantidade de eletricidade que é o dobro da quantidade da porção de superfície do globo que ele tocou.[777]

20.44 XLIV. *Teoria Dessa Experiência*

O resultado dessa experiência é fácil de explicar pela teoria, ao menos quando o disco que toca [o globo] tem um diâmetro pequeno em relação ao diâmetro do globo tocado. Esse é o único caso no qual me detenho, já que é o único do qual terei necessidade nas experiências a seguir.

Coloquemos, Figura 8, um pequeno disco b a uma distância ab do globo eletrizado C, bem pequena para que a camada de ar interposta não impeça o fluido elétrico de passar do globo C para o pequeno disco b.

Sendo esse disco bem pequeno, a ação do globo sobre o ponto b na direção ab será igual a $2DR^2 : (R + ab)^2$, supondo que D represente a densidade elétrica da superfície do globo e

[777]Mais adiante Potier vai apontar que essa suposição está errada, ver as Notas de rodapé 784 e 817 nas páginas 394 e 412. Um pequeno plano de prova adquire, na superfície que ele tocou, essencialmente a mesma quantidade de eletricidade que a quantidade de eletricidade que estava contida em uma área de tamanho igual ao disco do plano de prova. Ver ainda a Nota de rodapé 25 na página 26, assim como [Gillmor, 1971a, págs. 200-210], [Heilbron, 1999, págs. 495-496] e [Blondel and Wolff, 2011c].

R seu raio.[778] Como supomos [a distância] ab bem pequena em relação ao raio R do globo, a ação do globo sobre o ponto b é muito aproximadamente igual a $2D$. Porém, a ação de um disco cujo raio é R' sobre um ponto a uma distância a do centro desse disco, é igual a[779]

$$\delta\left(1 - \frac{a}{(R'^2 + a^2)^{1/2}}\right) ;$$

e caso a seja uma quantidade infinitamente pequena, essa ação reduz-se a δ, sendo δ a densidade elétrica de todos os pontos do disco. Assim, como deve haver equilíbrio no ponto b na direção ba entre a ação do disco e aquela do globo, teremos a equação $2D = \delta$. Ou seja, a densidade do disco, ou a quantidade de eletricidade que passará para o disco no instante em que o separamos do globo, será o dobro da quantidade de eletricidade contida em uma porção da superfície do globo igual a esse disco, o que se encontra bem exatamente de acordo com a experiência.[780,781]

20.45 XLV. *Observação Geral sobre a Teoria da Seção Anterior e sobre a Experiência da Qual Ela Resulta*

O resultado que acabamos de encontrar pela experiência e pela teoria para um pequeno disco colocado em contato com um globo é geral para todos os corpos terminados por uma superfície curva e convexa de um formato qualquer. De fato, qualquer que seja a forma do corpo, a experiência ensina que um pequeno disco colocado em contato com essas superfícies sempre adquire, no instante em que o retiramos do contato, uma quantidade de eletricidade que é o dobro da quantidade da porção da superfície tocada. A experiência ainda fornece essa mesma razão dobrada ao fazer com que um disco bem pequeno toque um grande plano eletrizado.

Esse resultado geral das experiências para um pequeno disco colocado em contato com um corpo condutor, terminado por uma superfície de um formato arbitrário, poderia ser previsto, como veremos, pelo raciocínio simples. Mas nessa Memória, assim como nas anteriores, todos os fenômenos foram dados pela experiência antes de tentar aplicar o cálculo a elas. Vejamos de fato o que indica a teoria.

No lugar do globo C, Figura 8, suponhamos um corpo de um formato qualquer e que a pequena superfície representada por faf' foi tocada pelo disco ebe'.[782] Queremos saber, após o pequeno disco ebe' ter sido separado de faf', sua densidade elétrica, ou a quantidade de fluido elétrico que ele contém em relação à quantidade contida na porção igual de superfície faf'. Consideremos dois pontos φ e φ' a uma distância infinitamente pequena do ponto a e da superfície faf', um [ponto] dentro e o outro [ponto] fora do corpo C. Seja δ a densidade

[778] Ver a Nota de rodapé 664 na página 321. Coulomb está deixando de lado aqui o fator 2π.

[779] Nessa expressão Coulomb está supondo um disco uniformemente eletrizado. Isso só pode ocorrer se ele for isolante. Por outro lado, o disco do seu plano de prova tem de ser feito de um material condutor para que possa coletar as cargas do ponto onde toca. Um disco condutor carregado não fica uniformemente eletrizado sobre sua superfície. Portanto, a fórmula teórica utilizada por Coulomb não poderia ser aplicada para tirar conclusões sobre as experiências que realizou com seu plano de prova.

[780] [Nota de Potier:] Coulomb ainda suprimiu nas fórmulas acima o fator 2π.

[781] Ver as Notas de rodapé 664 e 670 nas páginas 321 e 323.

[782] Por um erro no original aparece aqui *ebe*. Potier corrigiu para ebe'.

elétrica do plano ff'.[783] A ação desse pequeno plano circular ff', decomposta ao longo da direção $a\varphi$ e agindo sobre o ponto φ e sobre o ponto φ', será pelo cálculo igual a δ, supondo [a distância] φa infinitamente pequena em relação a ff'. Porém a ação de ff' sobre o ponto φ deve equilibrar a ação de toda a superfície fKf'. Logo a ação de toda essa superfície sobre o ponto φ também será igual a δ. Essa ação de toda a superfície fKf' será a mesma sobre um ponto φ' colocado fora do corpo, já que [a distância] $\varphi\varphi'$ é suposta infinitamente pequena. Assim o ponto φ', sofrendo ao mesmo tempo a ação do corpo fKf' e a ação do plano ff', vai experimentar uma repulsão igual a 2δ. Assim, se supormos que o pequeno disco ee' está bem próximo do ponto a para que a eletricidade possa passar do corpo a esse pequeno disco através da camada de ar que os separa, e se considerarmos um ponto entre a e b a uma distância infinitamente pequena de b, a ação da pequena superfície circular be' sobre esse ponto na direção ba será igual a D, ao denominar D como sendo a densidade [superficial] elétrica do disco ebe'. Dessa forma, ao denominar δ como sendo a densidade do pequeno plano ff', teremos para a ação de toda a superfície do corpo $faf'K$ sobre o ponto b, a quantidade 2δ, quantidade essa que deve equilibrar a ação D do disco ee' sobre o mesmo ponto. Dessa forma teremos de maneira geral $2\delta = D$, isto é, a quantidade de eletricidade do pequeno disco ee', qualquer que seja o formato da superfície do corpo $fKf'a$, será igual a uma quantidade de eletricidade que é o dobro da quantidade da porção da superfície faf' com a qual o pequeno disco ee' foi colocado em contato. Assim a teoria está em perfeita concordância com a experiência.[784,785]

20.46 XLVI

Assim como nas experiências anteriores e nas que virão a seguir, determinamos principalmente a densidade de cada ponto dos corpos ao fazer com que fossem tocados por um pequeno disco. É claro, de acordo com as experiências e a teoria que acabamos de explicar, que ao comparar para a mesma distância as ações de nosso pequeno disco sobre a agulha eletrizada de nossa balança, após esse pequeno disco ter sido sucessivamente colocado em contato com diferentes pontos da superfície do corpo, determinamos bem exatamente a razão das densidades elétricas de dois pontos tocados sucessivamente.

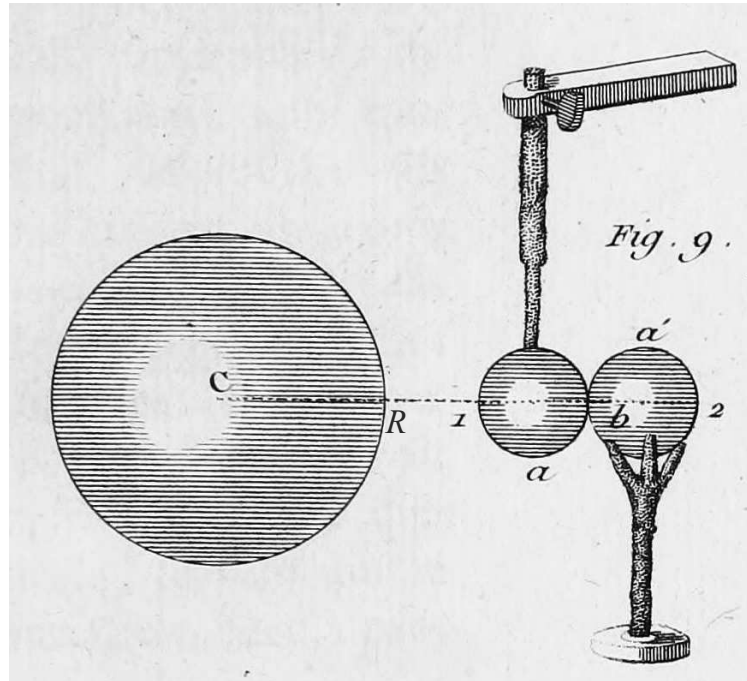
Passamos agora à pesquisa das condições de equilíbrio em corpos que agem um sobre o outro; estando esse corpos separados por um intervalo bem grande para que o fluido elétrico não possa se comunicar entre eles através da camada de ar que os separa.

[783]No original: *plan* ff'. Essa expressão pode ser traduzida por *disco* ff' ou por *plano* ff'. Provavelmente Coulomb está se referindo aqui à pequena calota esférica faf'. Ele vai considerar em seguida a força exercida por essa pequena calota esférica uniformemente eletrizada atuando sobre uma partícula eletrizada localizada no ponto φ que está do lado esquerdo do ponto a na Figura 8 e sobre uma partícula eletrizada localizada no ponto φ' que está do lado direito do ponto a, sendo iguais as distâncias φa e $a\varphi'$, supondo ainda essas distâncias infinitamente pequenas comparadas ao diâmetro da pequena calota.

[784][Nota de Potier:] Toda essa teoria é absolutamente inadmissível. Coulomb não leva em conta que, quando o disco e o globo se tocam, não há eletricidade no ponto de contato, fato esse que lhe era bem conhecido, como vimos anteriormente. É lamentável que ele não tenha fornecido o detalhe das experiências às quais faz alusão no final da Seção 20.43, experiências essas que o induziram ao erro. Quanto mais fino for o disco ou plano de prova, melhor ele vai se aplicar sobre o corpo, e mais a densidade elétrica, durante o contato, vai se aproximar da densidade da superfície que ele substitui.

[785]Ver ainda as Notas de rodapé 777 e 817 nas páginas 392 e 412.

20.47 XLVII. Experiência. *Dois Pequenos Globos, Figura 9, Isolados e Não Eletrizados, São Colocados a uma Distância Qualquer do Grande Globo C Eletrizado*

Isolamos, Figura 9, um globo eletrizado C de 8 polegadas de diâmetro [21,656 cm].

Isolamos igualmente dois pequenos globos [condutores] de 2 polegadas cada um de diâmetro [5,414 cm]. Um [pequeno globo] a' é apoiado sobre um suporte dielétrico formado de um cilindro de vidro, revestido e coberto de quatro ramos de goma-laca; o outro pequeno globo a é apoiado por um suporte vertical, tal que ele possa ser introduzido em nossa balança elétrica. Descrevemos esse suporte nas Memórias anteriores. Tendo eletrizado positivamente a agulha da balança, assim como [tendo eletrizado positivamente] o globo C, o pequeno globo a apresentado na balança a uma mesma distância da agulha, atraiu a agulha, após ter sido colocado em a, [como ilustrado na Figura 9,] exatamente com a mesma força com que ele a repele, quando ele é colocado em a'.[786]

20.47.1 *Resultado Dessa Experiência*

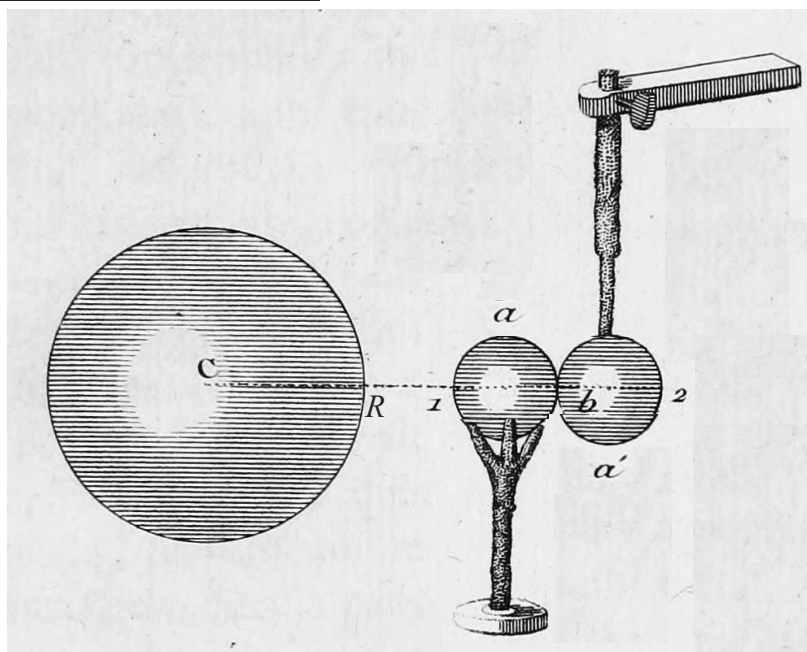
É fácil de ver que esse resultado está perfeitamente de acordo com o princípio explicado na Seção 20.41; pois em nossa nona Figura, estando o globo C eletrizado positivamente, uma parte do fluido positivo do globo a passa para o globo a'; e vice-versa, uma parte do fluido negativo do globo a' passa para o globo a. Mas como cada um desses globos adquire uma porção de fluido igual àquela que o outro perde, e como a quantidade dos dois fluidos necessária para a saturação, isto é, para que não haja qualquer ação elétrica, subsiste nos

[786]Preparei a imagem dessa Nota de rodapé para ilustrar a situação em que o globo apoiado por um suporte vertical que pode ser introduzido na balança elétrica é colocado na extremidade direita da fila de 3 globos. Estando o globo C positivamente eletrizado, ao introduzir esse globo da extremidade direita na balança elétrica, ele repele a agulha da balança eletrizada positivamente:

dois corpos, como esses fluidos são apenas deslocados; resulta disso que a ação atrativa do globo a, em relação à agulha da balança, deve ser exatamente igual à ação repulsiva do corpo a'.

20.48 XLVIII. Experiência. *Comparação, Figura 9, da Densidade Elétrica Média do Globo Colocado em a' e da Densidade Elétrica da Superfície do Globo C*

Essa experiência é destinada a determinar, estando tudo como na nona Figura, qual é para uma distância $R1$ dada,[787] a quantidade de fluido elétrico positivo em excesso no pequeno globo a', etc.

Para realizar essa experiência, tendo o globo C um diâmetro de 8 polegadas e os globos a e a' duas polegadas [de diâmetro], estando o primeiro globo a colocado a duas polegadas do globo C, apresentei o último globo a' na balança, e determinei sua ação repulsiva, a qual encontrei ser de 21° para uma distância dada.[788] Em seguida fiz com que o globo C fosse tocado pelo globo a' e ao introduzi-lo novamente na balança, determinei a ação do globo a' que, como a distância era a mesma que na primeira operação,[789] era proporcional à quantidade de eletricidade com a qual o pequeno globo a' havia sido carregado no contato com o globo C. Encontrei que a agulha era repelida, nessa segunda experiência, com uma força de 66°.

[787] O ponto R não aparece na Figura 9 original. Introduzi esse ponto nessa Figura de acordo com a Figura 10.

[788] Ou seja, havia uma torção total de 21° do fio de suspensão para uma certa distância angular entre o globo a' e a agulha da balança de torção eletrizada com uma carga de mesmo sinal que o globo a'.

[789] Ou seja, nos dois casos havia a mesma distância angular entre o globo a' e a agulha da balança.

20.49 XLIX. *Resultado e Teoria Dessa Experiência*

A quantidade de fluido elétrico, em maior ou menor excesso em um corpo, é proporcional à sua ação, quando comparamos as ações a distâncias iguais. Seja δ, Figura 9, a densidade média de fluido elétrico espalhada sobre a superfície do primeiro globo a, eletricidade essa que será negativa em nossa experiência na qual o globo C é suposto estar positivamente eletrizado. Seja δ' a densidade elétrica positiva do globo a' que, em nossa Figura e em nossa experiência, encontra-se eletrizada positivamente com a mesma quantidade com a qual o globo a está eletrizado negativamente.

Se buscarmos a ação de três globos C, a, a', sobre o ponto de contato b dos dois pequenos globos, ponto esse no qual deve haver equilíbrio, encontraremos que caso os fluidos elétricos estivessem espalhados uniformemente sobre a superfície dos três globos, teríamos para o equilíbrio da ação no ponto b, a [seguinte] equação:[790]

$$\frac{2D \cdot (CR)^2}{(Cb)^2} = -\delta + \delta' \ .$$

Porém, como a quantidade de fluido elétrico positiva natural retirada do globo a é igual à quantidade do fluido em excesso no globo a',[791] resulta que a soma das quantidades de fluido dos dois globos é igual a zero: temos assim $\delta' + \delta = 0$. Logo, substituindo na primeira equação o valor de δ teremos

$$\frac{2D \cdot (CR)^2}{(Cb)^2} = 2\delta' \ .$$

Agora é necessário observar que, na primeira equação, fizemos a suposição que o fluido elétrico estava uniformemente espalhado sobre cada globo, ao invés de [supor] que esses fluidos, como já vimos no começo dessa Memória, não exercem qualquer ação ou [então] estão reunidos até a saturação no ponto de contato b, e são separados e levados ao seu maior grau de densidade nos pontos 1 e 2. Encontramos na mesma Seção que a ação corrigida do globo a sobre o ponto b era medida por $0,60\delta'$ e não por δ'. Ocorre o mesmo para a ação do corpo a',[792] assim nossa equação corrigida[793] nos fornece:

$$\frac{2D(CR)^2}{(Cb)^2} = 1,20\delta' \ .$$

Em nossa experiência, $CR = 4$ polegadas, $R1 = 2$ polegadas, o raio do globo $a = 1$ polegada;[794] assim teremos $0,50D = 1,20\delta'$, de onde $D = 2,40\delta'$.

---

[790] Ver a Nota de rodapé 664 na página 321. Nessa equação CR indica o raio do globo C e Cb indica a distância entre o centro C do grande globo e o ponto b da Figura 9.

[791] Por um lapso no original aparece aqui a em vez de a'.

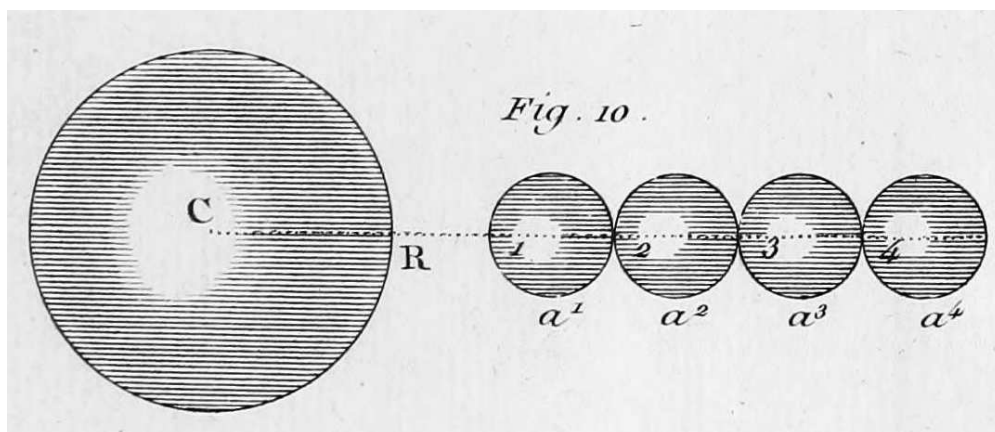
[792] No original aparece aqui a em vez de a'.

[793] [Nota de Potier:] Aqui vai como Coulomb chega nesse resultado aproximado. Caso uma massa M de eletricidade esteja espalhada uniformemente sobre uma esfera, a força exercida sobre um ponto dessa superfície é $\frac{M}{2R^2}$; caso ela esteja concentrada sobre o grande círculo do qual esse ponto é o polo, a ação é $\frac{M}{2R^2\sqrt{2}}$ e, enfim, caso ela esteja concentrada no polo oposto, [a ação é] $\frac{M}{4R^2}$. Essas quantidades estão entre si como 1, $1/\sqrt{2}$ e 1/2, e Coulomb admite que a distribuição real produz uma força média entre $1/\sqrt{2}$ e 1/2 da força resultante de uma distribuição uniforme: ele assume 0,60 como média aproximada entre 0,50 e 0,707.

[794] Temos então $Cb = CR + R1 + 1b = 4 + 2 + 2 = 8$ polegadas.

Encontramos em nossa experiência, que sendo a densidade média do pequeno globo a' medida por 21°, a densidade média do mesmo pequeno globo, quando ele tocou C,[795] era medida por 66°. Mas vimos em nossa Quinta Memória, *Volume de 1787, página 437*,[796] que, quando um globo de uma polegada de raio tocava um globo de 4 polegadas de raio, a densidade média sobre a superfície do globo de uma polegada, estava para a densidade média do globo de 4 polegadas, aproximadamente como 1,30 : 1,00. Assim, sendo a densidade média do pequeno globo, após o contato, representada por 66°, a densidade média do grande globo seria representada por 51°. Porém é necessário observar que devido à divisão de eletricidade entre o globo grande e o pequeno globo, no instante do contato, o globo grande perde aproximadamente 1/12 de seu fluido elétrico, além disso, no intervalo entre as observações ele perderia aproximadamente 1/20. Logo a densidade do globo C, antes do contato, era aproximadamente medida por 57°. Ora havíamos encontrado pela experiência a densidade média do globo a' colocado como na Figura, medida por 21°. Assim, a densidade média do fluido elétrico positivo da superfície do globo C, está para aquela sobre a superfície do globo a' colocado como na nona Figura, :: 57 : 21 :: 2,70 : 1,00. Assim, de acordo com a experiência, temos $\delta' = 2,70D$, quantidade essa que acabamos de encontrar pela teoria igual a $2,40D$. Logo a teoria e a experiência diferem pouco entre si, e os erros só podem ser atribuídos à imperfeição das operações.

20.50 L. Quarta Experiência. *Comparação, Figura 10, entre as Densidades Elétricas de Quatro Pequenos Globos de 2 Polegadas de Diâmetro Não Eletrizados, Colocados sobre um Isolante, a 2 Polegadas de Distância de Um Globo C Eletrizado, de 8 Polegadas de Diâmetro*

A décima Figura indica a posição dos globos. Comparamos, de acordo com os procedimentos indicados na experiência anterior, a densidade média de eletricidade negativa do globo a_1 com a densidade positiva do globo a_4, e aquela do globo a_4 com a densidade média do globo C; estando o globo C eletrizado positivamente.

[795]No original aparece aqui a em vez de C.
[796]Ver a Tabela na Seção 18.11, página 314.

Encontramos, ao denominar δ_1 à densidade média do globo a_1, δ_4 à densidade média do globo a_4, D àquela do globo grande C, que

$$D = -1,50\delta_1 = 2,20\delta_4 \ .$$

20.50.1 *Teoria Dessa Experiência*

De acordo[797] com tudo que dissemos nas Seções anteriores, é fácil de ver que ao denominar δ_1 à densidade [média] do globo a_1, δ_2 à densidade média do globo a_2, δ_3 à densidade média do globo a_3, δ_4 à densidade média do globo a_4, D à densidade média do globo C, R e r aos raios do globos C e a_1, fazendo ainda a distância $R1 = a$, teremos as três equações corrigidas de acordo com a Seção 20.4 dessa Memória:

Para o ponto de contato 2:[798]

$$\frac{2DR^2}{(R+a+2r)^2} = -0,60\delta_1 + 0,70\delta_2 + 0,22\delta_3 + 0,08\delta_4 \ .$$

Para o ponto de contato 3:

$$\frac{2DR^2}{(R+a+4r)^2} = -0,22\delta_1 - 0,70\delta_2 + 0,70\delta_3 + 0,22\delta_4 \ .$$

Para o ponto de contato 4:

$$\frac{2DR^2}{(R+a+6r)^2} = -0,08\delta_1 - 0,22\delta_2 - 0,70\delta_3 + 0,60\delta_4 \ .$$

Para ter uma quarta equação, é necessário observar que estando os quatro pequenos globos originalmente em seu estado natural, seu fluido elétrico só é perturbado pela influência da ação do globo grande, e que a soma dos fluidos elétricos dos quatro pequenos globos não é nem aumentada nem diminuída. Assim, teremos a soma das densidades para os quatro pequenos globos igual a zero. Logo teremos a quarta equação:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 0 \ .$$

Por meio dessas quatro equações, faremos desaparecer à vontade três das quatro incógnitas δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, e vamos comparar a quarta [densidade] com a densidade D do globo C: o cálculo aplicado à nossa experiência vai fornecer $D = -1,53\delta_1$. A experiência nos forneceu $D = -1,550\delta_1$; o cálculo fornecerá $D = 2,12\delta_4$; a experiência nos forneceu $D = 2,2040\delta_4$. A teoria e a experiência ainda estão tão bem de acordo aqui quanto se pode esperar nas operações desse tipo.

Não vamos estender as experiências e os cálculos anteriores a um grande número de pequenos globos colocados em contato e cujos centros formariam uma mesma linha [reta] com o centro de um globo grande. É fácil de aplicar aqui os diferentes métodos de aproximação que já apresentamos. Mas acreditamos ser necessário desenvolver com grande detalhe a maneira pela qual o fluido elétrico parece se manifestar com graus diferentes de densidade nas partes diferentes de um cilindro não isolado ou, o que dá no mesmo, isolado, mas de um comprimento infinito, apresentado por uma de suas extremidades a uma distância dada de um grande globo eletrizado, com o prolongamento do eixo do cilindro passando pelo centro do globo. Percebemos que essa pesquisa deve ter uma relação imediata com a teoria dos para-raios.

[797] Essa Subseção não foi incluída na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].
[798] Ver a Figura 10.

20.51 LI. *Resultado das Experiências Destinadas a Determinar o Estado Elétrico de Diferentes Partes da Superfície de um Cilindro Não Isolado e de Grande Comprimento, Apresentado por uma de Suas Extremidades a um Grande Globo Eletrizado e Isolado*

Só entrarei nos detalhes das experiências nos resultados que serão apresentados quando esses detalhes forem bem diferentes dos anteriores para exigir uma explicação particular.

Sabemos, e isso segue das pesquisas anteriores, que quando apresentamos um cilindro não isolado a uma distância de um globo eletrizado, distância essa bem grande para que o fluido elétrico do globo não possa passar para o cilindro, a superfície do cilindro mostra sinais de eletricidade contrária à do globo, e que, quanto mais próximo o ponto do cilindro está do globo eletrizado, maior será a densidade elétrica de cada ponto do cilindro ou, o que dá no mesmo, a ação de cada um de seus pontos. O objetivo dessa Parte de minha Memória é o seguinte:

1. Para um mesmo cilindro colocado a distâncias diferentes do mesmo globo eletrizado, determinar a densidade elétrica da extremidade do cilindro mais próxima do globo, a lei que segue essa densidade e comparar essa densidade, supondo-a proporcional a seu grau de ação, com a densidade do globo eletrizado que também supomos ser proporcional a seu grau de ação.

2. Ao colocar cilindros não isolados de diâmetros diferentes à mesma distância de um globo eletrizado, determinar de acordo com qual razão a densidade da extremidade do cilindro aumenta ou diminui em relação aos diâmetros desses cilindros.

3. Determinar de acordo com qual lei a densidade de diferentes pontos de um mesmo cilindro colocado a uma distância dada de um globo eletrizado diminui em relação à distância desses pontos até o centro do globo eletrizado.

4. Enfim, determinar de acordo com qual lei a densidade da superfície dos cilindros aumenta em relação ao diâmetro de globos diferentes, tendo o mesmo valor a densidade elétrica dos globos.

20.52 LII. Primeiro Resultado. *Um Cilindro Não Isolado Colocado a Diversas Distâncias de um Globo Eletrizado*

Se colocarmos o mesmo cilindro não isolado ou, o que dá no mesmo, isolado mas de um comprimento infinito, de maneira que o eixo do cilindro esteja na direção do centro do globo eletrizado, encontraremos pela experiência, ao variar a distância do centro do globo à extremidade do cilindro que está mais próxima desse globo, que a densidade elétrica dessa extremidade estará em uma potência um pouco abaixo da potência 3/2 da razão inversa da distância dessa extremidade ao centro do globo. A experiência que forneceu esse resultado é feita de duas maneiras: [1] ou tocando com um pequeno disco isolado a extremidade do cilindro e colocando em seguida da maneira usual esse pequeno disco na balança elétrica; [2]

ou fazendo com que a extremidade do cilindro seja tocada por um pequeno globo de mesmo diâmetro que o cilindro, introduzindo em seguida esse pequeno globo na balança.

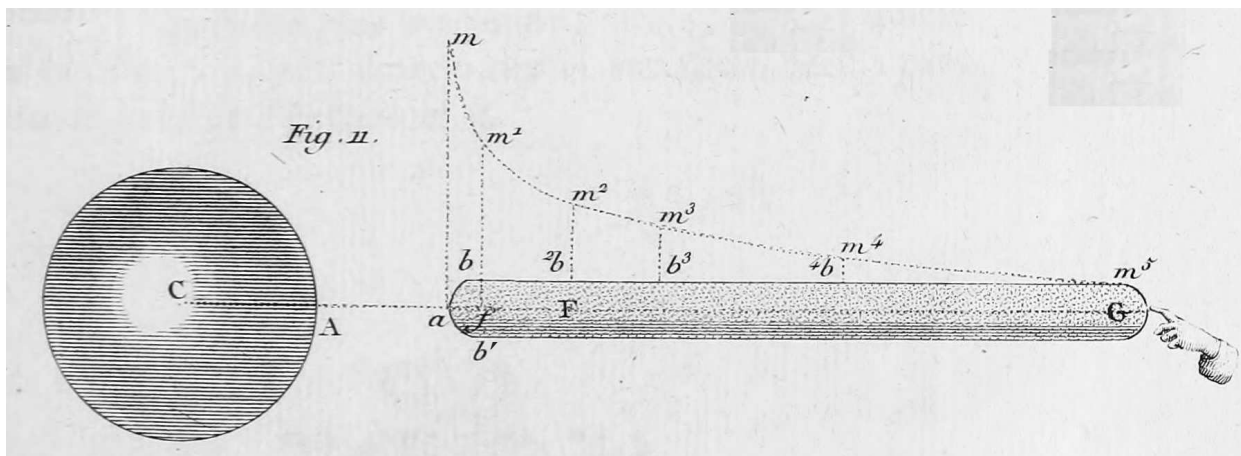
20.53 LIII. Segundo Resultado. *Densidades Elétricas da Extremidade de Dois Cilindros de Diâmetros Diferentes, Não Isolados, Colocados Alternadamente à Mesma Distância do Centro de um Globo Eletrizado*

Ao colocar sucessivamente dois cilindros de diâmetros diferentes à mesma distância de um mesmo globo eletrizado, encontramos que as densidades elétricas da extremidade dos dois cilindros estavam entre si aproximadamente em razão inversa dos diâmetros dos dois cilindros, desde que os diâmetros dos cilindros fossem bem menores que o diâmetro do globo.

20.54 LIV. Terceiro Resultado. *Razão das Densidades Elétricas de Pontos Diferentes da Superfície de um Mesmo Cilindro com um Grande Comprimento e Não Isolado, Dependendo Se Esses Pontos Estão Mais ou Menos Afastados da Extremidade do Cilindro, ou do Centro do Globo Eletrizado*

Ao colocar um cilindro a uma distância dada de um globo eletrizado, encontramos que a densidade elétrica dos diferentes pontos da superfície desse cilindro, é proporcional à razão inversa do quadrado da distância desses pontos até o centro do globo eletrizado.

Essa lei não é seguida próxima da extremidade do cilindro vizinha ao globo até um comprimento igual a quatro ou cinco diâmetros do cilindro. Encontramos pela experiência que nessa parte a densidade elétrica cresce ao se aproximar da extremidade do cilindro em uma razão bem maior que o inverso do quadrado das distâncias. E caso, como em todas as experiências que fizemos, o cilindro for terminado como na *décima primeira Figura*, por um hemisfério, encontraremos que a densidade na extremidade a do eixo, ponto esse mais próximo do globo C, é aproximadamente o dobro da densidade no ponto f, que está afastado do ponto a (extremidade do cilindro) apenas de uma quantidade af[799] igual ao diâmetro do cilindro, qualquer que seja além disso a distância Aa.

[799]No original aparece ae. Substitui por af já que não tem ponto e na Figura 11. Além disso, em seguida Coulomb vai mencionar que o ponto f está afastado do ponto a por uma distância igual ao diâmetro do cilindro.

20.55 LV. Quarto Resultado. *Um Mesmo Cilindro Isolado Colocado à Mesma Distância do Centro de Dois Globos Eletrizados de Diâmetros Diferentes*

Ao supor que os dois globos possuem a mesma densidade elétrica, encontraremos pela experiência que a densidade dos pontos do cilindro colocados à mesma distância do centro dos dois globos, será proporcional ao quadrado dos raios desses globos. A teoria teria anunciado *a priori* o resultado que a experiência acaba de fornecer; pois a ação de uma superfície esférica sobre um ponto qualquer colocado fora da esfera, é a mesma que se essa superfície estivesse reunida no centro da esfera;[800] logo sua ação sobre todos os pontos situados fora da superfície, será diretamente proporcional à área da superfície multiplicada pela densidade elétrica, e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao ponto sobre o qual é exercida a ação. Porém como o cilindro é o mesmo, e como cada ponto do cilindro sobre o qual avaliamos a ação é suposto à mesma distância do centro dos dois globos; resulta disso que as densidades elétricas de um mesmo ponto do cilindro colocado à mesma distância do centro dos dois globos eletrizados, deve sempre estar em uma razão direta composta da densidade elétrica da superfície dos globos e do quadrado dos raios desses globos.

20.56 LVI. *Fórmula Deduzida dos Resultados Anteriores*

De acordo com os resultados anteriores, para poder dar uma fórmula que indica imediatamente o estado elétrico de diferentes pontos do cilindro não isolado, ou então tocado no ponto G por um corpo [condutor] não isolado, como na *Figura 11*, a uma grande distância do ponto a, percebemos que é necessário determinar essa razão pela experiência para um caso particular, com o objetivo de ter um coeficiente constante. Entre as diferentes experiências que utilizei para obter os quatro resultados anteriores, vou escolher uma que vai me fornecer esse coeficiente.

[800]Ver a Nota de rodapé 455 na página 225.

20.56.1 Experiência

Isolei, Figura 11, o globo C de 8 polegadas de diâmetro [21,656 cm]; o eletrizei; coloquei sobre um isolante a $2\frac{1}{2}$ polegadas de distância [6,7675 cm] um cilindro aG, com uma polegada de diâmetro [2,707 cm]: esse cilindro era terminado por um hemisfério bab'. Toquei alternadamente da maneira comum, com um pequeno disco isolado, o ponto a do hemisfério e um ponto qualquer do globo C. Tendo eletrizado a agulha da balança com a mesma eletricidade que o globo,[801] a agulha foi atraída pelo pequeno disco depois que ele havia tocado a extremidade do cilindro em a, e foi repelida depois que ele havia tocado o globo. Ao medir as forças para uma mesma distância,[802] encontrei que a força atrativa do pequeno disco, quando ele havia tocado o ponto a, estava para a força repulsiva do mesmo disco, quando ele havia tocado o globo, assim como 4,00 : 1,00.

Quando comparei pelo mesmo método o ponto a com o ponto f, colocado à distância de uma polegada da extremidade do cilindro, encontrei que a densidade elétrica do ponto a estava para a densidade elétrica do ponto f assim como 2,5 : 1,0. De onde é fácil concluir que a densidade elétrica negativa a uma polegada da extremidade do cilindro estará para a densidade elétrica positiva da superfície do globo, aproximadamente como 16 : 10.

20.57 LVII

Ao reunir agora os quatro resultados anteriores, encontramos pela experiência que as densidades elétricas do hemisfério que termina diferentes cilindros apresentados a um globo eletrizado, são de uma natureza contrária em relação à densidade elétrica do globo, estão em uma razão direta composta da densidade sobre a superfície do globo, do quadrado do diâmetro desse globo, e em razão inversa composta pelo raio do cilindro e pela potência 3/2 da distância Ca, *Figura 11*, do centro do globo até a extremidade do cilindro.

Assim, caso D seja a densidade do fluido elétrico positivo espalhado sobre a superfície de um globo cujo raio é R; caso r seja o raio do cilindro; se a é a distância entre o centro do globo e a extremidade do cilindro,[803,804] teremos a seguinte fórmula para expressar δ, a densidade elétrica negativa da extremidade do cilindro:

$$\delta = -\frac{mDR^2}{r(R+a)^{3/2}} ,$$

na qual vamos determinar o valor da constante m de acordo com a experiência da Seção anterior. Nessa experiência $R = 4$ polegadas; $r = \frac{1}{2}$ polegada; $a = 2,5$ polegadas, δ foi encontrada igual a $4D$. Ao substituir essas quantidades na fórmula, teremos

$$m = 2,07\sqrt{1 \text{ polegada}} ,$$

e a fórmula geral será

$$\delta = 2,07DR^2 : r(R+a)^{3/2} ,$$

na qual é necessário reduzir em polegadas os valores de a, r e R.

[801]Ou seja, Coulomb eletrizou o globo C e a agulha de sua balança elétrica com eletricidades de mesmo tipo ou de mesmo sinal.

[802]Isto é, quando havia uma mesma distância entre o disco do plano de prova e a agulha da balança elétrica.

[803][Nota de Potier:] Evidentemente é a distância entre a esfera e o cilindro que Coulomb designa por a.

[804]Ou seja, a é a distância entre o ponto A na superfície do globo C e o ponto a na extremidade do cilindro que está mais próxima do globo, como indicado na Figura 11, tal que a distância Ca é dada por $R + a$.

20.58 LVIII. *Aplicação da Fórmula Anterior a um Exemplo Análogo aos Para-Raios*

Suponhamos que uma nuvem carregada de fluido elétrico tenha a forma de um globo com mil pés de raio [325 m] e passe a 500 pés acima da extremidade de um cilindro de uma polegada de diâmetro.[805] Nesse exemplo $R = 1000$ pés; $a = 500$ pés; $r = \frac{1}{2}$ polegada. Esses valores substituídos na fórmula fornecem:

$$\delta = \frac{2,07 \cdot 12^2 \cdot (1000)^2}{\frac{1}{2}(1500)^{3/2}12^{3/2}} = 278D \ .$$

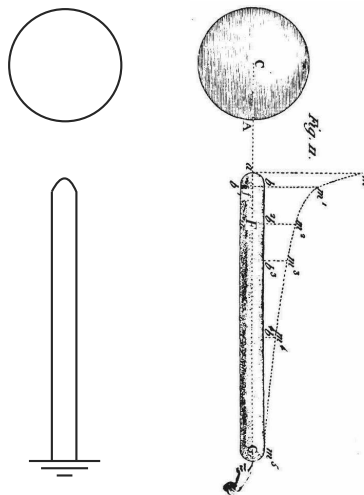
Ou seja, a densidade elétrica da extremidade do cilindro, de uma natureza contrária à densidade elétrica da nuvem, será 278 vezes maior que a densidade da superfície da nuvem.

Porém, como a experiência nos indicou que em nossa fórmula $(R + a)$ estava elevada a uma potência menor que 3/2, a densidade δ deve ser maior que $278D$. Para se convencer disso, basta supor que na fórmula $(R + a)$ está elevado à potência 1. Nesse caso teremos $m = 1,23$. A fórmula vai fornecer

$$\delta = 1,23DR^2 : r(R + a) \ ,$$

resultado esse que, aplicado ao nosso exemplo, forneceria $\delta = 19680D$; de maneira que uma pequena variação na potência de $(R + a)$ forneceria uma variação muito grande no valor de δ.

Resulta dessa observação que δ é maior que $278D$; mas não sabemos de quanto [é maior], pois as experiências de onde obtivemos os quatro resultados anteriores tiveram como limite globos com um pé de diâmetro e abaixo disso, e cilindros de 4 linhas até 2 polegadas de diâmetro; e para facilitar os cálculos, assumimos que os resultados estavam representados por uma fórmula com um único termo, o que me pareceu fornecer valores suficientemente aproximados nos limites para os quais as experiências foram feitas. No entanto, é possível que

[805]Coulomb imagina aqui um para-raios constituído por um condutor vertical aterrado próximo de uma nuvem eletrizada. Ele vai modelar o para-raios pela configuração da Figura 11 girada de 90° na qual um condutor cilíndrico aterrado tem sua extremidade superior próxima de um grande globo eletrizado, sendo a nuvem modelada por esse globo, como ilustrado nessa Nota de rodapé:

essa fórmula não possa ser aplicada a limites muito afastados daqueles em que as experiências estão contidas; é o que será fácil de verificar pelos métodos de aproximação teóricos que vão concluir essa Memória, e que nos indicarão de acordo com a experiência, que a densidade da extremidade do cilindro é maior para os globos grandes que agem sobre a extremidade de um cilindro não isolado de um pequeno diâmetro, do que a densidade dada pela fórmula e que consequentemente em nosso exemplo, a densidade da extremidade do cilindro de uma polegada de diâmetro, apresentado a 500 pés de um globo eletrizado de 1000 pés de raio, é maior do que 278 vezes a densidade elétrica da superfície desse globo.

20.59 LIX. *Aplicação do Resultado Anterior à Influência dos Para-Raios*

Disso resulta que a nuvem, assim como a camada de ar muito imperfeitamente dielétrica interposta entre a nuvem e a extremidade do cilindro, sendo compostas de partes móveis, aquelas dessas partes vizinhas à extremidade do cilindro, devem se precipitar para lá com uma rapidez bem grande, perdendo lá sua eletricidade, carregando-se então com uma eletricidade intensa de uma natureza contrária à eletricidade da nuvem, indo em seguida na direção da nuvem ao fugir da extremidade do cilindro, destruindo assim a eletricidade das partes da nuvem que elas encontram. Mas como o diâmetro do cilindro é muito pequeno, sua ação, embora seja muito grande nos pontos vizinhos à superfície do hemisfério que o termina, é muito pequena nos pontos que estão a 30 ou 40 pés da extremidade desse cilindro. Assim, deve ocorrer que a extremidade do cilindro neutraliza as partes da nuvem que o rodeiam, sem explosão elétrica,[806] e que todos os corpos que estejam abaixo da extremidade desse cilindro, a uma distância pequena do cilindro, serão preservados da explosão da nuvem.[807]

20.60 LX. *Cálculo Teórico Destinado a Determinar por Aproximação o Estado de um Cilindro Não Isolado, Cujo Eixo Passa pelo Centro de um Globo Eletrizado e Isolado, Colocado a uma Distância Muito Grande Desse Cilindro para que a Eletricidade do Globo Não Possa se Descarregar Através da Camada de Ar que Os Separa*

Os diferentes métodos de aproximação que utilizamos nas diversas Seções anteriores podem ser empregados aqui.[808] Daremos alguns exemplos.

20.60.1 Primeiro Exemplo

Comecemos por aplicar esses métodos à experiência cujos detalhes foram dados na Seção 20.56. Nessa experiência, Figura 11, um globo C eletrizado de 4 polegadas de raio é colocado

[806]Isto é, sem uma grande descarga elétrica na forma de raio ou relâmpago.
[807]Ou seja, não sofrerão as consequências de um raio ou descarga elétrica.
[808]As Seções 60 e 61 não foram incluídas na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

a $2\frac{1}{2}$ polegadas de distância da extremidade hemisférica a de um cilindro com uma polegada de diâmetro e 30 polegadas de comprimento. Esse cilindro é tocado em sua extremidade G mais afastada do globo por um corpo [condutor] em comunicação com a Terra.

Suponho que na *Figura 11*, [os pontos] $mm_1m_2m_3m_4m_5$ representem a curva das densidades elétricas dos diferentes pontos correspondentes da superfície do cilindro. Busco de acordo com o método explicado na *Seção* 20.36 dessa Memória as variações da densidade desses diferentes pontos ao supor que essa variação segue uma linha reta. Observo inicialmente que sendo a ação do globo em razão inversa do quadrado da distância até os pontos sobre os quais ele age, e sendo a distância CG bem considerável, podemos supor a densidade nula ou ao menos bem pequena no ponto G, onde o cilindro é tocado por um corpo [condutor] indefinido. De acordo com essa suposição, se buscarmos a variação nr no centro do cilindro que possui 30 polegadas de comprimento ou sessenta vezes seu raio r, teremos, de acordo com a *Seção* 20.37 e seguintes:[809]

$$\frac{2D \cdot 4^2}{(21,5)^2} = 2nr\left(\frac{1}{\mu}\log 60 - 1\right) = 2nr(3,09) \ ,$$

de onde resulta $nr = 0,0112D$. Nessa equação nr representa a variação ou crescimento da densidade ao longo de um comprimento igual ao raio do cilindro. Porém, como supomos nula a variação no ponto G, a variação média sobre um comprimento de raio, desde o ponto m_4, centro do cilindro, até o ponto G, será 0,0056; assim a densidade no ponto m_4 seria igual a $0,168D$.

Para determinar agora a variação no ponto b_2 da superfície do cilindro, ponto esse que supomos a 5 polegadas de distância da extremidade a, consideremos do outro lado do ponto b_2 um comprimento b_2b_3 de 5 polegadas. Restará desde b_3 até o meio do cilindro, um comprimento b_3b_4 igual a 5 polegadas. Como a variação no ponto m_4 foi encontrada para o comprimento do raio r igual a $0,0112D$, o crescimento da densidade, desde m_4 até m_3, seria em uma primeira aproximação para o comprimento de dez raios, igual a $0,112D$, a qual, adicionada à densidade encontrada para m_4, fornecerá para a densidade em m_3 a quantidade $0,28D$.

Caso a densidade que acabamos de encontrar para o ponto b_3 fosse uniforme até a extremidade G, teríamos a ação da porção do cilindro b_3m_5 sobre o ponto F, representada por

$$0,28D\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}\right) = 0,023D \ ,$$

quantidade essa um pouco grande, já que a densidade vai diminuindo de b_3 para m_5. Porém, como acabamos de supor como constante a variação da densidade, desde o meio b_4 até o ponto b_3, em vez dela ir crescendo, os dois erros em sentido contrário tendem a se compensar. Se buscarmos agora a ação da porção do cilindro ab_3 sobre o ponto F colocado a 5 polegadas de distância da extremidade do cilindro, ao supor a variação em linha reta sobre todo esse

[809]Para chegar nesse resultado numérico Coulomb utilizou que $\log 60 = 1,778$ e que $\mu = 0,4343$, ver a Nota de rodapé 553 na página 264. Logo, $(1/\mu)\log 60 - 1 = 3,09$. Por um lapso no original a próxima equação apareceu da seguinte forma:

$$\frac{2D \cdot 4^2}{(21,5)^2} = 2nr\left(\log\frac{60}{\mu} - 1\right) = 2nr(3,09) \ .$$

comprimento ab_3, e igual a $n'r$ para o comprimento de um raio do cilindro; teremos, já que a porção b_3m_5 do cilindro atua no mesmo sentido que o globo C, sendo a eletricidade do globo e do cilindro de uma natureza oposta, a [seguinte] equação:

$$\frac{2D4^2}{(11,5)^2} + 0,023D = 2n'r\left(\frac{\log 20}{\mu} - 1\right) ,$$

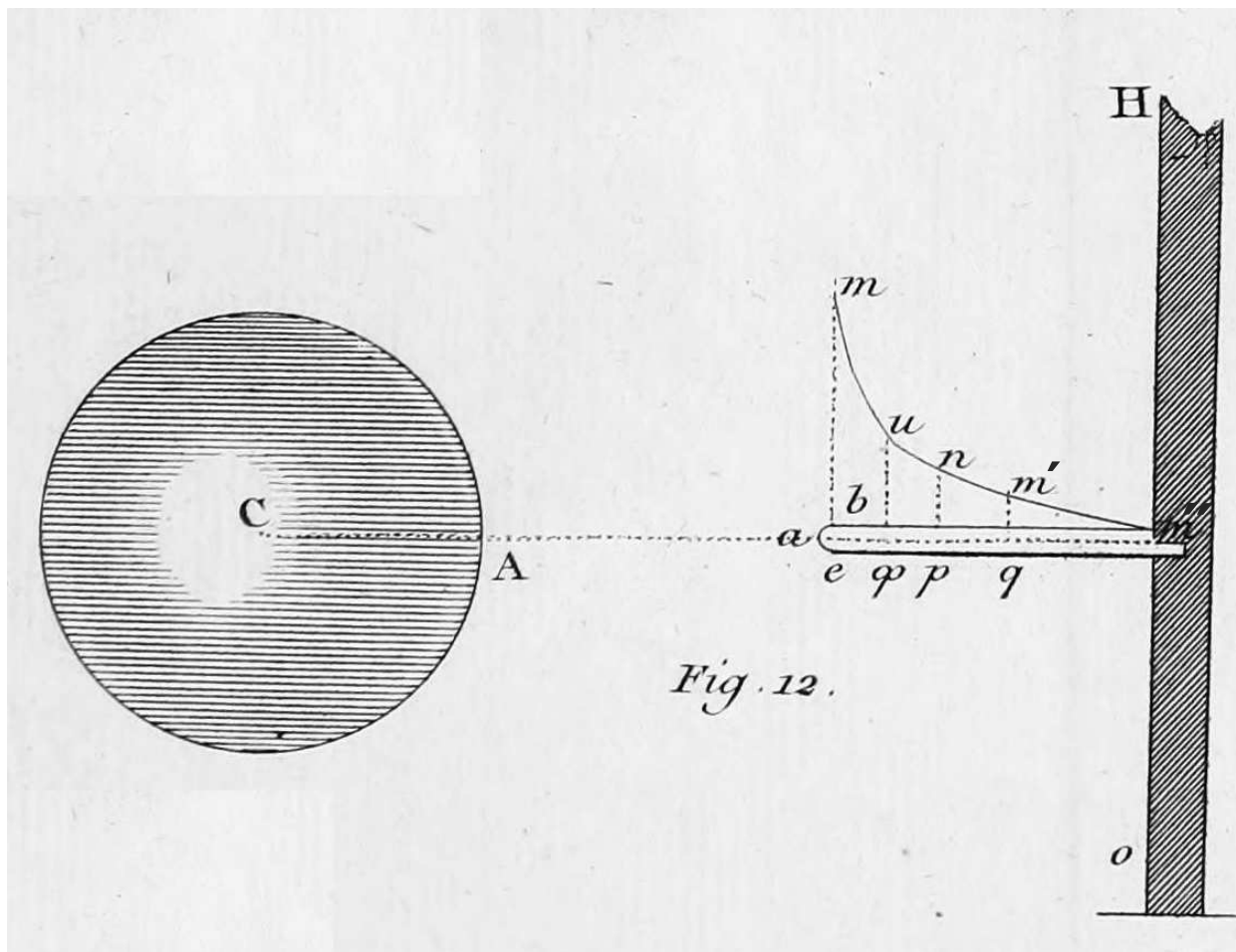
de onde resulta $n'r = 0,082D$.

Assim, ao considerar essa variação média como sendo aquela que se estende desde o ponto b ou desde uma polegada, contada a partir da extremidade a até a 10 polegadas, isto é, sobre um comprimento de 18 raios, teremos para o crescimento, desde o ponto m_3 até uma polegada da extremidade, a quantidade $1,476D$, a qual, somada a $0,28D$, densidade a 10 polegadas do ponto a, fornecerá para a densidade a uma polegada da extremidade do cilindro a quantidade $1,72D$. A experiência nos forneceu, *Seção* 20.56, a densidade desse cilindro medida a uma polegada de sua extremidade a, aproximadamente igual a $1,6D$, que difere pouco da densidade fornecida pela teoria.

Sendo dadas pela aproximação anterior as variações dos diferentes pontos do cilindro, podemos determiná-las novamente por uma segunda aproximação que vai nos aproximar bastante de seu valor verdadeiro. Suponho que queremos ter na *Figura 4*[810] a variação das densidades no ponto i, localizado em algum lugar no meio entre b_2 e b_3. Calculo de acordo com as fórmulas dadas na *Seção* 20.36 *e seguintes*, a ação que a porção do meio do cilindro b_2a, cuja densidade, assim como a variação, são aproximadamente conhecidas pela aproximação anterior, exerce sobre o ponto do eixo que corresponde a i. Faço a mesma operação para as porções do cilindro b_3b_4 e b_4m_5. Após [ter obtido] essas ações fornecidas pelo cálculo, assim como após [ter obtido] a ação do globo C, formo uma equação análoga às equações anteriores. Essa equação me fornece a variação nr da densidade média entre os pontos b_2 e b_3. Faço as mesmas operações para um outro ponto qualquer do cilindro, e determino assim por uma segunda aproximação as variações em todos os pontos da superfície, de onde obtenho a densidade elétrica do cilindro para cada ponto de sua superfície. Poderíamos, por uma terceira aproximação, ao seguir o mesmo método, nos aproximar ainda mais da verdade, caso isso fosse necessário. Mas essa precisão não parece jamais ser útil na prática nas pesquisas elétricas.

20.61 LXI. Segundo Exemplo

Suponho, *Figura 12*, que C seja um globo com um raio de mil pés [325 m], que a densidade do fluido elétrico espalhada sobre a superfície desse globo seja D; que a extremidade a do cilindro am'' seja colocada a 500 pés desse globo; que esse cilindro tenha uma polegada de raio e 60 pés de comprimento [19,5 m] de a até m'', que ele seja encaixado no ponto m'' perpendicularmente sobre uma superfície plana indefinida Ho feita de um material condutor.

[810]Essa Figura 4 aparece na Nota de rodapé 739 na página 369.

De acordo com tudo que já dissemos, o cilindro am'' não isolado dará ao longo de todo o seu comprimento sinais de uma eletricidade contrária à eletricidade do globo C. Sua eletricidade será nula no ponto m'', onde ele se liga à superfície Ho, e essa superfície estará ela mesma eletrizada de uma natureza de eletricidade contrária à eletricidade do globo nas partes vizinhas ao globo; de maneira que para ter a variação da densidade sobre um ponto qualquer q do cilindro, é necessário determinar essa variação de acordo com a ação de cada parte aq e qm'' do cilindro sobre o ponto q, e depois a ação do globo C [e] da superfície Ho sobre o mesmo ponto q. Se não tivéssemos levado em consideração a ação da superfície Ho, e se calculássemos a variação no meio q do cilindro am'' a 30 pés de sua extremidade, de acordo com o método da Seção anterior, encontraríamos para essa variação sobre o comprimento de um raio, $nr = 0,0766D$. Assim, caso a variação fosse constante sobre todo o comprimento do cilindro, da mesma forma que a 60 pés ou $720r$ de comprimento, teríamos a densidade a duas ou três polegadas da extremidade do cilindro igual a $55D$. Porém, como a variação aumenta na medida em que nos aproximamos da extremidade a do cilindro, a densidade a 2 ou 3 polegadas dessa extremidade será bem maior do que aquela que acabamos de encontrar. Ao fazer o cálculo da variação para os diferentes pontos do cilindro, de acordo com os métodos dados nas quatro últimas Seções da Memória anterior,[811] encontrei que a densidade a cinco ou seis polegadas da extremidade a seria, em uma primeira aproximação, igual a mais de $120D$, e que ela seria igual a mais de $300D$ sobre o hemisfério que termina o cilindro.

Porém é necessário observar que ainda não levamos em conta a ação da superfície oH,

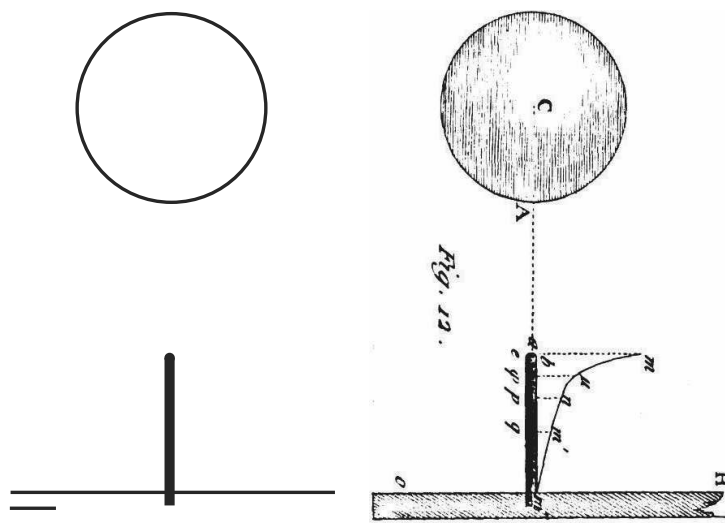
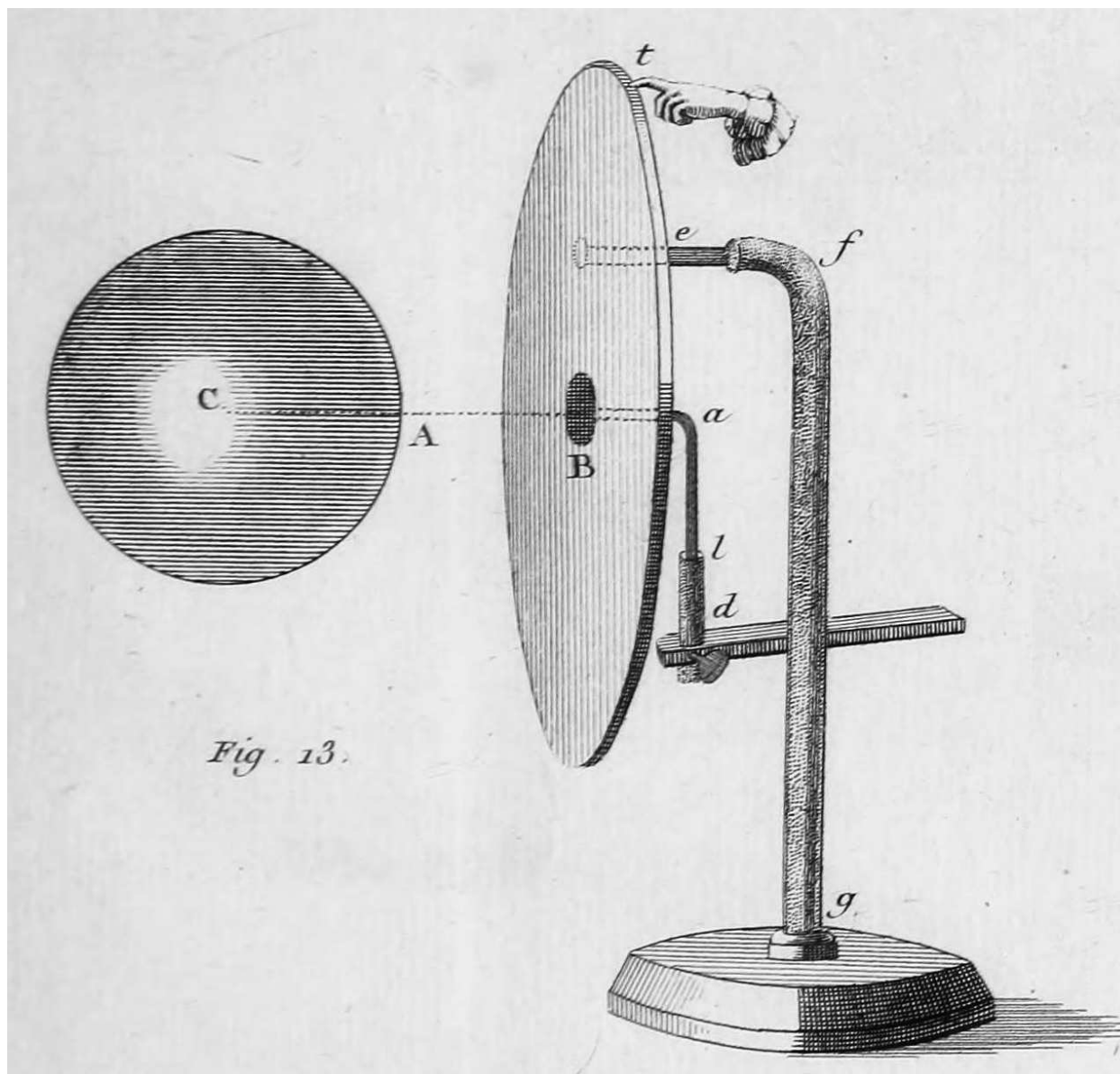
[811]Essa Memória está traduzida no Capítulo 18.

cuja eletricidade é de uma natureza contrária à eletricidade do globo C, e que se junta à ação do globo para empurrar o ponto q ou um outro ponto qualquer do cilindro de q em direção a C. Consequentemente, ela deve aumentar a variação da densidade para todos os pontos do cilindro. Logo a densidade de cada ponto do cilindro deve ser ainda maior que aquela determinada pelo cálculo anterior.[812]

Portanto, busquemos saber qual é a densidade elétrica da superfície Ho apresentada a uma certa distância de um globo eletrizado C. Quando tivermos a avaliação dessa densidade, de acordo com a experiência e com a teoria, será fácil determinar a ação da superfície Ho sobre um ponto qualquer do cilindro; e ao adicionar essa ação à ação do cilindro e do globo sobre o mesmo ponto, [será fácil] calcular de uma maneira bem precisa a densidade elétrica de diferentes partes da superfície do cilindro.

20.62 **LXII.** *Estado Elétrico de um Disco Não Isolado, Colocado, Figura 13, a uma Distância AB Bem Grande de um Globo Eletrizado, para que a Eletricidade Não se Comunique do Globo ao Disco Através da Camada de Ar que Os Separa*

A *Figura 13* indica a disposição do globo C e do disco [condutor] Bt que é apresentado a ele: o globo C está isolado e eletrizado; o disco B é apoiado verticalmente por um suporte dielétrico efg.

[812]Coulomb está agora introduzindo um elemento adicional em relação à Figura 11, a saber, um plano condutor. Seu objetivo novamente é o de estudar um para-raios vertical tendo sua extremidade inferior aterrada e sua extremidade superior próxima de uma nuvem eletrizada. Ele agora vai discutir não apenas a influência do globo eletrizado sobre o cilindro condutor próximo a ele, mas também a influência da eletrização do solo sobre o cilindro, sendo essa eletrização do solo também ocasionada pelo globo eletrizado. Ele vai considerar a situação da Figura 12 girada de 90° como sendo similar ao caso que quer estudar, como ilustrado nessa Nota de rodapé:

Esse disco é perfurado em B próximo de seu centro [com o furo] de duas polegadas de diâmetro, onde introduzimos um pequeno disco de mesmo diâmetro que esse buraco. Esse pequeno disco pode ser em seguida colocado na balança elétrica.[813] Darei aqui apenas o detalhe de uma experiência e o resultado geral de outras.

20.62.1 Experiência

O disco tB, *Figura 13*, tinha 16 polegadas de diâmetro [43,312 cm]; o globo C tinha 8 polegadas de diâmetro; o centro B desse disco estava colocado a 4 polegadas da superfície do globo C; tocávamos com o dedo em t o disco Bt, e ao retirar o pequeno círculo B, o introduzíamos na balança elétrica, cuja agulha estava eletrizada da mesma natureza de

[813]O pequeno disco condutor B no centro do grande disco condutor Bt está apoiado por um material isolante *Bald* ligado a um suporte. Esse conjunto constitui um plano de prova, ver as Notas de rodapé 25, 602 e 627. Esse plano de prova pode ser levado até o interior da balança elétrica para analisar o sinal e o valor da carga elétrica coletada pelo pequeno disco B.

eletricidade que o globo C. Essa agulha era atraída com uma força da qual tomamos a medida por meio de nosso micrômetro de torção. Tocávamos logo em seguida o globo C com o mesmo pequeno disco B que, apresentado na balança, repele a agulha. Determinávamos essa ação e a comparávamos para uma mesma distância[814] com a primeira [ação]. O resultado dessa experiência foi que a ação repulsiva do pequeno disco após haver tocado o globo, era quatro vezes maior que a ação atrativa do mesmo pequeno disco após haver sido colocado em B no centro do grande disco Bt não isolado.

Por uma sequência de experiências análogas à anterior, ao variar a distância CB e ao comparar entre si as densidades elétricas do ponto B em relação a essa distância CB, encontrei que as densidades elétricas do ponto B, de uma natureza contrária à densidade elétrica do globo C, estavam exatamente entre si em razão inversa do quadrado das distâncias do ponto B ao centro do globo C.

20.63 LXIII. *Resultado Dessa Experiência*

É fácil de submeter os resultados da experiência ao cálculo. Seja D a densidade elétrica da superfície do globo, δ a densidade do disco nas partes vizinhas ao ponto B: a ação de uma superfície cuja densidade uniforme é δ agindo em razão inversa do quadrado das distâncias, será para um ponto à distância infinitamente pequena desse disco, igual a δ; a ação de uma superfície esférica agindo a uma distância a do centro da esfera, caso D seja a densidade da superfície e R seu raio, será igual a $2DR^2/a^2$.[815] Assim, se equacionarmos a ação do globo C e a ação do disco B,[816] sendo as densidades elétricas do globo e do disco de uma natureza contrária, teremos

$$\left(\frac{2DR^2}{a^2}+\delta\right)=0 \qquad \text{ou} \qquad -\delta=\frac{2DR^2}{a^2} \ .$$

Na experiência da Seção anterior $R = 4$ polegadas, $a = 8$ polegadas; assim $-\delta = D/2$, quantidade essa que pela nossa experiência nos pareceu ser encontrada igual a $D/4$. Porém é necessário lembrar, assim como provamos acima, *Figura 8*, que quando o pequeno disco B toca o globo, ele adquire uma quantidade de eletricidade dobrada em relação à quantidade da superfície tocada. De onde segue que a quantidade de eletricidade do pequeno disco B, após haver tocado o globo, é o dobro da quantidade da superfície. Assim, como ao introduzir o pequeno disco B no buraco do grande disco Bt, pegamos apenas uma densidade igual à densidade do disco, resulta disso que a experiência, assim como a teoria, fornecem $\delta = -D/2$.

A mesma fórmula nos ensina que a densidade δ do centro B do disco Bt deve seguir a razão composta diretamente da densidade elétrica do grande globo e de sua superfície, e a razão inversa do quadrado da distância BC entre o centro do disco e o centro do globo; o

[814]Isto é, para uma mesma distância entre o disco do plano de prova e a agulha.
[815]Ver a Nota de rodapé 664 na página 321.
[816]No original aparece aqui D vem vez de B.

que se encontra muito exatamente de acordo com a experiência.[817,818]

20.64 LXIV. *Observação*

Uma observação curiosa se apresenta na experiência da qual acabamos de fornecer a teoria na Seção anterior, a saber, quando o disco Bt, *Figura 13*, é tocado em t,[819] estando o globo C eletrizado, apenas a superfície do disco que está do lado do globo fornece sinais de eletricidade, a superfície oposta permanece em seu estado natural.[820] É fácil de provar isso pela experiência, ao tocar alternadamente essas duas superfícies com um pequeno disco isolado, que é apresentado em seguida a um eletrômetro bem sensível. Quando esse pequeno disco toca o grande disco sobre uma superfície do lado do globo, ele fornece sinais de uma forte eletricidade; quando ele toca o lado oposto, ele não dá qualquer sinal.

Esse fenômeno é fácil de explicar pelas considerações que utilizamos nas diferentes Memórias anteriores para provar que o fluido elétrico se distribui somente sobre a superfície dos corpos. Voltaremos a isso na próxima Memória que completará o trabalho que realizamos sobre eletricidade.[821,822] Ela terá o objetivo de determinar a maneira pela qual o fluido elétrico se distribui e penetra a superfície de corpos dielétricos, assim como sobre os corpos condutores que os tocam ou que são vizinhos a eles.

---

[817][Nota de Potier:] Conhecemos a solução rigorosa dessa questão quando o plano é indefinido. Seja a o raio da esfera e d a distância do centro ao plano, ao fazer $k = \sqrt{d^2 - a^2}$ e $r = \frac{d-k}{a}$, encontramos que, para carregar a esfera até o potencial 1, é necessário lhe fornecer uma carga

$$2k \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \;;$$

a carga negativa total do plano é igual a isso em valor absoluto, e a densidade máxima sobre esse plano é

$$\frac{-k}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \left(\frac{1}{\frac{d}{a} - r\frac{1-r^{2n-2}}{1-r^{2n}}} \right)^2 \;,$$

com r tendendo a zero quando d/a aumenta. Caso pudéssemos nos limitar ao primeiro termo da série, a razão

$$\frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n}{1-r^{2n}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n}{1-r^{2n}} \left(\frac{1}{\frac{d}{a} - r\frac{1-r^{2n-2}}{1-r^{2n}}} \right)^2}$$

da densidade média da esfera para a densidade máxima do plano será reduzida a a^2/d^2, como Coulomb a verificou aproximadamente. No caso particular em que $d = 2a$, essa razão é realmente igual a 3,71, e não igual a 4. A diferença é da mesma ordem que as diferenças entre as observações de Coulomb e os resultados dos cálculos de Poisson. Essa experiência também mostra que a carga do plano de prova é de fato aquela carga da superfície sobre a qual aplicamos o plano de prova, e não o dobro dessa carga.

[818]Ver a ainda as Notas de rodapé 777 e 784 nas páginas 392 e 394, respectivamente.

[819]Ou seja, quando o disco Bt é tocado em t por um condutor aterrado, como indicado na Figura 13 pelo dedo da pessoa.

[820]Isto é, a superfície oposta fica neutra ou descarregada eletricamente.

[821][Nota de Potier:] Essa Memória nunca foi publicada e Biot não fez qualquer alusão a ela.

[822]Ver a Introdução de Potier no Capítulo 3.

20.65 LXV

Voltemos[823] agora ao nosso segundo exemplo, Seção 20.61, no qual C, Figura 12, é um globo de 1000 pés [de raio], colocado a 500 pés de distância da extremidade de um cilindro, cujo comprimento é de 60 pés e o raio é de 1 polegada. Nesse exemplo, encontrando-se o plano Ho a 1560 pés do centro do globo C, sua densidade D' será representada por

$$D' = \frac{2D \cdot (1000)^2}{(1560)^2} = 0,822D \ ,$$

sendo D a densidade da superfície do globo. Se quisermos determinar pelos métodos de aproximação anteriores a variação [da densidade] do cilindro, encontraremos que a ação do globo C sobre o ponto q colocado no meio do cilindro, será igual a[824]

$$\frac{2D \cdot (1000)^2}{(1530)^2} = 0,854D \ ;$$

a ação do plano Ho sobre o mesmo ponto q, ao supor o raio desse plano muito grande em relação à distância $m''q$,[825] será, como acabamos de encontrar, igual a $D' = 0,822D$, ação essa que empurra o ponto q na direção do globo C ao mesmo tempo em que o globo C atrai o mesmo ponto. Assim, a ação combinada do globo e do plano Ho solicita o ponto q no sentido qC com uma força igual a $(0,822 + 0,854)D$.

Mas vimos nas Seções anteriores que caso a variação das densidades do cilindro am'', *Figura 11*,[826] seguisse uma linha reta, a ação de todo o cilindro sobre um ponto colocado em seu centro seria igual a

$$2nr \left(\frac{\log \frac{l}{r}}{\mu} - 1 \right) \ ,$$

na qual nr representa a variação da densidade sobre um comprimento igual ao raio r do cilindro, l é o comprimento do cilindro e μ o módulo do sistema logarítmico.[827] Assim, em nosso exemplo, como r é igual a uma polegada, como o comprimento do cilindro é de sessenta pés ou de $720r$, teríamos para a ação do cilindro sobre o ponto colocado no centro em q, a quantidade $2 \cdot 5,58 \cdot nr$, ação essa que atua sobre o ponto q, de q em direção a m''. Assim, o equilíbrio desse ponto fornecerá

$$(0,822 + 0,854)D = 2nr \cdot 5,58 \qquad \text{ou} \qquad nr = \frac{0,838}{5,58}D = 0,15D \ ,$$

[823] Essa última Seção 65 não foi incluída na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[824] No original essa equação apareceu da seguinte forma:

$$\frac{2D \cdot (1000)^2}{(1530)^2} D = 0,854D \ .$$

[825] Ou seja, supondo a superfície Ho como sendo um disco condutor que tem um raio muito maior que a distância $m''q$ entre o centro m'' do disco e o centro q do cilindro aqm''.

[826] No original aparece aqui "Figura 5". Contudo não há nenhuma Figura 5 nas gravuras originais relativas a esse artigo.

[827] Ver a Nota de rodapé 553 na página 264.

quantidade essa que é aproximadamente o dobro daquela que encontramos quando não havíamos levado em conta a ação da superfície Ho.

Se quero agora ter a variação no ponto φ, que suponho localizado a 5 pés da extremidade a do cilindro am'', encontrarei que a ação do plano Ho sobre o ponto φ é aproximadamente igual a D' ou a $0,822D$, sendo a distância $m''\varphi$ muito pequena em relação à extensão eletrizada do plano Ho: a ação do globo sobre o ponto φ será igual a $2D(1000)^2/(1505)^2$. Para obter agora a ação do cilindro sobre o ponto φ, suporei o cilindro dividido em duas partes; a primeira ap tendo 10 pés de comprimento; a segunda pm'' tendo 55 pés de comprimento. Caso a variação da densidade encontrada no meio do cilindro igual a $0,15D$, se estendesse até o ponto p, a 10 pés da extremidade a, teríamos nesse ponto a densidade δ igual a $600 \times 0,15D = 90D$.

Assim, se quiséssemos calcular a ação da porção pm'' do cilindro sobre o ponto φ, sendo a densidade elétrica em p igual a δ, e diminuindo da quantidade nr sobre um comprimento do raio, teríamos, para exprimir essa ação, ao denominar φp de a e $\varphi m''$ de x, de acordo com as Seções anteriores, a fórmula

$$\delta\left(\frac{r}{a}-\frac{r}{x}\right)+nr\left(\frac{a-x}{x}\right)+\frac{nr}{\mu}\log\left(\frac{x}{a}\right) \ .$$

Nessa fórmula é necessário substituir no lugar de δ seu valor $90D$, no lugar de a seu valor $60r$, no lugar de x a quantidade $660r$,[828] e no lugar de nr seu valor $0,15D$. De onde resultará para a ação dessa parte mp do cilindro, a quantidade $1,14D$. Se supormos agora que a variação média ao longo dos últimos dez pés é $n'r$ teremos no ponto p, no meio desses últimos dez pés, para a ação no sentido ap dos últimos dez pés do cilindro, a quantidade

$$2n'r\left(\frac{\log 120}{\mu}-1\right)=7,58n'r \ .$$

Assim, ao somar a ação do globo à ação da superfície Ho e à ação da porção pm'' do cilindro, que atuam no mesmo sentido, teremos a seguinte equação para o equilíbrio no ponto φ, a 5 pés da extremidade a:

$$\frac{2D(1000)^2}{(1505)^2}+0,82D+1,14D=7,58n'r \ ;$$

de onde

$$n'r=\frac{1,42}{3,79}D=0,37D \ .$$

Assim a variação a 5 pés da extremidade a seria, por essa aproximação, igual a $0,37$; de onde concluiríamos que a variação média entre um ponto considerado no meio do cilindro onde essa variação é igual a $0,15D$, e um ponto a 5 pés da extremidade onde essa variação é igual a $0,37D$, será 0,26. Logo o crescimento da densidade desde o meio do cilindro até a cinco pés de distância da extremidade, será sobre vinte e cinco pés ou sobre $300r$ de comprimento, igual a $0,26 \times 300D = 78D$. A variação desde o ponto q, no meio do cilindro, até o ponto m'', não é absolutamente igual a $0,15D$ que encontramos para a variação no meio do cilindro. Porém, ao pegar esse valor como um primeira aproximação, teremos para o crescimento da densidade desde o ponto m'' até o meio q do cilindro ou sobre $360r$ de comprimento, a

[828] No original aparece aqui 660.

quantidade $54D$ que representará a densidade no meio do cilindro. Assim, adicionando a isso $68D$, crescimento da densidade que acabamos de encontrar desde o meio do cilindro até o ponto φ, colocado a 5 pés da extremidade a do cilindro, teremos a densidade nesse ponto φ igual a $132D$.

Caso, ao seguir o método anterior, eu buscasse a variação a 2 pés ou a $24r$ de distância da extremidade a do cilindro, a encontraria para o comprimento de um raio, igual a $1,07D$. Encontraria em seguida a variação sobre um comprimento de um raio considerado a 6 polegadas do ponto a pelo mesmo método de aproximação igual a $5D$, ou igual a cinco vezes a densidade do globo; e ao concluir, de acordo com essas variações, a densidade a 2 ou 3 polegadas da extremidade a do cilindro, a encontraria acima de $200D$.

Se quiséssemos agora determinar a densidade elétrica na extremidade a que termina o cilindro, seria fácil de ver, assim como prova a experiência, que essa densidade é ao menos duas vezes maior que a densidade do ponto b, que estaria afastado apenas de aproximadamente um comprimento igual ao semi-diâmetro do cilindro ou ao raio do hemisfério que o termina. Para provar isso, suponhamos que desde o ponto b, que corresponde ao equador do hemisfério, até o ponto m'', a densidade do cilindro fosse uniforme e igual a δ; [suponhamos ainda] que a densidade da superfície do hemisfério ab é igual a δ'. Encontraremos por um cálculo muito fácil que a ação da superfície do hemisfério ab sobre seu centro e na direção am'' é igual a $\delta'/2$; encontraremos [ainda] que a ação da superfície do cilindro bm'' sobre o ponto e na mesma direção é igual a δ. Assim, ao reunir a essa ação a ação da esfera C e a ação da superfície Ho, elas devem equilibrar a ação do hemisfério ab, de onde resulta a equação

$$\frac{\delta'}{2} = \delta + \frac{2D(1000)^2}{(1500)} + 0,82D\ ;$$

e como δ é muito maior do que D, resulta que δ' ou que a densidade sobre a superfície do hemisfério que termina o cilindro em a, é maior que o dobro da densidade da superfície desse mesmo cilindro a uma polegada de sua extremidade. Esse resultado está de acordo ao que a experiência nos forneceu, *Seção* 20.55.

Os cálculos dessa Seção, embora imperfeitos, são quase que suficientes para todos os assuntos práticos relativos à eletricidade onde poderia ser necessário utilizar o cálculo. Mas os valores dados por essa primeira aproximação podem ser corrigidos e aproximados da verdade tanto quanto se queira ao considerar, assim como dissemos ao final da *Seção* 20.60, a curva das densidades como um polígono, cuja inclinação dos lados seria dada em relação ao *eixo do cilindro*, pela aproximação anterior. O cálculo da ação das diferentes partes da superfície do cilindro sobre um ponto de seu eixo seria feito pelos métodos explicados na *Seção* 20.35 *e seguintes*, e forneceria a variação no centro de uma parte do cilindro, parte essa que poderíamos considerar maior ou menor, de acordo com que o ponto onde quiséssemos determinar a variação [da densidade] estivesse mais ou menos próximo da extremidade a.

Capítulo 21

Observações sobre a Sexta Memória de Coulomb

21.1 Procedimento Experimental de Coulomb

Na experiência da Seção 20.2 Coulomb utiliza sua balança elétrica para estimar a quantidade de carga contida em um globo C eletrizado. Na Figura 21.1 (a) temos a configuração inicial da experiência. Essa Figura representa a visão de cima para baixo da balança elétrica. O fio de suspensão tem sua projeção no ponto a, que é o centro da agulha horizontal presa à extremidade inferior desse fio. Há um disco condutor b na extremidade da agulha isolante ab, sendo que esse disco que vai ser eletrizado com carga de mesmo sinal que a carga do globo C. Quando o fio não está torcido, a agulha aponta para o ponto o preso na parte inferior da balança. A seta indica o micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão. Inicialmente ele aponta para o ponto S preso na parte superior da balança. Estou supondo que quando o fio não está torcido, os pontos a, o e S estão no mesmo plano vertical.

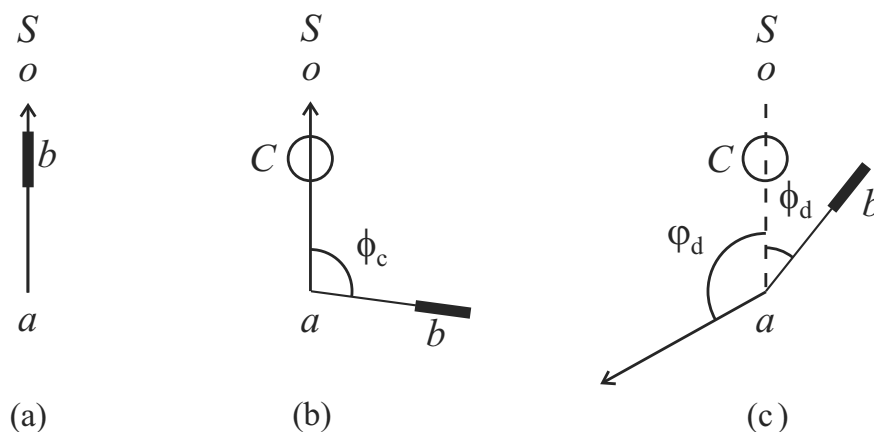



Figura 21.1: (a) Orientação inicial da agulha ab e do indicador do micrômetro ligados às partes inferior e superior do fio de suspensão, respectivamente. (b) O disco eletrizado b da agulha é repelido no sentido horário pelo globo C eletrizado com carga de mesmo sinal. (c) Ao torcer o micrômetro no sentido anti-horário, o disco b é aproximado do globo C.

Coulomb introduz então o globo C na balança, estando o globo e o disco b da agulha eletrizados com cargas de mesmo sinal. Ele coloca o centro do globo C na posição onde estava inicialmente o centro do disco b. Vou supor aqui que a agulha b foi repelida no sentido

horário. No equilíbrio ela fica afastada de C de um ângulo ϕ_c, Figura 21.1 (b). Nessa situação a repulsão elétrica entre C e b é equilibrada pela força de torção da parte inferior do fio de suspensão.

Coulomb gira no sentido anti-horário o micrômetro preso à parte superior do fio de suspensão de um ângulo φ_d até que C e b estejam separados de um ângulo pré-estabelecido ϕ_d, Figura 21.1 (c). Nessa situação a torção total do fio de suspensão é medida por $\phi_d + \varphi_d$.

Coulomb vai estimar a quantidade de cargas de diferentes globos ao trazê-los sempre à mesma distância angular ϕ_d do disco da agulha, por exemplo, com $\phi_d = 30°$. A força de repulsão entre o globo C e o disco d da agulha é proporcional ao produto de suas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros. Essa força é equilibrada pela torção total do fio. Como a distância entre C e b é sempre a mesma em todas as experiências, a quantidade de carga no globo C pode ser estimada pela torção total do fio medida por $\phi_d + \varphi_d$.

21.2 A Força Atuando sobre uma Carga Colocada Exatamente na Superfície de uma Casca Esférica Uniformemente Eletrizada

Na Seção 20.4 dessa Sexta Memória Coulomb mencionou a força exercida por uma casca esférica de raio R uniformemente eletrizada com uma densidade superficial de carga D ao atuar sobre um ponto com carga μ localizado exatamente sobre a superfície. Coulomb então afirmou o seguinte:[829]

> Dans cette supposition, l'action d'une surface sphérique, dont tous les points ont la même densité D, agissant sur un point de la surface dont la masse électrique seroit μ, seroit représentée par $\Pi D\mu$; Π étant le rapport de la circonférence au rayon.

Historicamente a letra π (ou Π) surgiu para indicar o perímetro ou circunferência de um círculo. Durante o século XVIII alguns autores passaram a utilizar a letra π para representar a razão da circunferência para o raio (ou seja, com $\pi = 6,28318...$). Entre esses autores estava Coulomb como pode ser visto por essa frase.[830] Já outros autores passaram a utilizar a letra π para representar a razão da circunferência para o diâmetro (ou seja, com $\pi = 3,14159...$). Essa confusão em relação ao significado do símbolo π persistiu durante a época de Coulomb. Já do século XIX em diante passou-se a adotar a letra π para representar apenas a razão da circunferência de um círculo para seu diâmetro, ou seja, $\pi = 3,14159....$ Nessa tradução para o português a letra π tem seu significado moderno como sendo a razão entre a circunferência de um círculo para seu diâmetro, ou seja, com seu valor dado por $\pi = 3,14159....$

Logo, para tornar o texto de Coulomb compreensível para um público moderno, substituí na tradução da frase acima a expressão $\Pi D\mu$ por $2\pi D\mu$, assim como havia sido feito por Potier.[831] A tradução que adotei para essa frase ficou então da seguinte forma, ver a página 353:

> Com essa suposição, a ação de uma superfície esférica, na qual todos os pontos possuem a mesma densidade D, atuando sobre um ponto da superfície cuja massa

[829] [Coulomb, 1791, pág. 621], ver também a Nota de rodapé 714 na página 353.
[830] Ver também as Notas de rodapé 728 e 762 nas páginas 361 e 385, respectivamente.
[831] [Potier, 1884, pág. 233].

elétrica fosse μ, seria representada por $2\pi D\mu$, sendo π a razão da circunferência para o diâmetro.

O que Coulomb está chamando de "ação" aqui pode ser compreendido como a "força" ou como a "força por unidade de carga" no sentido newtoniano usual.

Nessa frase Coulomb está incluindo o fator 2π na força exercida por uma casca esférica uniformemente eletrizada ao atuar sobre uma partícula eletrizada localizada nessa superfície, ver a Nota de rodapé 664 na página 321. Na Quinta Memória ele havia deixado de lado esse fator 2π.

Alguns autores têm apresentado uma discussão tanto sobre os trabalhos de Coulomb ligados à força atuando sobre uma partícula eletrizada colocada exatamente na superfície de uma casca esférica uniformemente eletrizada, quanto ao cálculo exato dessa força por meio de integrações analíticas.[832]

21.3 Conjunto de 24 Equações

Na Seção 20.16 Coulomb realizou a nona experiência na qual um globo de 8 polegadas de diâmetro foi colocado em contato com uma linha de 24 pequenos globos de 2 polegadas de diâmetro cada, com os centros de todos eles ao longo de uma linha reta. Esses 24 pequenos globos formavam um comprimento de 48 polegadas, como ilustrado na Figura 21.2. As linhas verticais nessa Figura indicam o ponto de contato entre dois globos. O ponto a indica o contato entre o grande globo e o primeiro globo pequeno. Já o ponto a_8, por exemplo, indica o ponto de contato entre o oitavo e o nono globo pequeno.

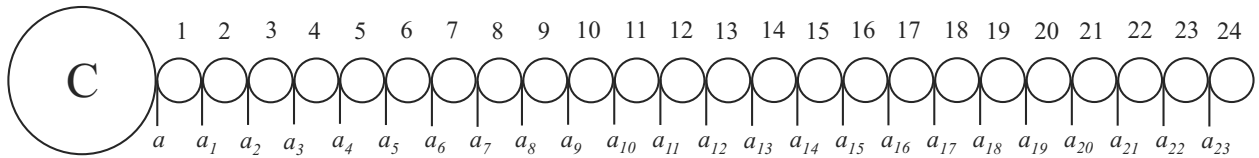



Figura 21.2: Globo grande C com 8 polegadas de diâmetro em contato com uma linha de 24 pequenos globos de 2 polegadas de diâmetro cada um.

Na página 368 da Seção 20.17 foi apresentada a Tabela original contendo um conjunto de 24 equações que descrevem o equilíbrio eletrostático desse sistema de acordo com Coulomb. Na parte superior esquerda da primeira linha dessa Tabela está escrito o seguinte:

"Ação do globo grande sobre os diferentes pontos de contato. A densidade média do globo grande é D; seu raio R, o raio do pequeno globo é r."

Na parte superior direita da primeira linha dessa Tabela está escrito o seguinte:

"*Tabela com 24 equações destinadas a determinar a densidade elétrica média dos 24 pequenos globos, os centros colocados em linha reta, o pequeno globo 1 em contato com um grande globo.* Nessa Tabela, os números na parte superior de cada coluna indicam o lugar do pequeno globo; de maneira que, por exemplo, na oitava coluna vertical, terceira linha horizontal, encontramos a quantidade $\frac{2}{11^2}$ que deve ser multiplicada por δ_8, ou pela densidade média do oitavo pequeno globo, a partir do globo grande."

[832] [Potier, 1884, pág. ix] e a Nota de rodapé 31 na página 27 dessa tradução em português; [Heilbron, 1999, págs. 494-496], [Lima, 2018] e [Lima, 2020].

A partir da segunda linha da primeira coluna temos "Primeira equação. $D =$", "Segunda equação. $\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} =$", etc.

Apresento aqui essa Tabela na forma de 24 equações para deixar claro o que Coulomb tinha em mente. Elas podem ser obtidas seguindo o procedimento da Seção 20.4 e a Nota de rodapé 664 na página 321.

Primeira equação, equilíbrio no ponto a:

$$D = +\delta_1 + \frac{2\delta_2}{3^2} + \frac{2\delta_3}{5^2} + \frac{2\delta_4}{7^2} + \frac{2\delta_5}{9^2} + \frac{2\delta_6}{11^2} + \frac{2\delta_7}{13^2} + \frac{2\delta_8}{15^2} + \frac{2\delta_9}{17^2} + \frac{2\delta_{10}}{19^2} + \frac{2\delta_{11}}{21^2} + \frac{2\delta_{12}}{23^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{25^2} + \frac{2\delta_{14}}{27^2} + \frac{2\delta_{15}}{29^2} + \frac{2\delta_{16}}{31^2} + \frac{2\delta_{17}}{33^2} + \frac{2\delta_{18}}{35^2} + \frac{2\delta_{19}}{37^2} + \frac{2\delta_{20}}{39^2} + \frac{2\delta_{21}}{41^2} + \frac{2\delta_{22}}{43^2} + \frac{2\delta_{23}}{45^2} + \frac{2\delta_{24}}{47^2} \ . \quad (21.1)$$

Segunda equação, equilíbrio no ponto a_1:

$$\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} = -\delta_1 + \delta_2 + \frac{2\delta_3}{3^2} + \frac{2\delta_4}{5^2} + \frac{2\delta_5}{7^2} + \frac{2\delta_6}{9^2} + \frac{2\delta_7}{11^2} + \frac{2\delta_8}{13^2} + \frac{2\delta_9}{15^2} + \frac{2\delta_{10}}{17^2} + \frac{2\delta_{11}}{19^2} + \frac{2\delta_{12}}{21^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{23^2} + \frac{2\delta_{14}}{25^2} + \frac{2\delta_{15}}{27^2} + \frac{2\delta_{16}}{29^2} + \frac{2\delta_{17}}{31^2} + \frac{2\delta_{18}}{33^2} + \frac{2\delta_{19}}{35^2} + \frac{2\delta_{20}}{37^2} + \frac{2\delta_{21}}{39^2} + \frac{2\delta_{22}}{41^2} + \frac{2\delta_{23}}{43^2} + \frac{2\delta_{24}}{45^2} \ . \quad (21.2)$$

Terceira equação, equilíbrio no ponto a_2:

$$\frac{2DR^2}{(R+4r)^2} = -\frac{2\delta_1}{3^2} - \delta_2 + \delta_3 + \frac{2\delta_4}{3^2} + \frac{2\delta_5}{5^2} + \frac{2\delta_6}{7^2} + \frac{2\delta_7}{9^2} + \frac{2\delta_8}{11^2} + \frac{2\delta_9}{13^2} + \frac{2\delta_{10}}{15^2} + \frac{2\delta_{11}}{17^2} + \frac{2\delta_{12}}{19^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{21^2} + \frac{2\delta_{14}}{23^2} + \frac{2\delta_{15}}{25^2} + \frac{2\delta_{16}}{27^2} + \frac{2\delta_{17}}{29^2} + \frac{2\delta_{18}}{31^2} + \frac{2\delta_{19}}{33^2} + \frac{2\delta_{20}}{35^2} + \frac{2\delta_{21}}{37^2} + \frac{2\delta_{22}}{39^2} + \frac{2\delta_{23}}{41^2} + \frac{2\delta_{24}}{43^2} \ . \quad (21.3)$$

Quarta equação, equilíbrio no ponto a_3:

$$\frac{2DR^2}{(R+6r)^2} = -\frac{2\delta_1}{5^2} - \frac{2\delta_2}{3^2} - \delta_3 + \delta_4 + \frac{2\delta_5}{3^2} + \frac{2\delta_6}{5^2} + \frac{2\delta_7}{7^2} + \frac{2\delta_8}{9^2} + \frac{2\delta_9}{11^2} + \frac{2\delta_{10}}{13^2} + \frac{2\delta_{11}}{15^2} + \frac{2\delta_{12}}{17^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{19^2} + \frac{2\delta_{14}}{21^2} + \frac{2\delta_{15}}{23^2} + \frac{2\delta_{16}}{25^2} + \frac{2\delta_{17}}{27^2} + \frac{2\delta_{18}}{29^2} + \frac{2\delta_{19}}{31^2} + \frac{2\delta_{20}}{33^2} + \frac{2\delta_{21}}{35^2} + \frac{2\delta_{22}}{37^2} + \frac{2\delta_{23}}{39^2} + \frac{2\delta_{24}}{41^2} \ . \quad (21.4)$$

Quinta equação, equilíbrio no ponto a_4:

$$\frac{2DR^2}{(R+8r)^2} = -\frac{2\delta_1}{7^2} - \frac{2\delta_2}{5^2} - \frac{2\delta_3}{3^2} - \delta_4 + \delta_5 + \frac{2\delta_6}{3^2} + \frac{2\delta_7}{5^2} + \frac{2\delta_8}{7^2} + \frac{2\delta_9}{9^2} + \frac{2\delta_{10}}{11^2} + \frac{2\delta_{11}}{13^2} + \frac{2\delta_{12}}{15^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{17^2} + \frac{2\delta_{14}}{19^2} + \frac{2\delta_{15}}{21^2} + \frac{2\delta_{16}}{23^2} + \frac{2\delta_{17}}{25^2} + \frac{2\delta_{18}}{27^2} + \frac{2\delta_{19}}{29^2} + \frac{2\delta_{20}}{31^2} + \frac{2\delta_{21}}{33^2} + \frac{2\delta_{22}}{35^2} + \frac{2\delta_{23}}{37^2} + \frac{2\delta_{24}}{39^2} \ . \quad (21.5)$$

Sexta equação, equilíbrio no ponto a_5:

$$\frac{2DR^2}{(R+10r)^2} = -\frac{2\delta_1}{9^2} - \frac{2\delta_2}{7^2} - \frac{2\delta_3}{5^2} - \frac{2\delta_4}{3^2} - \delta_5 + \delta_6 + \frac{2\delta_7}{3^2} + \frac{2\delta_8}{5^2} + \frac{2\delta_9}{7^2} + \frac{2\delta_{10}}{9^2} + \frac{2\delta_{11}}{11^2} + \frac{2\delta_{12}}{13^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{15^2} + \frac{2\delta_{14}}{17^2} + \frac{2\delta_{15}}{19^2} + \frac{2\delta_{16}}{21^2} + \frac{2\delta_{17}}{23^2} + \frac{2\delta_{18}}{25^2} + \frac{2\delta_{19}}{27^2} + \frac{2\delta_{20}}{29^2} + \frac{2\delta_{21}}{31^2} + \frac{2\delta_{22}}{33^2} + \frac{2\delta_{23}}{35^2} + \frac{2\delta_{24}}{37^2}\ . \quad (21.6)$$

Sétima equação, equilíbrio no ponto a_6:

$$\frac{2DR^2}{(R+12r)^2} = -\frac{2\delta_1}{11^2} - \frac{2\delta_2}{9^2} - \frac{2\delta_3}{7^2} - \frac{2\delta_4}{5^2} - \frac{2\delta_5}{3^2} - \delta_6 + \delta_7 + \frac{2\delta_8}{3^2} + \frac{2\delta_9}{5^2} + \frac{2\delta_{10}}{7^2} + \frac{2\delta_{11}}{9^2} + \frac{2\delta_{12}}{11^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{13^2} + \frac{2\delta_{14}}{15^2} + \frac{2\delta_{15}}{17^2} + \frac{2\delta_{16}}{19^2} + \frac{2\delta_{17}}{21^2} + \frac{2\delta_{18}}{23^2} + \frac{2\delta_{19}}{25^2} + \frac{2\delta_{20}}{27^2} + \frac{2\delta_{21}}{29^2} + \frac{2\delta_{22}}{31^2} + \frac{2\delta_{23}}{33^2} + \frac{2\delta_{24}}{35^2}\ . \quad (21.7)$$

Oitava equação, equilíbrio no ponto a_7:

$$\frac{2DR^2}{(R+14r)^2} = -\frac{2\delta_1}{13^2} - \frac{2\delta_2}{11^2} - \frac{2\delta_3}{9^2} - \frac{2\delta_4}{7^2} - \frac{2\delta_5}{5^2} - \frac{2\delta_6}{3^2} - \delta_7 + \delta_8 + \frac{2\delta_9}{3^2} + \frac{2\delta_{10}}{5^2} + \frac{2\delta_{11}}{7^2} + \frac{2\delta_{12}}{9^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{11^2} + \frac{2\delta_{14}}{13^2} + \frac{2\delta_{15}}{15^2} + \frac{2\delta_{16}}{17^2} + \frac{2\delta_{17}}{19^2} + \frac{2\delta_{18}}{21^2} + \frac{2\delta_{19}}{23^2} + \frac{2\delta_{20}}{25^2} + \frac{2\delta_{21}}{27^2} + \frac{2\delta_{22}}{29^2} + \frac{2\delta_{23}}{31^2} + \frac{2\delta_{24}}{33^2}\ . \quad (21.8)$$

Nona equação, equilíbrio no ponto a_8:

$$\frac{2DR^2}{(R+16r)^2} = -\frac{2\delta_1}{15^2} - \frac{2\delta_2}{13^2} - \frac{2\delta_3}{11^2} - \frac{2\delta_4}{9^2} - \frac{2\delta_5}{7^2} - \frac{2\delta_6}{5^2} - \frac{2\delta_7}{3^2} - \delta_8 + \delta_9 + \frac{2\delta_{10}}{3^2} + \frac{2\delta_{11}}{5^2} + \frac{2\delta_{12}}{7^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{9^2} + \frac{2\delta_{14}}{11^2} + \frac{2\delta_{15}}{13^2} + \frac{2\delta_{16}}{15^2} + \frac{2\delta_{17}}{17^2} + \frac{2\delta_{18}}{19^2} + \frac{2\delta_{19}}{21^2} + \frac{2\delta_{20}}{23^2} + \frac{2\delta_{21}}{25^2} + \frac{2\delta_{22}}{27^2} + \frac{2\delta_{23}}{29^2} + \frac{2\delta_{24}}{31^2}\ . \quad (21.9)$$

Décima equação, equilíbrio no ponto a_9:

$$\frac{2DR^2}{(R+18r)^2} = -\frac{2\delta_1}{17^2} - \frac{2\delta_2}{15^2} - \frac{2\delta_3}{13^2} - \frac{2\delta_4}{11^2} - \frac{2\delta_5}{9^2} - \frac{2\delta_6}{7^2} - \frac{2\delta_7}{5^2} - \frac{2\delta_8}{3^2} - \delta_9 + \delta_{10} + \frac{2\delta_{11}}{3^2} + \frac{2\delta_{12}}{5^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{7^2} + \frac{2\delta_{14}}{9^2} + \frac{2\delta_{15}}{11^2} + \frac{2\delta_{16}}{13^2} + \frac{2\delta_{17}}{15^2} + \frac{2\delta_{18}}{17^2} + \frac{2\delta_{19}}{19^2} + \frac{2\delta_{20}}{21^2} + \frac{2\delta_{21}}{23^2} + \frac{2\delta_{22}}{25^2} + \frac{2\delta_{23}}{27^2} + \frac{2\delta_{24}}{29^2}\ . \quad (21.10)$$

Décima primeira equação, equilíbrio no ponto a_{10}:

$$\frac{2DR^2}{(R+20r)^2} = -\frac{2\delta_1}{19^2} - \frac{2\delta_2}{17^2} - \frac{2\delta_3}{15^2} - \frac{2\delta_4}{13^2} - \frac{2\delta_5}{11^2} - \frac{2\delta_6}{9^2} - \frac{2\delta_7}{7^2} - \frac{2\delta_8}{5^2} - \frac{2\delta_9}{3^2} - \delta_{10} + \delta_{11} + \frac{2\delta_{12}}{3^2}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{5^2} + \frac{2\delta_{14}}{7^2} + \frac{2\delta_{15}}{9^2} + \frac{2\delta_{16}}{11^2} + \frac{2\delta_{17}}{13^2} + \frac{2\delta_{18}}{15^2} + \frac{2\delta_{19}}{17^2} + \frac{2\delta_{20}}{19^2} + \frac{2\delta_{21}}{21^2} + \frac{2\delta_{22}}{23^2} + \frac{2\delta_{23}}{25^2} + \frac{2\delta_{24}}{27^2}\ . \quad (21.11)$$

Décima segunda equação, equilíbrio no ponto a_{11}:

$$\frac{2DR^2}{(R+22r)^2} = -\frac{2\delta_1}{21^2} - \frac{2\delta_2}{19^2} - \frac{2\delta_3}{17^2} - \frac{2\delta_4}{15^2} - \frac{2\delta_5}{13^2} - \frac{2\delta_6}{11^2} - \frac{2\delta_7}{9^2} - \frac{2\delta_8}{7^2} - \frac{2\delta_9}{5^2} - \frac{2\delta_{10}}{3^2} - \delta_{11} + \delta_{12}$$

$$+ \frac{2\delta_{13}}{3^2} + \frac{2\delta_{14}}{5^2} + \frac{2\delta_{15}}{7^2} + \frac{2\delta_{16}}{9^2} + \frac{2\delta_{17}}{11^2} + \frac{2\delta_{18}}{13^2} + \frac{2\delta_{19}}{15^2} + \frac{2\delta_{20}}{17^2} + \frac{2\delta_{21}}{19^2} + \frac{2\delta_{22}}{21^2} + \frac{2\delta_{23}}{23^2} + \frac{2\delta_{24}}{25^2} \,. \quad (21.12)$$

Décima terceira equação, equilíbrio no ponto a_{12}:

$$\frac{2DR^2}{(R+24r)^2} = -\frac{2\delta_1}{23^2} - \frac{2\delta_2}{21^2} - \frac{2\delta_3}{19^2} - \frac{2\delta_4}{17^2} - \frac{2\delta_5}{15^2} - \frac{2\delta_6}{13^2} - \frac{2\delta_7}{11^2} - \frac{2\delta_8}{9^2} - \frac{2\delta_9}{7^2} - \frac{2\delta_{10}}{5^2} - \frac{2\delta_{11}}{3^2} - \delta_{12}$$

$$+ \delta_{13} + \frac{2\delta_{14}}{3^2} + \frac{2\delta_{15}}{5^2} + \frac{2\delta_{16}}{7^2} + \frac{2\delta_{17}}{9^2} + \frac{2\delta_{18}}{11^2} + \frac{2\delta_{19}}{13^2} + \frac{2\delta_{20}}{15^2} + \frac{2\delta_{21}}{17^2} + \frac{2\delta_{22}}{19^2} + \frac{2\delta_{23}}{21^2} + \frac{2\delta_{24}}{23^2} \,. \quad (21.13)$$

Décima quarta equação, equilíbrio no ponto a_{13}:

$$\frac{2DR^2}{(D+26r)^2} = -\frac{2\delta_1}{25^2} - \frac{2\delta_2}{23^2} - \frac{2\delta_3}{21^2} - \frac{2\delta_4}{19^2} - \frac{2\delta_5}{17^2} - \frac{2\delta_6}{15^2} - \frac{2\delta_7}{13^2} - \frac{2\delta_8}{11^2} - \frac{2\delta_9}{9^2} - \frac{2\delta_{10}}{7^2} - \frac{2\delta_{11}}{5^2} - \frac{2\delta_{12}}{3^2}$$

$$- \delta_{13} + \delta_{14} + \frac{2\delta_{15}}{3^2} + \frac{2\delta_{16}}{5^2} + \frac{2\delta_{17}}{7^2} + \frac{2\delta_{18}}{9^2} + \frac{2\delta_{19}}{11^2} + \frac{2\delta_{20}}{13^2} + \frac{2\delta_{21}}{15^2} + \frac{2\delta_{22}}{17^2} + \frac{2\delta_{23}}{19^2} + \frac{2\delta_{24}}{21^2} \,. \quad (21.14)$$

Décima quinta equação, equilíbrio no ponto a_{14}:

$$\frac{2DR^2}{(R+28r)^2} = -\frac{2\delta_1}{27^2} - \frac{2\delta_2}{25^2} - \frac{2\delta_3}{23^2} - \frac{2\delta_4}{21^2} - \frac{2\delta_5}{19^2} - \frac{2\delta_6}{17^2} - \frac{2\delta_7}{15^2} - \frac{2\delta_8}{13^2} - \frac{2\delta_9}{11^2} - \frac{2\delta_{10}}{9^2} - \frac{2\delta_{11}}{7^2} - \frac{2\delta_{12}}{5^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{3^2} - \delta_{14} + \delta_{15} + \frac{2\delta_{16}}{3^2} + \frac{2\delta_{17}}{5^2} + \frac{2\delta_{18}}{7^2} + \frac{2\delta_{19}}{9^2} + \frac{2\delta_{20}}{11^2} + \frac{2\delta_{21}}{13^2} + \frac{2\delta_{22}}{15^2} + \frac{2\delta_{23}}{17^2} + \frac{2\delta_{24}}{19^2} \,. \quad (21.15)$$

Décima sexta equação, equilíbrio no ponto a_{15}:

$$\frac{2DR^2}{(R+40r)^2} = -\frac{2\delta_1}{29^2} - \frac{2\delta_2}{27^2} - \frac{2\delta_3}{25^2} - \frac{2\delta_4}{23^2} - \frac{2\delta_5}{21^2} - \frac{2\delta_6}{19^2} - \frac{2\delta_7}{17^2} - \frac{2\delta_8}{15^2} - \frac{2\delta_9}{13^2} - \frac{2\delta_{10}}{11^2} - \frac{2\delta_{11}}{9^2} - \frac{2\delta_{12}}{7^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{5^2} - \frac{2\delta_{14}}{3^2} - \delta_{15} + \delta_{16} + \frac{2\delta_{17}}{3^2} + \frac{2\delta_{18}}{5^2} + \frac{2\delta_{19}}{7^2} + \frac{2\delta_{20}}{9^2} + \frac{2\delta_{21}}{11^2} + \frac{2\delta_{22}}{13^2} + \frac{2\delta_{23}}{15^2} + \frac{2\delta_{24}}{17^2} \,. \quad (21.16)$$

Décima sétima equação, equilíbrio no ponto a_{16}:

$$\frac{2DR^2}{(R+32r)^2} = -\frac{2\delta_1}{31^2} - \frac{2\delta_2}{29^2} - \frac{2\delta_3}{27^2} - \frac{2\delta_4}{25^2} - \frac{2\delta_5}{23^2} - \frac{2\delta_6}{21^2} - \frac{2\delta_7}{19^2} - \frac{2\delta_8}{17^2} - \frac{2\delta_9}{15^2} - \frac{2\delta_{10}}{13^2} - \frac{2\delta_{11}}{11^2} - \frac{2\delta_{12}}{9^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{7^2} - \frac{2\delta_{14}}{5^2} - \frac{2\delta_{15}}{3^2} - \delta_{16} + \delta_{17} + \frac{2\delta_{18}}{3^2} + \frac{2\delta_{19}}{5^2} + \frac{2\delta_{20}}{7^2} + \frac{2\delta_{21}}{9^2} + \frac{2\delta_{22}}{11^2} + \frac{2\delta_{23}}{13^2} + \frac{2\delta_{24}}{15^2} \,. \quad (21.17)$$

Décima oitava equação, equilíbrio no ponto a_{17}:

$$\frac{2DR^2}{(R+34r)^2} = -\frac{2\delta_1}{33^2} - \frac{2\delta_2}{31^2} - \frac{2\delta_3}{29^2} - \frac{2\delta_4}{27^2} - \frac{2\delta_5}{25^2} - \frac{2\delta_6}{23^2} - \frac{2\delta_7}{21^2} - \frac{2\delta_8}{19^2} - \frac{2\delta_9}{17^2} - \frac{2\delta_{10}}{15^2} - \frac{2\delta_{11}}{13^2} - \frac{2\delta_{12}}{11^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{9^2} - \frac{2\delta_{14}}{7^2} - \frac{2\delta_{15}}{5^2} - \frac{2\delta_{16}}{3^2} - \delta_{17} + \delta_{18} + \frac{2\delta_{19}}{3^2} + \frac{2\delta_{20}}{5^2} + \frac{2\delta_{21}}{7^2} + \frac{2\delta_{22}}{9^2} + \frac{2\delta_{23}}{11^2} + \frac{2\delta_{24}}{13^2}\ . \quad (21.18)$$

Décima nona equação, equilíbrio no ponto a_{18}:

$$\frac{2DR^2}{(R+36r)^2} = -\frac{2\delta_1}{35^2} - \frac{2\delta_2}{33^2} - \frac{2\delta_3}{31^2} - \frac{2\delta_4}{29^2} - \frac{2\delta_5}{27^2} - \frac{2\delta_6}{25^2} - \frac{2\delta_7}{23^2} - \frac{2\delta_8}{21^2} - \frac{2\delta_9}{19^2} - \frac{2\delta_{10}}{17^2} - \frac{2\delta_{11}}{15^2} - \frac{2\delta_{12}}{13^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{11^2} - \frac{2\delta_{14}}{9^2} - \frac{2\delta_{15}}{7^2} - \frac{2\delta_{16}}{5^2} - \frac{2\delta_{17}}{3^2} - \delta_{18} + \delta_{19} + \frac{2\delta_{20}}{3^2} + \frac{2\delta_{21}}{5^2} + \frac{2\delta_{22}}{7^2} + \frac{2\delta_{23}}{9^2} + \frac{2\delta_{24}}{11^2}\ . \quad (21.19)$$

Vigésima equação, equilíbrio no ponto a_{19}:

$$\frac{2DR^2}{(R+38r)^2} = -\frac{2\delta_1}{37^2} - \frac{2\delta_2}{35^2} - \frac{2\delta_3}{33^2} - \frac{2\delta_4}{31^2} - \frac{2\delta_5}{29^2} - \frac{2\delta_6}{27^2} - \frac{2\delta_7}{25^2} - \frac{2\delta_8}{23^2} - \frac{2\delta_9}{21^2} - \frac{2\delta_{10}}{19^2} - \frac{2\delta_{11}}{17^2} - \frac{2\delta_{12}}{15^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{13^2} - \frac{2\delta_{14}}{11^2} - \frac{2\delta_{15}}{9^2} - \frac{2\delta_{16}}{7^2} - \frac{2\delta_{17}}{5^2} - \frac{2\delta_{18}}{3^2} - \delta_{19} + \delta_{20} + \frac{2\delta_{21}}{3^2} + \frac{2\delta_{22}}{5^2} + \frac{2\delta_{23}}{7^2} + \frac{2\delta_{24}}{9^2}\ . \quad (21.20)$$

Vigésima primeira equação, equilíbrio no ponto a_{20}:

$$\frac{2DR^2}{(R+40r)^2} = -\frac{2\delta_1}{39^2} - \frac{2\delta_2}{37^2} - \frac{2\delta_3}{35^2} - \frac{2\delta_4}{33^2} - \frac{2\delta_5}{31^2} - \frac{2\delta_6}{29^2} - \frac{2\delta_7}{27^2} - \frac{2\delta_8}{25^2} - \frac{2\delta_9}{23^2} - \frac{2\delta_{10}}{21^2} - \frac{2\delta_{11}}{19^2} - \frac{2\delta_{12}}{17^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{15^2} - \frac{2\delta_{14}}{13^2} - \frac{2\delta_{15}}{11^2} - \frac{2\delta_{16}}{9^2} - \frac{2\delta_{17}}{7^2} - \frac{2\delta_{18}}{5^2} - \frac{2\delta_{19}}{3^2} - \delta_{20} + \delta_{21} + \frac{2\delta_{22}}{3^2} + \frac{2\delta_{23}}{5^2} + \frac{2\delta_{24}}{7^2}\ . \quad (21.21)$$

Vigésima segunda equação, equilíbrio no ponto a_{21}:

$$\frac{2DR^2}{(R+42r)^2} = -\frac{2\delta_1}{41^2} - \frac{2\delta_2}{39^2} - \frac{2\delta_3}{37^2} - \frac{2\delta_4}{35^2} - \frac{2\delta_5}{33^2} - \frac{2\delta_6}{31^2} - \frac{2\delta_7}{29^2} - \frac{2\delta_8}{27^2} - \frac{2\delta_9}{25^2} - \frac{2\delta_{10}}{23^2} - \frac{2\delta_{11}}{21^2} - \frac{2\delta_{12}}{19^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{17^2} - \frac{2\delta_{14}}{15^2} - \frac{2\delta_{15}}{13^2} - \frac{2\delta_{16}}{11^2} - \frac{2\delta_{17}}{9^2} - \frac{2\delta_{18}}{7^2} - \frac{2\delta_{19}}{5^2} - \frac{2\delta_{20}}{3^2} - \delta_{21} + \delta_{22} + \frac{2\delta_{23}}{3^2} + \frac{2\delta_{24}}{5^2}\ . \quad (21.22)$$

Vigésima terceira equação, equilíbrio no ponto a_{22}:

$$\frac{2DR^2}{(R+44r)^2} = -\frac{2\delta_1}{43^2} - \frac{2\delta_2}{41^2} - \frac{2\delta_3}{39^2} - \frac{2\delta_4}{37^2} - \frac{2\delta_5}{35^2} - \frac{2\delta_6}{33^2} - \frac{2\delta_7}{31^2} - \frac{2\delta_8}{29^2} - \frac{2\delta_9}{27^2} - \frac{2\delta_{10}}{25^2} - \frac{2\delta_{11}}{23^2} - \frac{2\delta_{12}}{21^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{19^2} - \frac{2\delta_{14}}{17^2} - \frac{2\delta_{15}}{15^2} - \frac{2\delta_{16}}{13^2} - \frac{2\delta_{17}}{11^2} - \frac{2\delta_{18}}{9^2} - \frac{2\delta_{19}}{7^2} - \frac{2\delta_{20}}{5^2} - \frac{2\delta_{21}}{3^2} - \delta_{22} + \delta_{23} + \frac{2\delta_{24}}{3^2}\ . \quad (21.23)$$

Vigésima quarta equação, equilíbrio no ponto a_{23}:

$$\frac{2DR^2}{(R+46r)^2} = -\frac{2\delta_1}{45^2} - \frac{2\delta_2}{43^2} - \frac{2\delta_3}{41^2} - \frac{2\delta_4}{39^2} - \frac{2\delta_5}{37^2} - \frac{2\delta_6}{35^2} - \frac{2\delta_7}{33^2} - \frac{2\delta_8}{31^2} - \frac{2\delta_9}{29^2} - \frac{2\delta_{10}}{27^2} - \frac{2\delta_{11}}{25^2} - \frac{2\delta_{12}}{23^2}$$

$$- \frac{2\delta_{13}}{21^2} - \frac{2\delta_{14}}{19^2} - \frac{2\delta_{15}}{17^2} - \frac{2\delta_{16}}{15^2} - \frac{2\delta_{17}}{13^2} - \frac{2\delta_{18}}{11^2} - \frac{2\delta_{19}}{9^2} - \frac{2\delta_{20}}{7^2} - \frac{2\delta_{21}}{5^2} - \frac{2\delta_{22}}{3^2} - \delta_{23} + \delta_{24}\ . \quad (21.24)$$

Capítulo 22

Sétima Memória sobre Eletricidade e Magnetismo: Sobre o Magnetismo

Por Coulomb[833]

22.1 I

Nas seis Memórias anteriores, impressas sucessivamente nos volumes da Academia desde 1784, tinha em vista principalmente submeter ao cálculo os diferentes fenômenos da eletricidade. A Memória que apresento hoje tem por objetivo determinar pela experiência e pelo cálculo teórico as leis do magnetismo.

Nas operações que vão a seguir é necessário lembrar de alguns resultados que já forneci, seja em uma Memória sobre as agulhas imantadas, impressa no nono volume dos *Savants étrangers*,[834] seja em uma Memória impressa em nosso volume de 1785.[835]

Na Primeira dessas Memórias, página 168,[836] provei que:

> caso, após haver suspendido uma agulha por seu centro de gravidade, em relação ao qual ela pode se mover livremente em todos os sentidos, a afastarmos do meridiano magnético, ela retorna sempre para essa direção por meio de uma força constante, qualquer que seja o ângulo de direção que a agulha forme com o meridiano magnético.

Nessa Memória, apresentei algumas experiências de autores diferentes de onde deduzi o resultado anterior. Mas no *volume de 1785 da Academia, página 603 e seguintes*,[837] confirmei esse resultado por meio de minha balança de torção por uma experiência que parece decisiva. Aqui vai no que ela consiste. Colocamos na balança magnética, tal como está descrita nessa Memória, uma agulha imantada suspensa horizontalmente por um fio de cobre, de maneira que quando a agulha se encontra na direção do meridiano magnético, seja nulo o ângulo de torção do fio de suspensão. Em seguida torcemos o fio de suspensão por meio do micrômetro descrito nas diferentes Memórias anteriores, observando para diferentes ângulos de torção de

[833]Esse trabalho foi apresentado em 1789 à Academia de Ciências da França, sendo publicado em 1793, [Coulomb, 1793].

[834][Coulomb, 1780]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 5.

[835][Coulomb, 1788d] com tradução para o alemão em [Coulomb, 1890e] e com tradução parcial para o inglês em [Coulomb, 1935b]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 12.

[836]Ver a página 52 na Subseção 5.0.2.

[837]Ver a página 242 na Subseção 12.5.1.

quanto a agulha se afasta de seu meridiano magnético, encontrando que a força de torção necessária para manter uma agulha a uma distância [angular] qualquer de seu meridiano é muito exatamente proporcional ao seno do ângulo que a direção da agulha forma com esse meridiano. De onde resulta evidentemente que a resultante das forças que impelem de volta a agulha até seu meridiano é uma quantidade constante paralela ao meridiano e que passa sempre pelo mesmo ponto da agulha.

Provei ainda, no *nono volume dos Savans étrangers, página 170*,[838] que as forças magnéticas do globo terrestre que solicitam os diferentes pontos de uma agulha imantada atuam em dois sentidos opostos; que a parte da agulha que se dirige em nossos climas aproximadamente para o Norte [geográfico], é atraída em direção ao Norte, enquanto que a parte austral da agulha[839] é atraída em direção ao Sul. Porém, qualquer que seja a maneira com que a agulha tenha sido imantada, ou até mesmo que após ter sido imantada cortemos dela uma metade ou uma porção qualquer, a soma das forças que solicita a agulha ou a porção que tenhamos destacado em direção ao Norte, é exatamente igual à soma das forças que solicitam a agulha ou sua porção cortada em direção ao Sul do meridiano magnético. Deduzi esse resultado de várias experiências, sendo que a mais simples é aquela em que uma agulha pesada antes e após ter sido imantada possui, nos dois casos, muito exatamente o mesmo peso. O Sr. Bouguer em sua *Voyage au Pérou, página 85 e seguintes*,[840] provou antes de mim essa igualdade de ações opostas por meio de experiências decisivas.

É ainda um fato da experiência, como já dissemos nas Memórias citadas, que as agulhas imantadas só são suscetíveis de um certo grau de magnetismo que elas não podem ultrapassar, não importando quão fortes sejam os ímãs que utilizamos sucessivamente para imantá-las.

Enfim, provamos nas *Memórias de 1786* que as ações atrativas e repulsivas das moléculas magnéticas estavam em razão direta da intensidade magnética [das moléculas] e em razão inversa do quadrado da distância entre elas.[841]

Sendo conhecidos todos esses fatos, aqui vão os assuntos principais que busco determinar na Memória que apresento agora:

1. A razão entre as forças diretrizes que impelem de volta ao meridiano magnético as agulhas com dimensões diferentes, mas de mesma natureza, quando elas são imantadas até a saturação.[842]

2. A intensidade magnética de cada ponto de uma agulha.

3. Dentro de quais limites é necessário incluir as hipóteses de atração e de repulsão entre os fluidos magnéticos,[843] para que essas hipóteses possam concordar com a experiência.

4. Os meios práticos mais vantajosos indicados pela experiência e pela teoria para imantar as agulhas até a saturação e para formar ímãs artificiais de uma grande intensidade.

---

[838] [Coulomb, 1780, pág. 170]. Ver a página 53 na Subseção 5.0.3.

[839] Ver a Nota de rodapé 96 na página 52.

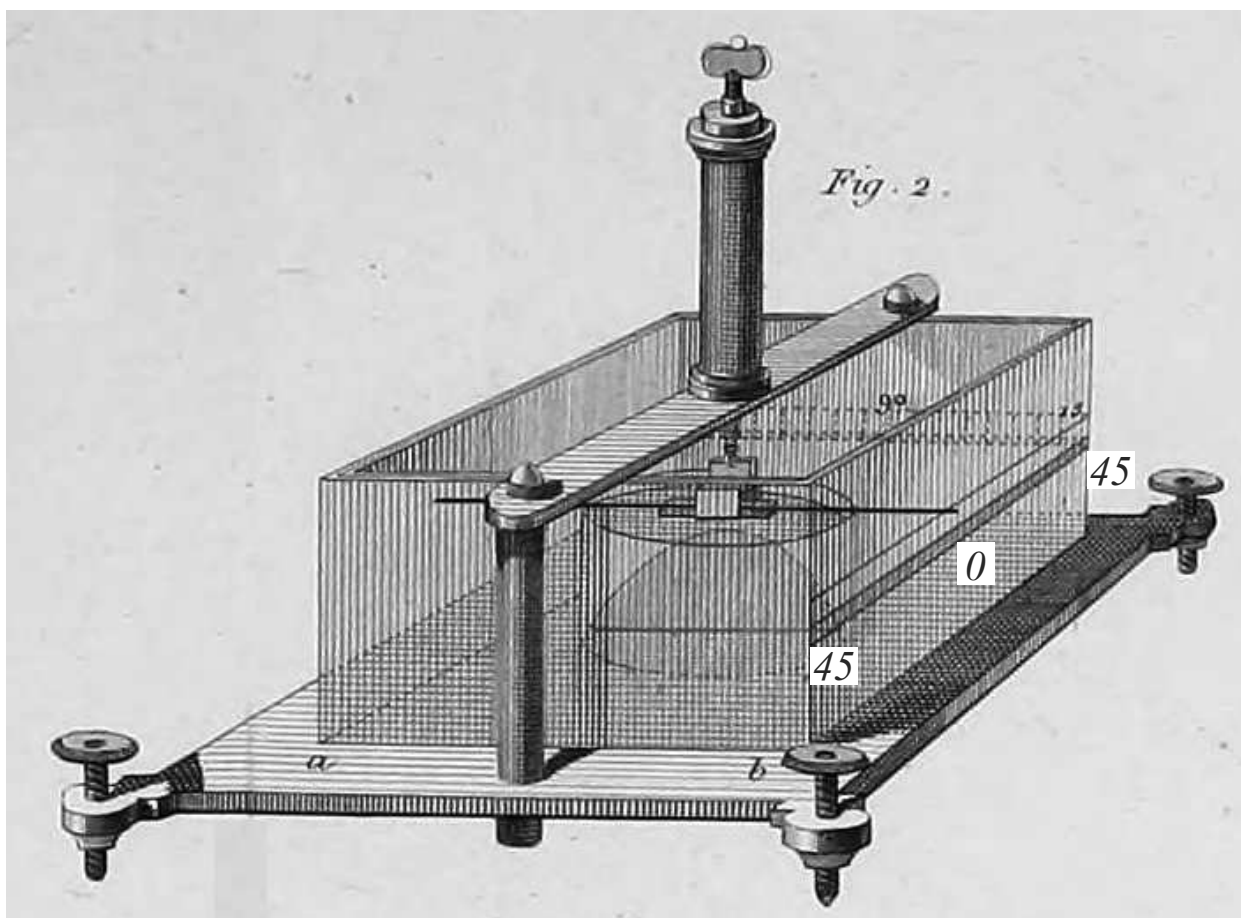
[840] Pierre Bouguer (1698-1758) foi um matemático, físico e hidrógrafo francês. Ver [Bouguer, 1749].

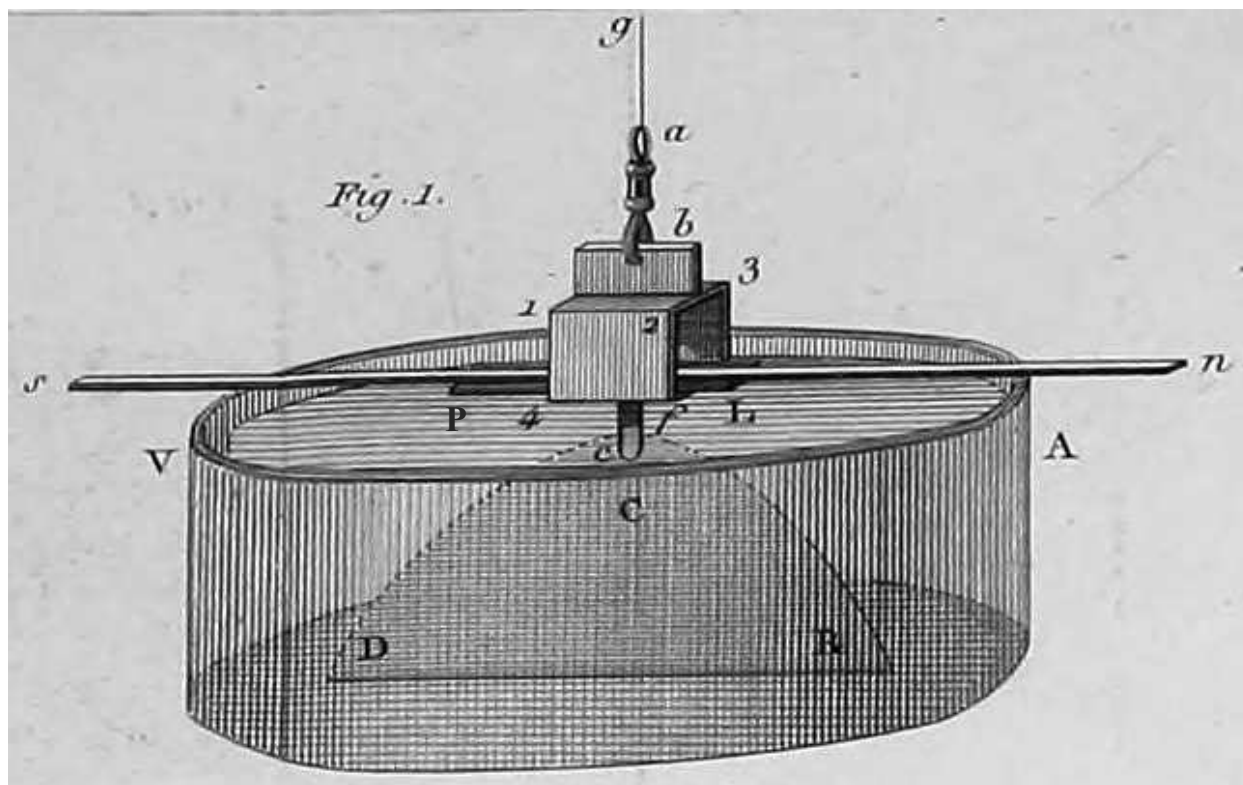
[841] No original: *les actions attractives et répulsives des molécules magnétiques étaient en raison directe de l'intensité magnétique et de l'inverse du carré de leurs distances.* Ou seja, a força atrativa ou repulsiva entre as partículas magnéticas é diretamente proporcional ao produto das intensidades de fluido magnético dessas partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Ver ainda a Seção 12.3.

[842] Ou seja, Coulomb quer determinar o torque magnético exercido pela Terra sobre uma agulha cilíndrica feita de um certo material, imantada até a saturação, em função do comprimento e da espessura da agulha.

[843] No original: *fluides aimantaires.*

22.2 II

Utilizei (*Figura 2*)[844] na maioria das experiências uma balança de torção absolutamente similar à balança elétrica descrita nas diferentes Memórias que já publiquei (Volume de 1787).

Apenas o suporte da agulha (*Figura 1*) possui uma forma particular tal como exige o novo tipo de experiências para as quais ele é destinado.

[844]Essa é uma das balanças magnéticas de Coulomb. Acrescentei os números 0 e 45 que não aparecem em sua Figura. Eles representam os ângulos marcados na faixa lateral.

No desenho desse suporte (*Figura 1*), ab representa a pinça que prende por sua parte superior o fio de suspensão ag. Esse fio, assim como dissemos nas Memórias sobre eletricidade, é preso em sua extremidade superior por uma outra pinça que faz parte do micrômetro (*ver* o Volume da Academia, 1785, página 569; 1787, página 421);[845] a pinça ab prende por sua extremidade inferior b um estribo 1234 formado com uma lâmina bem leve de cobre. Colocamos nesse estribo um pequeno plano PL de cartão que é coberto em sua superfície superior de um revestimento de cera da Espanha sobre o qual fazemos a marca do fio de aço que queremos submeter às experiências,[846] o que facilita, nos testes sucessivos, de sempre colocar o fio no mesmo lugar. Soldamos abaixo do meio desse estribo, por sua extremidade superior f, um fio de cobre ef, cuja extremidade inferior, e, está igualmente soldada a um plano de cobre DCR, muito largo e bem leve. Esse plano vertical DCR é submerso em um recipiente VA preenchido com água, de maneira que a superfície da água esteja ao menos cinco ou seis linhas [1,13 ou 1,356 cm] acima do ápice e do plano. A resistência da água contra o plano é destinada a parar prontamente as oscilações da agulha sn. Porém, como acabamos de dizer, é necessário que o plano esteja totalmente mergulhado na água, já que de outra forma durante as oscilações da agulha a superfície da água, elevando-se desigualmente e aderindo à superfície do plano, poderia fazer variar a direção magnética da agulha.[847,848]

A *Figura 2* representa o aparelho que acabamos de descrever colocado na balança magné-

[845] Ver as páginas 195 e 297.

[846] Acrescentei na Figura 1 a letra P que não aparece na imagem original.

[847] [Nota de Coulomb:] No volume de 1785 da Academia forneci a descrição de uma bússola destinada a observar as variações diurnas [do magnetismo terrestre]; nessa Memória propus soldar um pequeno plano à agulha. Os motivos expostos aqui indicam que é necessário que esse pequeno plano seja soldado a um fio de cobre que esteja na mesma vertical que o fio de suspensão, e que além disso é necessário que o plano esteja totalmente submerso.

[848] Coulomb está se referindo aqui à Memória de 1777 publicada em 1780 e que está traduzida no Capítulo 5.

tica. Colocamos essa balança de maneira que seu lado *ab* esteja dirigido ao longo do meridiano magnético. A pequena fita 45, *o*, 45, traçada sobre o lado da balança perpendicularmente ao meridiano magnético, é a tangente de um círculo que teria seu centro no fio de suspensão, de maneira que um plano vertical, passando por esse fio de suspensão e o ponto *o*, no meio da tangente, representa o meridiano magnético, a tangente, *o*, 45, está dividida de acordo com os graus do círculo.[849] Para operar [a balança], inicialmente colocamos horizontalmente, no estribo *E*,[850] um fio de cobre, e estando o micrômetro sobre o ponto *o*, nos certificamos de que, sendo nula a torção [do fio de suspensão], o fio de cobre se dirige ao longo do meridiano magnético. Demos em nossas Memórias para o ano de 1787 os métodos que tornam bem fácil essa operação. Quando a balança está disposta dessa maneira, substituímos a agulha de cobre por uma agulha imantada. Em seguida, por meio do micrômetro de torção, afastamos essa agulha de 20° a 30° do meridiano, e observamos a força de torção necessária para manter a agulha a uma tal distância. Quando em seguida quisermos comparar a força diretriz dessa agulha com a força diretriz de uma outra agulha, colocamos essa segunda agulha no lugar da primeira agulha, e tomamos o cuidado de afastar a segunda agulha do meridiano magnético precisamente pela mesma quantidade de graus que afastamos a primeira agulha. Resulta disso que as duas agulhas, formando nas duas experiências o mesmo ângulo com o meridiano magnético, a força de torção medirá necessariamente os *momentos* de suas forças diretrizes.[851] No caso em que os ângulos de direção com o meridiano magnético não são os mesmos nas duas experiências, é fácil de avaliá-los pelo cálculo, de acordo com os princípios da Primeira Seção.[852]

É necessário alertar que, nas experiências, para dar precisão aos resultados, é preciso adequar a força de torção dos fios de suspensão à força magnética[853] das agulhas, de maneira que ao afastar as agulhas a 30° de seu meridiano, a força de torção dos fios de suspensão que mantém a agulha a essa distância, seja sempre de ao menos 25° a 30°. Foi para estar de acordo com essa observação que algumas vezes utilizei o fio de cobre de cravo,[854] tal como aqueles que encontramos à venda sob números diferentes no comércio, e algumas vezes usei fios de prata. Nas agulhas que possuem um magnetismo muito fraco, quando o fio de prata me daria uma torção de apenas 2° ou 3°, suspendia as agulhas em um fio de seda muito fino e, ao contar o número de oscilações que elas realizavam em um tempo dado, calculava suas forças diretrizes, por meio das fórmulas do movimento oscilatório que detalhei na *Memória citada, nono volume dos Savans étrangers*.[855]

[849]Os pontos 45 e *o* não estão marcados na Figura original de Coulomb. Introduzi esses pontos na Figura representando-os pelos números 45 e 0, sendo que eles indicam os ângulos 45° e 0°. Ver ainda a Nota de rodapé 617 na página 301.

[850]A letra *E* não aparece na imagem original. Coulomb está referindo-se aqui ao estribo 1234 da Figura 1.

[851]No original: "la force de torsion mesurera nécessairement les *momentum* de leurs forces directrices". A palavra "momentum" aqui pode ser entendida como torque ou momento. No título da próxima Seção Coulomb vai utilizar explicitamente a expressão "momentum magnétique", ver a Seção 22.4. Um dos objetivos de Coulomb nesse trabalho é o de determinar o torque magnético exercido pela Terra sobre uma agulha cilíndrica imantada, em função do comprimento e da espessura da agulha. O procedimento experimental de Coulomb foi ilustrado na Seção 13.1.

[852]Isto é, mesmo quando duas agulhas imantadas estão afastadas de ângulos diferentes em relação ao meridiano magnético, é fácil comparar seus momentos magnéticos utilizando os princípios apresentados na Primeira Seção.

[853]No original: *force aimantaire*.

[854]No original: *clavecin*. Ver a Nota de rodapé 290 na página 153. Coulomb está referindo-se aqui ao fio de suspensão da agulha imantada.

[855][Coulomb, 1780]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 5.

22.3 III

É fácil de determinar a razão entre as forças de torção de dois fios de suspensão que possuem forças desiguais, seja pelas fórmulas e pelas experiências que demos no volume de 1784 da Academia,[856] ou ainda mais simplesmente ao suspender sucessivamente em uma posição horizontal a mesma agulha imantada nos dois fios, por meio do micrômetro de torção. Afinal, se afastarmos por meio das duas suspensões a agulha imantada a uma mesma distância [angular] de seu meridiano, [a razão entre] os ângulos de torção necessários para torcer os dois fios mede necessariamente a razão entre suas forças de torção, já que os dois fios mantêm a esse grau de torção a mesma agulha imantada à mesma distância [angular] de seu meridiano.

Nas experiências apresentadas a seguir utilizei principalmente para as suspensões um fio de cobre vendido como número 12 no comércio, o mais fino que encontramos, e um fio de prata muito mais fino e cuja força de torção, para o mesmo comprimento [que o fio anterior], é de apenas a trigésima parte do fio de cobre. Porém todas as experiências, quaisquer que sejam os tipos de suspensão que tenhamos utilizado, foram levadas pelo cálculo às medidas que teriam ocorrido com um mesmo fio de cobre vendido como número 12 no comércio, com 14 polegadas de comprimento (37,89 cm). Cada pé de comprimento desse fio pesa 0,83 grãos.[857,858]

22.4 IV. *Comparação dos Momentos Magnéticos de Diferentes Agulhas de Aço com o Mesmo Diâmetro e de Comprimentos Diferentes*

22.4.1 Primeira Experiência

Fio de aço com cada pé pesando 38 grãos ($6,21$ *g por metro).*

O fio de aço que utilizamos nessa experiência, assim como em todas as outras que vão a seguir, é [obtido] do fio de aço da Inglaterra, passado no canal de uma fieira[859] e, consequentemente, tendo um diâmetro igual ao longo de todo o seu comprimento.

Colocamos uma agulha imantada até a saturação no estribo de suspensão, ao longo de uma marca direcionada para o meridiano magnético. Em seguida torcemos, em todos os testes, o fio de suspensão até que a direção da agulha faça um ângulo de 30° com o meridiano magnético; observamos o ângulo de torção. Em seguida cortamos a agulha de aço sucessivamente em comprimentos diferentes, a cada vez imantando-a até a saturação, observando, para cada agulha, o ângulo de torção que as mantém a 30° de seu meridiano.[860]

Nessa experiência utilizamos como suspensão um fio de prata bem fino e cuja força de torção era apenas a trigésima [parte da força de torção] do fio de cobre número 12. Porém,

[856][Coulomb, 1787]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 7.

[857][Nota de Potier:] Um grau de torção corresponde a um par de forças de 0,504 (C.G.S.).

[858]A densidade linear desse fio de cobre é de 0,83 grãos/pé $= (0,83 \times 0,05311\ g)/(0,3248\ m) = 0,136\ g/m$. De acordo com Potier, temos que é necessário um torque de $0,504\ dina \cdot cm$ devido a esse par de forças para girar de um ângulo de 1° o fio de cobre com 37,89 cm de comprimento. Ver ainda as Notas de rodapé 310 e 311.

[859]Ver a Nota de rodapé 330 na página 172.

[860]O procedimento experimental de Coulomb foi ilustrado na Seção 13.1.

ao dividir por 30 o ângulo de torção encontrado pela experiência, reduzimos os resultados aos números de graus que teriam sido observados se tivéssemos utilizado o fio de cobre número 12. É bom avisar ainda que essa redução ocorreu em todas as experiências que vão a seguir, sendo que encontramos:

Primeiro teste. Sendo o comprimento do fio de aço imantado de 12 polegadas (32,48 cm), foi necessário, para mantê-lo a 30° de seu meridiano, uma força de torção de $11,50°$.
Segundo teste. Com um fio de aço de 9 polegadas de comprimento ... $8,50°$.[861]
Terceiro teste. Com um fio de aço de 6 polegadas ... $5,30°$.
Quarto teste. Com um fio de aço de 3 polegadas ... $2,30°$.
Quinto teste. Com um fio de aço de 2 polegadas ... $1,30°$.
Sexto teste. Com um fio de aço de 1 polegada ... $0,35°$.
Sétimo teste. Com um fio de aço de 1/2 polegada ... $0,07°$.
Oitavo teste. Com um fio de aço de 1/4 de polegada ... $0,02°$.

22.5 V. Segunda Experiência

Fio de aço pesando 865 grãos para cada pé de comprimento ($141,52$ *g por metro), ou tendo aproximadamente 2 linhas (0,45 cm) de diâmetro.*

Primeiro teste. Sendo de 18 polegadas (48,72 cm) o comprimento do fio de aço imantado até a saturação, foi necessário, para mantê-lo a 30° de seu meridiano, uma força de torção de $288,00°$.
Segundo teste. Para um comprimento de 12 polegadas ... $172,00°$.
Terceiro teste. Para um comprimento de 9 polegadas ... $115,00°$.
Quarto teste. Para um comprimento de 6 polegadas ... $59,00°$.
Quinto teste. Para um comprimento de $4\frac{1}{2}$ polegadas ... $34,00°$.
Sexto teste. Para um comprimento de 3 polegadas ... $13,00°$.
Sétimo teste. Para um comprimento de $1\frac{1}{2}$ polegada ... $3,00°$.
Oitavo teste. Para um comprimento de 1 polegada ... $1,46°$.
Nono teste. Para um comprimento de 1/2 polegada ... $0,32°$.

22.6 VI. *Resultados Dessas Duas Experiências*

Na primeira experiência encontramos que ao afastar a agulha de aço, cujos 12 polegadas de comprimento pesavam 38 grãos, a 30° do meridiano magnético, a força de torção que a trazia de volta a esse meridiano era medida por $11,50°$; e que, para um comprimento de 9 polegadas, essa força de torção era medida por $8,50°$; assim, nesses dois testes, a diminuição da força diretriz foi de 3°, ou de 1° por polegada. Ao continuar essa operação, encontramos que de 9 polegadas para 6 polegadas a diminuição da força diretriz foi de $3,2°$, ainda muito próximo de 1° por polegada; de 6 polegadas para 3 polegadas, a diminuição foi ainda de 3°; e de 3 polegadas a 1 polegada ela foi de 2°, isto é, sempre de 1° por polegada de diminuição. De onde é fácil concluir que, até que a agulha pesando 38 grãos seja reduzida a 1 polegada de comprimento, encontramos uma razão constante entre as quantidades pelas quais as

[861]As reticências indicam aqui tudo o mais como no teste anterior. Em particular, os fios de aço imantados vão sempre ser mantidos a 30° do meridiano magnético.

agulhas são diminuídas e as quantidades pelas quais diminuem as forças diretrizes. Porém, ao comparar os comprimentos da mesma agulha abaixo de 1 polegada, parece, de acordo com essa primeira experiência, que os *momentos [magnéticos]*, desde 1 polegada até 1/4 de polegada, são aproximadamente como o quadrado dos comprimentos das agulhas.

Na segunda experiência encontramos um resultado análogo a esse da primeira. Pois, ao comparar nessa experiência o primeiro teste com o segundo, encontramos que uma diminuição de 6 polegadas na agulha de 18 polegadas de comprimento produziu no *momento* da força diretriz uma diminuição de 116°, ou de $19\frac{1}{3}$ de grau por polegada.

Em seguida ao reduzir essa mesma agulha de 12 polegadas a 6 polegadas, ainda encontraremos no *momento* uma diminuição de 19° por polegada; porém, de 6 polegadas de comprimento a $4\frac{1}{2}$ polegadas, o *momento* da força diretriz diminui apenas de $16,6°$ por polegada. Abaixo de $4\frac{1}{2}$ polegadas até 1/2 polegada, parece que os *momentos* seguem aproximadamente o quadrado dos comprimentos das agulhas. De maneira que podemos, sem grande erro, supor nessa segunda experiência que o *momento* das agulhas de aço de 2 linhas (0,45 cm) de diâmetro, desde 0 polegada até a 5 polegadas (13,53 cm) de comprimento, são aproximadamente como o quadrado de seus comprimentos; e que para um comprimento maior da agulha, os crescimentos dos *momentos* são aproximadamente proporcionais aos crescimentos dos comprimentos. Digo aproximadamente pois quando as agulhas são imantadas até a saturação, encontramos que os crescimentos dos momentos são quase sempre um pouco maiores que os crescimentos dos comprimentos, mas essa variação é geralmente muito pequena para ser apreciada por experiências do tipo das duas experiências anteriores.

22.7 VII. *O Momento da Força Diretriz das Agulhas em Relação a Seus Diâmetros*

Acabamos de ver a marcha que seguem os *momentos* das forças diretrizes de duas agulhas de diferentes comprimentos, mas de mesmo diâmetro. Agora buscamos determinar as razões dos *momentos* da força diretriz de duas agulhas imantadas até a saturação tendo diâmetros diferentes. Porém devo começar avisando que no decorrer das experiências logo reconheci que era quase impossível de obter duas agulhas de aço de diâmetros diferentes que tivessem exatamente o mesmo grau de elasticidade[862] e que fossem de uma natureza homogênea. Assim, para obter as leis do magnetismo nas agulhas de diâmetros diferentes, fui obrigado a formar feixes de agulhas muito finas e obtidas do mesmo fio. O que facilitou muito essa operação foi que, ao torcer ao redor de seu eixo um fio de ferro com um diâmetro aproximado de meia linha [0,113 cm], tal como aquele que encontramos no comércio, percebi que por essa torção ele adquiria encruamento e elasticidade,[863] e que ele era suscetível quase que ao mesmo grau de magnetismo que um fio de aço de mesmo diâmetro. Após essa observação, escolhi um fio de ferro bem puro, tal como aquele que sai da fieira antes de ser recozido. Ele tinha aproximadamente 120 pés de comprimento [39 m]. Cortei-o em partes diferentes, as quais torci ao redor de seus eixos segurando-as para endireitá-las em um estado de tensão. Formei feixes de diâmetros diferentes e de comprimentos diferentes, os quais imantei até a saturação. Em seguida colocando esses feixes na balança magnética, resultou de um grande número de experiências, das quais vamos relatar algumas, que no caso de duas agulhas de mesma

[862] No original: "degré de ressort".
[863] Ver a Nota de rodapé 319 na página 163.

natureza, e cujas dimensões são semelhantes,[864] os *momentos* das forças diretrizes estão entre si como o cubo das dimensões semelhantes. Caso, por exemplo, considere uma agulha [cilíndrica] com uma linha de diâmetro e 6 polegadas de comprimento, e uma outra agulha com 2 linhas de diâmetro e 12 polegadas de comprimento, cujas dimensões semelhantes estão, consequentemente, como 1 : 2, os momentos magnéticos dessas duas agulhas, com ambas imantadas até a saturação, estarão entre si assim como 1 está para 8, [ou seja, na] razão dos cubos de suas dimensões semelhantes.

22.8 VIII. Terceira Experiência

Torcemos ao redor de seus eixos 36 fios de ferro com um pé (32,48 cm) de comprimento, pesando 48 grãos (2,55 g) cada um. Formamos um feixe dessas 36 agulhas reunidas e amarradas com uma linha; imantamos esse feixe até a saturação. Em seguida, ao suspendê-lo horizontalmente no estribo da balança magnética, encontramos que era necessário um ângulo de torção de 342° para manter esse feixe a 30° do meridiano magnético.

22.9 IX. Quarta Experiência

Formamos um segundo feixe com 9 agulhas tendo cada uma 6 polegadas (16,24 cm) de comprimento, mas de mesma natureza e de mesmo diâmetro que aquelas que utilizamos na experiência anterior. Encontramos que para manter esse feixe a 30° do meridiano magnético, foi necessário uma força de torção de 42°.

22.10 X. *Resultado das Duas Experiências Anteriores*

Nas duas experiências anteriores utilizamos um fio de ferro como aquele que sai da fieira, o mais puro que pudemos encontrar. Todas as agulhas foram cortadas da mesma peça. Portanto, estamos certos de que eram da mesma natureza e do mesmo diâmetro, mas os dois feixes tinhas seus lados semelhantes proporcionais na razão de 2 para 1, estando os diâmetros como a raiz quadrada do número de agulhas: assim os cubos dos diâmetros estão entre si como 8 : 1. Porém acabamos de encontrar que os *momentos* das forças diretrizes de dois feixes estão [entre si] como 342 : 42 :: 8,14 : 1,00, razão essa que difere muito pouco da razão de 8 para 1, ou da [razão entre] a massa dos dois corpos. Repetimos as duas experiências anteriores com feixes cujos dimensões semelhantes estavam como 3 para 1, e como 4 para 1; e sempre encontramos o mesmo resultado, isto é, as forças diretrizes proporcionais aos cubos dos diâmetros dos dois feixes.[865]

[864]No original: *homologues*. A expressão "dimensões semelhantes" deve ser entendida aqui no sentido de semelhança das figuras geométricas, isto é, com o mesmo grau de proporcionalidade em todas as direções ou em todos os segmentos. A palavra "homologue" em francês também pode ser traduzida por homólogo, similar ou equivalente.

[865]Ou seja, o torque magnético exercido pela Terra sobre uma agulha imantada até a saturação é proporcional ao volume da agulha.

22.11 XI. *Observação*

O resultado anterior, que nos ensinou que os momentos da força diretriz de duas agulhas cujas dimensões são semelhantes estavam como o cubo dessas dimensões, juntamente com o primeiro resultado para as agulhas de mesmo diâmetro, mas de comprimentos diferentes, que nos fez conhecer que, desde que as agulhas tivessem comprimentos 40 a 50 vezes maiores que seus diâmetros, os momentos da força diretriz cresciam em seguida proporcionalmente ao aumento dos comprimentos, podem fornecer imediatamente o *momento* magnético de todos os fios de aço, de uma mesma natureza e com o mesmo grau de têmpera, de um diâmetro e de um comprimento qualquer, desde que conheçamos o *momento* da força diretriz de uma só dessas agulhas, assim como [pode fornecer] o crescimento de seu *momento* em relação ao crescimento de seu comprimento.

Suponho, por exemplo, que queremos determinar o *momento* da força diretriz de uma agulha de 48 polegadas de comprimento e 6 linhas de diâmetro, mas feita com o mesmo aço e com o mesmo grau de têmpera que a agulha da segunda experiência. A questão consiste em buscar na segunda experiência o comprimento de uma agulha com 2 linhas de diâmetro que teria as dimensões semelhantes com aquela de 48 polegadas de comprimento e 6 linhas de diâmetro. Encontraríamos que a agulha com 2 linhas de diâmetro teria 16 polegadas de comprimento. Porém encontramos na segunda experiência que o *momento* magnético de uma agulha com 2 linhas de diâmetro e 16 polegadas de comprimento teria por medida 250°, e como as dimensões semelhantes das duas agulhas que queremos comparar estão entre si como 3 está para 1, seus cubos são :: 27 para 1, de maneira que o *momento* da força diretriz da agulha com 6 linhas de diâmetro e 48 polegadas de comprimento seria representada por $250° \times 27 = 6750°$.

22.12 XII. *Sobre a Ação de Diferentes Pontos de uma Agulha Imantada, Dependendo se Esses Pontos Estão Mais ou Menos Afastados da Extremidade da Agulha*

As experiências anteriores e aquelas que apresentamos em 1785 nas Memórias da Academia,[866] são suficientes para provar que nos fios de aço em que o diâmetro é pequeno em relação ao comprimento, os sinais de ação do fluido magnético estão concentrados perto das extremidades. A primeira experiência e a segunda provam até que, como veremos logo em seguida, qualquer que seja o comprimento dos fios de aço, desde que eles tenham ao menos 40 a 50 vezes o comprimento de seus diâmetros, a curva que representa a ação magnética de cada ponto de uma agulha é a mesma, qualquer que seja o comprimento do fio de aço, e que ela estende-se aproximadamente desde a extremidade das agulhas até a uma distância dessas extremidades igual a 25 diâmetros; que desse ponto até o meio da agulha, a ação é muito pequena, ou que as ordenadas da curva que exprime essa ação quase que se confundem com o eixo da agulha.

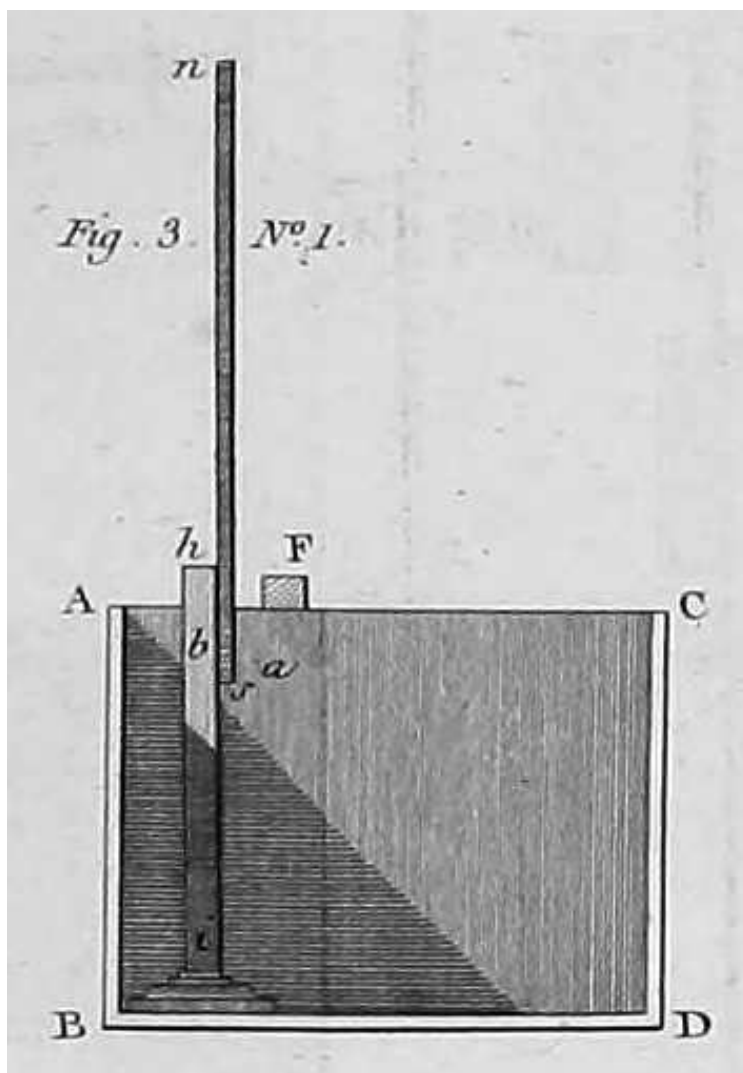
Tentei confirmar esse resultado por experiências diretas ao determinar a lei que segue a ação magnética de diferentes pontos de um fio imantado até a saturação,[867] desde sua

[866][Coulomb, 1787]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

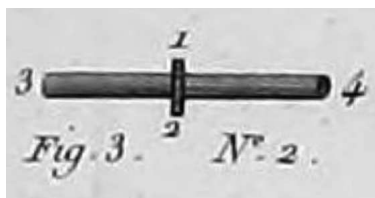
[867]Por um lapso do original aparece aqui "de uma agulha imantada até a saturação". Nas próximas Seções Coulomb vai estudar a densidade magnética ao longo de um fio imantado até a saturação.

extremidade até o meio do fio.[868] Podemos perceber que para o sucesso de uma experiência desse tipo, é necessário dispor os testes de maneira que ao apresentar um fio de aço a uma agulha muito curta, exista apenas uma parte muito pequena do fio cuja ação sobre a agulha seja considerável, a fim de poder concluir daí a densidade magnética do ponto do fio que está sendo apresentado à agulha.

22.13 XIII

Em uma caixa cuja seção está representada por *ABCD*, *Figura 3, Número 1*, suspendi na travessa F uma pequena agulha de aço, com 2 linhas (0,45 cm) de comprimento e um quarto de linha de diâmetro [0,0565 cm].

Abaixo dessa agulha fixei em ângulo reto, com um pouco de cera, um pequeno cilindro de cobre vermelho com 2 linhas de diâmetro [0,452 cm] e 1 polegada (2,71 cm) de comprimento, estando tudo suspenso horizontalmente por um fio de seda com uma polegada de comprimento, tal como ele sai do casulo; provei em outro lugar que a força de torção de um fio

[868]No original aparece aqui "até o meio da agulha".

semelhante era quase nula. A agulha e o cilindro de cobre são representados em perspectiva vista do topo na *Figura 3, Número 2*; [na qual] 1, 2 representa a agulha de aço,[869] enquanto que 3, 4 representa o cilindro de cobre.[870]

Colocamos em seguida na caixa, *Figura 3, Número 1*, a 3 ou 4 linhas da agulha a, uma régua vertical hi; ao longo dessa régua movemos verticalmente no meridiano magnético da agulha a um fio de aço imantado até a saturação, com uma ou duas linhas de diâmetro [0,226 ou 0,452 cm], de tal maneira que o ponto b do eixo desse fio esteja apenas a duas ou três linhas de distância dela.[871]

Quando queremos determinar a ação magnética do ponto b, inicialmente fazemos a agulha a oscilar, antes de lhe apresentar o fio de aço ns;[872] contamos o número de oscilações que essa agulha realiza em virtude apenas do globo terrestre. Em seguida colocamos a extremidade s do fio de aço imantado em b, na altura da agulha a; contamos nessa posição o número de oscilações realizadas pela agulha a em 60 segundos; baixamos sucessivamente a extremidade s do fio de aço, de seis em seis linhas [1,356 cm], e a cada vez contamos o número de oscilações realizadas pela agulha em 60 segundos.

22.14 XIV

A partir desse procedimento, resulta que caso a agulha a sempre permaneça no mesmo estado de magnetismo,[873] encontrando-se o ponto b do fio de aço apenas a três linhas de distância dessa agulha, só haveria no fio os pontos vizinhos ao ponto b cuja ação sobre a agulha a seria considerável, já que a ação dos outros pontos decomposta ao longo de uma direção horizontal diminui, para uma densidade igual, em razão [inversa] do quadrado das distâncias e da obliquidade de suas ações. Assim, ao deslizar sucessivamente os diferentes pontos b do fio[874] ao longo da régua hi, resultaria que a ação dos diferentes pontos b do fio[875] seria aproximadamente proporcional ao quadrado do número de oscilações feitas pela agulha a em um tempo constante.[876]

[869]Por um lapso no original aparece aqui que 1, 2 representa o fio de aço.

[870]Ver ainda a Figura 3, Número 3, na página 437.

[871]Ou seja, o ponto b no eixo do fio está a essa distância do centro da agulha imantada, ver a Figura 3, Número 3, na página 437.

[872]Acrescentei a letra s na Figura 3, Número 3, ver a página 437. Essa letra não aparece na imagem original.

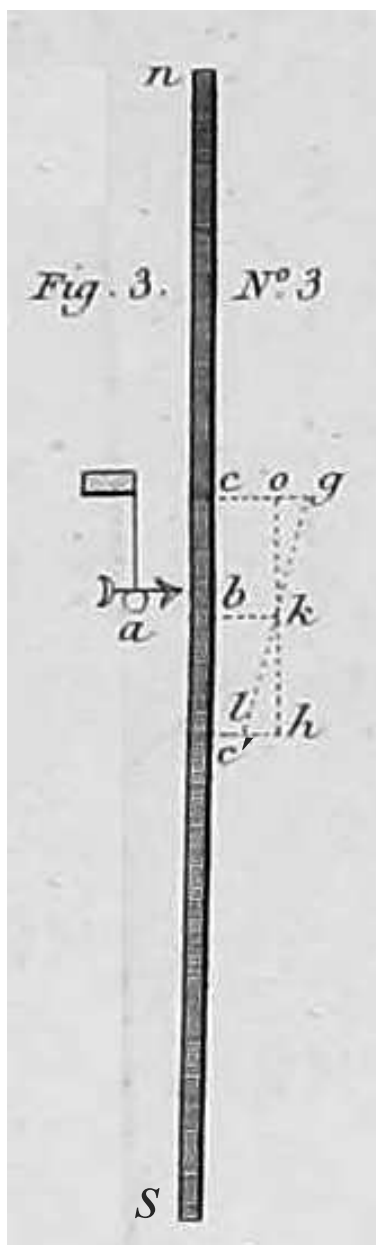
[873]Ou seja, se ela mantiver a mesma imantação durante todo o decorrer da experiência.

[874]Por um lapso do original aparece aqui "aiguille" em vez de "fil". Certamente Coulomb estava se referindo aos pontos b do fio de aço ns da Figura 3, Número 1.

[875]Novamente aparece aqui "aiguille" em vez de "fil".

[876]Ver a Nota de rodapé 444 na página 222.

22.15 XV

A *Figura 3, Número 3* pode servir para demonstrar a afirmação anterior.

Nessa Figura ns representa o fio de aço cujo eixo no ponto b é colocado a 3 ou 4 linhas do centro da pequena agulha a. Se considerarmos acima e abaixo do ponto b duas porções de fio bc e bc' muito pequenas em relação ao comprimento total do fio, a densidade magnética dessa porção cc' pode ser representada, sem erro perceptível, por uma linha reta gkl; de maneira que gc será a densidade do ponto c; [a porção] kb será a densidade do ponto b; e lc' será a densidade do ponto c'. Se traçarmos agora pelo ponto k uma linha okh paralela ao eixo do fio de aço ns, o triângulo gko, sendo igual ao triângulo khl, resulta disso que a ação da porção cc' do fio de aço ns sobre a agulha a, sendo decomposta em uma direção horizontal, é a mesma que no caso em que a densidade magnética fosse uniforme e igual a bk desde c até c', o que representa a densidade do ponto médio b. Contudo veremos pelas

próximas experiências que os resultados encontrados pelo procedimento que acabamos de indicar exigem uma correção, já que o estado magnético de uma agulha *a*, cujas dimensões são muito pequenas e tais como aquelas de nossa experiência, muda na medida em que os pontos *b* que lhe apresentamos estão mais ou menos imantados.[877]

22.16 XVI. Quinta Experiência

Fio de aço com 2 linhas (0,45 cm) de diâmetro e 27 polegadas (73,08 cm) de comprimento.

Pegamos um fio de um aço excelente com 2 linhas de diâmetro e 27 polegadas de comprimento, com a mesma espessura e a mesma natureza que o fio de nossa segunda experiência; ele foi imantado até a saturação pelo método que iremos prescrever no fim dessa Memória. Tendo colocado, assim como foi indicado nas duas Seções anteriores e pela *Figura 3*, [o eixo do fio] a 3 linhas de distância [0,678 cm] da pequena agulha *a*, que tem 2 linhas de comprimento e um quarto de linha de diâmetro, fizemos com que ele descesse verticalmente de 6 em 6 linhas, observando a cada vez o número de oscilações da agulha *a*.

Primeiro teste. A agulha *a*, antes que lhe fosse apresentado o fio de aço, realizava aproximadamente 1 oscilação em 60".[878]

Segundo teste. Ao colocar a extremidade *s* do fio de aço no nível da agulha *a*, essa agulha realizava 64 oscilações em 60".

Terceiro teste. A extremidade *s* abaixada de 6 linhas, a agulha *a* realizava 58 oscilações em 60".

Quarto teste. A extremidade *s* abaixada de uma polegada, a agulha *a* realizava 44 oscilações em 60".

Quinto teste. A extremidade *s* abaixada de 2 polegadas, a agulha *a* realizava 18 oscilações em 60".

Sexto teste. A extremidade *s* abaixada de 3 polegadas, a agulha *a* realizava 12 oscilações em 60".

Sétimo teste. A extremidade *s* abaixada de 4 polegadas e meia, a agulha *a* realizava uma ou duas oscilações em 60".

Ocorre o mesmo [que no sétimo teste] até que tenhamos abaixado a extremidade *s* do fio de aço até um pouco além de 22 polegadas, isto é, até a 4 polegadas e meia (12,18 cm) da outra extremidade *n*; nesse caso a agulha *a* inverte seus polos ao mudar de posição de ponta a ponta, e ela realiza próximo dessa segunda extremidade e nos pontos correspondentes aproximadamente o mesmo número de oscilações que na outra extremidade.

22.17 XVII. Sexta Experiência

Fio de aço com 2 linhas de diâmetro [0,452 cm] e 10 polegadas (27,07 cm) de comprimento.

[877]Ou seja, Coulomb vai mostrar que a magnetização da agulha pode ser afetada pela presença do fio imantado *ns* colocado nas proximidades da agulha.

[878]Isto é, 60 segundos.

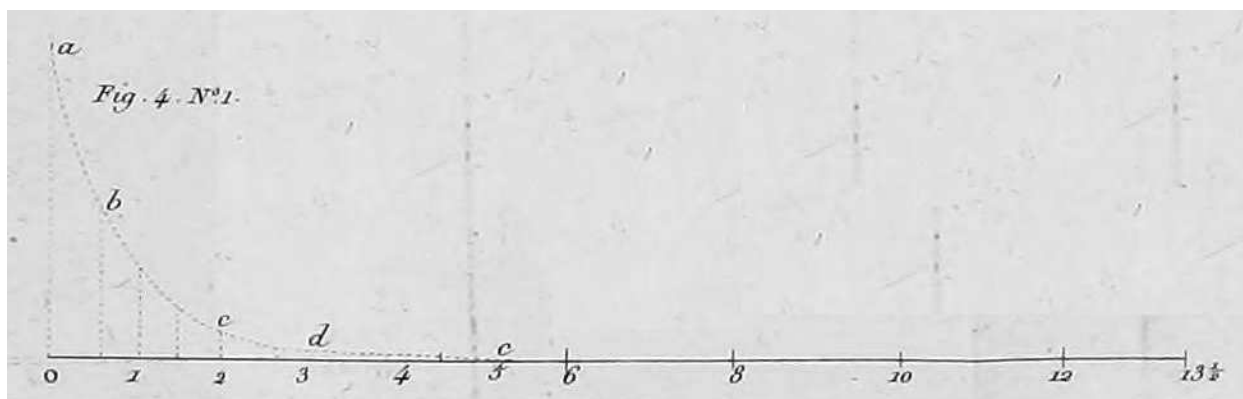
Ao apresentar para a agulha *a*, na mesma distância que na experiência anterior, um fio de aço de mesma natureza e do mesmo diâmetro, mas tendo somente 10 polegadas de comprimento, encontramos que as três primeiras polegadas de cada extremidade do fio de 10 polegadas fornecem quase que exatamente a mesma ação que as três últimas polegadas das extremidades do fio de 27 polegadas, como detalhado na experiência anterior.

22.18 XVIII. Sétima Experiência

Fio de aço com 5 polegadas (13,53 cm) de comprimento e 2 linhas [0,452 cm] de diâmetro.

Enfim, ao utilizar um fio de aço com 5 polegadas de comprimento, mas do mesmo diâmetro que o anterior, ainda encontramos nas extremidades desse fio, e até mesmo a cinco ou seis linhas [1,13 ou 1,356 cm] dessas extremidades, aproximadamente, os mesmos graus de ação que na extremidade dos fios[879] das duas experiências anteriores.

22.19 XIX. *Primeira Observação*

A ação que faz a agulha oscilar é medida, como sabemos, pelo quadrado do número de oscilações realizadas no mesmo tempo.[880] Tracei de acordo com essa consideração, *Figura 4, [Número 1]*, ao considerar o quadrado do número de oscilações, a curva *abcde* que representa o lugar geométrico das densidades ou das ações magnéticas de todos os pontos da metade de uma agulha[881] de 27 polegadas de comprimento [73,1 cm] e 2 linhas de diâmetro [0,45 cm].

Nessa *Figura*, [o segmento entre] 0 e $13\frac{1}{2}$ representa a metade do comprimento da agulha, enquanto que as ordenadas representam as densidades magnéticas. Como vemos, essas ordenadas diminuem rapidamente e são aproximadamente nulas perto da quinta polegada. Além desse ponto a curva das densidades se confunde com o eixo até a vigésima segunda polegada, e sobre as cinco polegadas da outra extremidade, elas seguem aproximadamente a mesma lei, mas em um sentido contrário; de maneira que se a primeira extremidade tem uma densidade positiva, ou cuja ação, sobre um polo de mesma natureza, seja repulsiva, a ação da outra

[879]Por um lapso no original aparece aqui "das agulhas" em vez de "dos fios".

[880]Ver a Nota de rodapé 444 na página 222.

[881]Daqui para a frente quando Coulomb estiver utilizando a palavra "agulha", deve-se entendê-la como sendo o fio imantado do qual Coulomb estudou como varia sua densidade magnética ao longo de seu comprimento.

extremidade sobre o mesmo polo será atrativa. Na *Figura 4, [Número 1]*, na extremidade da agulha em O já dobramos o número que representa o quadrado das oscilações. É fácil de ver, de acordo com o método da Seção 22.15, que o verdadeiro valor dessa densidade deve ser ainda maior, já que nesse ponto, pela posição da agulha, sendo o ponto b (*Figura 3, Número 1*) a extremidade do fio[882] só existe ação de um dos lados de b, e não dos dois lados, como [ocorre] em todos os outros testes. Além disso, a densidade vai diminuindo desde o ponto b, quando b é a extremidade do fio. Para poder comparar o resultado do quadrado das oscilações nesse caso com os outros testes, seria necessário, de acordo com as observações da Seção 22.14, que a densidade fosse uniforme, já que não existe nesse caso compensação de um lado pelo outro.

22.20 XX. *Segunda Observação*

Tiramos essa consequência interessante da sexta experiência, a saber, que a curva, *Figura 4, [Número 1]*, que representa nas duas extremidades de nosso fio de aço a densidade ou a ação magnética de cada ponto desse fio, é exatamente a mesma, qualquer que seja o comprimento dos fios, desde que eles tenham mais de 8 ou 9 polegadas de comprimento [21,66 ou 24,36 cm]. Ainda não podemos concluir disso que quando medimos em relação ao meridiano magnético o *momento* da força diretriz de diferentes agulhas de aço[883] tendo comprimentos diferentes mas de mesma natureza e de mesma espessura, que esses *momentos* devam diferir entre si de uma quantidade proporcional à diminuição dos comprimentos das agulhas; já que, como o *momento* da força diretriz de cada agulha será igual à área que representa a soma das densidades magnéticas multiplicada pela distância do centro de gravidade dessa área até o meio do fio, que é o ponto de suspensão, e que além disso a área das densidades, assim como suas dimensões, são as mesmas, quaisquer que sejam os comprimentos das agulhas. É claro que o *momento* da força diretriz do globo terrestre, para cada agulha, será representado por essa área, multiplicada pela distância de seu centro de gravidade localizado no meio da agulha. Porém, como a distância desse centro de gravidade até a extremidade da agulha é constante, qualquer que seja o comprimento das agulhas, resulta disso que o *momento* das agulhas será medido por uma quantidade constante, [quantidade essa] que exprime a área das densidades multiplicada pelo comprimento da agulha, menos a quantidade constante que representa a distância do centro de gravidade da área das densidades até a extremidade da agulha. Esse resultado encontra-se exatamente de acordo com o resultado que encontramos na primeira e na segunda experiência, ao buscar o *momento* magnético de várias agulhas de mesmo diâmetro e comprimentos diferentes; já que, de acordo com essas duas experiências, vimos que os momentos da força diretriz crescem proporcionalmente ao crescimento dos comprimentos das agulhas. Isso deve ocorrer necessariamente já que, cortando uma agulha e imantando-a até a saturação, sendo a mesma para agulhas de diferentes comprimentos a curva que representa a área das densidades magnéticas, o centro de gravidade dessa área aproxima-se do meio da agulha da metade da parte de seu comprimento que cortamos e, consequentemente, a diminuição do *momento* é proporcional a essa parte cortada.

[882]Por um lapso no original aparece aqui "aiguille" em vez de "fil". Coulomb está discutindo aqui a situação em que o ponto b, que está na mesma altura que a pequena agulha a, corresponde à extremidade inferior do fio imantado vertical ns da Figura 3, Número 1.

[883]Novamente deve-se entender essas "diferentes agulhas de aço" como sendo "diferentes fios de aço".

22.21 XXI. [*Terceira Observação*]

De acordo com a observação anterior, é fácil, por meio da primeira e da segunda experiência que utilizamos para conhecer a lei do *momento* da força diretriz de diferentes agulhas de uma mesma natureza e de mesma espessura, mas de comprimentos diferentes, de determinar o local do centro de ação ou, o que dá no mesmo, o centro de gravidade da curva das densidades magnéticas dessas agulhas.[884]

Consideremos inicialmente como exemplo a agulha utilizada na primeira experiência. Cada pé de comprimento dessa agulha pesa 38 grãos. Encontramos, Seção 22.4, que quando essa agulha tinha 12 polegadas de comprimento, era necessário, para mantê-la a 30° de seu meridiano magnético, uma força de torção de $11,50°$, e quando ela tinha apenas 3 polegadas de comprimento, era necessário uma força de $2,30°$ para mantê-la à mesma distância [angular]. Porém, de acordo com as observações anteriores, a área das densidades, *Figura 4, [Número 1]*, é a mesma para todos os comprimentos de agulha com a mesma espessura, assim o centro de gravidade dessa área está à mesma distância das extremidades da agulha nessas duas experiências.

Seja A a superfície dessa área e x a distância do centro de gravidade dessa área até a extremidade da agulha, ao denominar l como sendo a metade do comprimento da agulha, teremos para seu *momento* magnético a quantidade[885]

$$2A(l-x)\,\text{sen}\,30°$$

e, ao considerar as duas quantidades encontradas na primeira experiência para o *momento* das forças diretrizes das duas agulhas de 12 polegadas e de 3 polegadas de comprimento, teremos as duas equações a seguir:

$$2A(6-x)\,\text{sen}\,30° = 11,50$$

e

$$2A(1,5-x)\,\text{sen}\,30° = 2,30\ .$$

Dividindo uma pela outra obtém-se:

$$x = 0,36\ \textit{polegadas}\ (0,974\ \textit{cm})\ .$$

Ao fazer a mesma operação para a agulha de aço da segunda experiência, na qual cada pé de comprimento pesa 865 grãos, obteremos a distância do centro de gravidade da área das densidades até a extremidade da agulha, [a saber,] $x' = 1,51$ polegadas (4,088 cm). Nessas duas experiências os diâmetros dos dois fios de aço estão entre si como as raízes [quadradas] dos pesos, assim eles estão entre si

$$::\sqrt{865}:\sqrt{38}::4,8:1,0\ ;$$

[884]No original: "le centre de gravité de la courbe des densités magnétiques de ces aiguilles".

[885]No original essa equação aparece da seguinte forma, [Coulomb, 1793, pág. 476]:

$$2A\,\text{sen}\,30^d(l-x)\ .$$

mas encontramos [a razão entre] a distância do centro de gravidade até as extremidades das agulhas :: 1,510 : 0,36 :: 4,2 : 1,0.[886] Logo parece, de acordo com esses resultados, que as distâncias do centro de ação magnética[887] de duas agulhas até a extremidade dessas agulhas estão aproximadamente entre elas assim como [a razão entre] os diâmetros dessas agulhas.

22.22 XXII. *Quarta Observação*

Apresenta-se aqui uma dificuldade que parece merecer alguma atenção. Acabamos de ver que a curva (*Figura 4, Número 1*) que representa a densidade magnética e que é colocada no final do fio de aço de 2 linhas de diâmetro, possui seu centro de gravidade aproximadamente a 1,5 polegada de sua extremidade. Vimos na quinta experiência que a densidade magnética dessa mesma agulha só se estende de uma maneira bem perceptível até a cinco polegadas, aproximadamente, da extremidade desse fio de aço. Ora, como 1,5 polegada é um terço de 4,5 polegadas, resultaria dessa comparação que a curva das densidades magnéticas teria seu centro de gravidade colocado quase à mesma distância de sua extremidade que no caso em que o formato dessa curva fosse aproximadamente uma linha reta. Contudo encontramos de acordo com a quinta experiência, *Figura 4, Número 1*, que essa curva é convexa do lado do eixo. Embora esses resultados não sejam contraditórios, é necessário observar que a quinta experiência nos indica apenas o ponto no qual a densidade magnética do fio de aço é pequena; já que ela só é igual a 0 no meio do fio de aço. Essa experiência também nos indica os pontos dos dois fios de aço imantados de mesma espessura nos quais a densidade magnética é a mesma. Porém, não podemos obter a lei exata das densidades magnéticas de todos os pontos do fio de aço dessa quinta experiência, já que ela fornece, para as intensas densidades [magnéticas] do ponto b, *Figura 3*, quantidades muito grandes em relação às pequenas densidades dos outros pontos da agulha; aqui vai o motivo disso:

Quando a agulha a, *Figura 3*, possui apenas uma ou duas linhas de comprimento, e menos de meia linha de diâmetro, como na quinta experiência, essa agulha, suspensa após ter sido imantada, oscilando livremente sem qualquer ação além daquela devida ao globo terrestre, fornece apenas sinais muito fracos de magnetismo. Porém quando apresentamos a ela, como fizemos na quinta experiência, o fio de aço ns a três linhas de distância [do centro da agulha], seu estado magnético aumenta na medida em que o ponto b do fio de aço está mais carregado de magnetismo:[888] de maneira que, de um teste para outro, a agulha a não permanece em um estado de magnetismo constante; esse estado muda na medida em que a ação do ponto b é maior ou menor. Disso resulta que nos testes sucessivos dessa quinta experiência a ação do ponto b sobre a agulha a não é proporcional à densidade magnética do ponto b, mas [essa ação ocorre] em uma razão composta dessa densidade e do estado magnético da agulha a. De maneira que, caso o estado magnético dessa agulha crescesse proporcionalmente à densidade magnética do ponto b, nesse caso a ação ou as ordenadas encontradas por nossa curva, *Figura 4, Número 1*, seriam como o quadrado das densidades do ponto b. Ou seja, caso essa suposição pudesse ser admitida, seria necessário que as ordenadas que representassem as densidades [magnéticas] fossem proporcionais apenas ao número das oscilações encontradas nos testes dessa quinta experiência.

[886]Ou seja, a razão entre o centro de gravidade até as extremidades das agulhas $= \frac{1,510}{0,36} = \frac{4,2}{1,0}$. Por um lapso no original apareceu aqui ":: 1,510 : 36 :: 4,2 : 1,0" em vez de ":: 1,510 : 0,36 :: 4,2 : 1,0".

[887]No original: *centre d'action magnétique*.

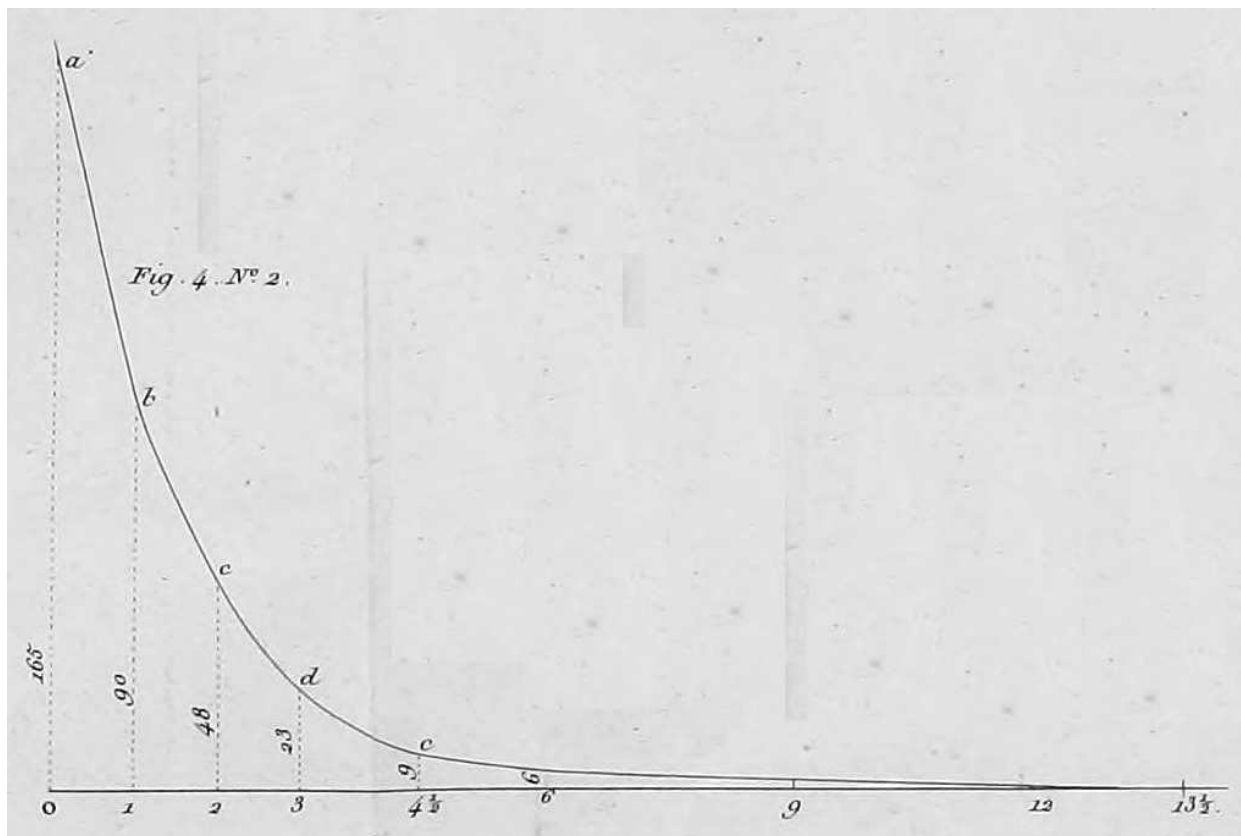
[888]Ou seja, quanto mais intensa for a magnetização do ponto b do fio de aço, maior será a imantação que ele produzirá na pequena agulha colocada em suas proximidades.

Uma experiência que prova de uma maneira convincente a variação do estado magnético da pequena agulha a durante esses testes é que se apresentarmos por um único instante a extremidade Sul, por exemplo, da agulha a colocada a uma ou duas linhas de distância da extremidade Sul do fio de aço ns, nesse caso devido à ação do fio ns, o polo Sul da agulha a torna-se durante um instante o polo Norte. Além disso, por esse procedimento essa pequena agulha encontra-se imantada até a saturação, o que é fácil de provar pelo número de oscilações que ela fará livremente,[889] seja após ter sido apresentada a duas linhas de distância do polo do fio de aço ns, seja após haver tocado o polo desse fio de aço ou mesmo um ímã mais forte, já que nos dois casos encontraremos que ela realiza o mesmo número de oscilações em um mesmo tempo.

22.23 XXIII. Oitava Experiência, *Destinada a Fornecer Resultados Mais Aproximados do que a Quinta Experiência*

Instruído pelas observações da Seção anterior, tentei determinar por uma nova experiência as densidades do fio ns de uma maneira mais aproximada do que pela quinta experiência da qual acabamos de fornecer os detalhes e os inconvenientes. Percebe-se que devo tentar substituir a agulha a, cujo estado magnético variava de um teste a outro, por uma outra agulha cuja resistência magnética fosse maior e, ao mesmo tempo, cuja ação magnética sobre os pontos b do fio de aço, *Figura 3*, não fossem muito consideráveis para alterar de uma maneira perceptível o estado [magnético] desse fio; já que, sendo recíproca a ação entre a agulha a e o fio ns, a alteração magnética é para ser temida igualmente dos dois lados.

Aqui vai como cheguei a um resultado aproximado, após vários testes para determinar as dimensões mais convenientes. No lugar da pequena agulha a, *Figura 3*, que, em nossa quinta experiência, tinha apenas duas linhas de comprimento e menos de meia linha de diâmetro, suspendi uma agulha de aço com 3 linhas (0,67 cm) de diâmetro e 6 linhas (1,35 cm) de comprimento. Coloquei o ponto b do fio de aço ns a 8 linhas (2,03 cm) de distância da extremidade da agulha a, e além disso segui todos os procedimentos da quinta experiência. Em seguida, ao calcular a ação dos diferentes pontos b do fio de aço ns sobre a agulha a, de acordo com o quadrado das oscilações, encontrei as densidades desse diferentes pontos como eles estão indicados na *Figura 4, Número 2*.

[889] Devido apenas ao magnetismo do globo terrestre.

Nessa Figura, a base entre 0 e $13\frac{1}{2}$ polegadas representa a metade do eixo da agulha;[890] as ordenadas representam as densidades magnéticas dos pontos correspondentes. A última ordenada $0a$ foi determinada ao fazer com que ba, em relação a bc, tivesse o mesmo ângulo que bc faz com cd. Essa última ordenada provavelmente deveria ser um pouco maior, mas as outras [ordenadas] se aproximam da verdade.

Resulta dessa experiência que a curva das densidades, *Figura 4*, Número 2, a partir da extremidade da agulha, aproxima-se rapidamente do eixo, já que em nossa experiência, a ordenada que representa a densidade do ponto colocado a quatro polegadas e meia da extremidade do fio, é ao menos dezoito vezes menor que a densidade dessa extremidade. Vemos ainda que, a partir desse ponto, a curva continua a se aproximar do eixo, que ela corta ao meio a agulha para formar, em um sentido oposto na outra extremidade da agulha, uma curva absolutamente similar à primeira curva. Ao calcular a distância do centro de gravidade da curva das densidades de acordo com as ordenadas da *Figura 4*, Número 2, encontramos o centro de gravidade colocado a 1,3 polegada (3,52 cm) da extremidade 0. Encontramos pelo cálculo da segunda experiência, Seção 22.21, o centro de gravidade a 1,5 polegada de distância dessa extremidade, razão essa tão exata quanto podemos esperar em experiências desse tipo, que apenas parecem indicar que a densidade dos pontos colocados nas proximidades do meio da agulha é um pouco maior que aquela indicada por nossa Figura. Isso deve vir, assim como provamos na Seção 22.22, da influência magnética dos pontos fortemente imantados do fio de aço ns sobre o estado magnético da agulha a. Afinal de contas, embora esse estado não esteja sujeito a variações tão intensas quanto as variações da pequena agulha da quinta experiência; contudo haverá, no estado da agulha a, um crescimento de magnetismo que será

[890]Novamente quando Coulomb se refere aqui à "agulha", deve ser entendido o fio de aço ns da Figura 3, Número 1.

mais perceptível na medida em que for mais intensa a ação do ponto b do fio de aço ns, *Figura 3*.[891]

22.24 XXIV. *Recapitulação*

Vamos reunir em poucas palavras os principais resultados fornecidos pelas experiências anteriores.

1°. A curva das intensidades magnéticas pode, na prática, ser calculada como um triângulo que estende-se apenas da extremidade das agulhas até uma distância dessa extremidade igual a 25 vezes o diâmetro da agulha. Assim, nas agulhas que possuem um comprimento maior do que 50 vezes seus diâmetros, os *momentos* crescem da mesma forma que o crescimento dos comprimentos das agulhas.

2°. Quando as agulhas possuem um comprimento menor do que 50 vezes seu diâmetro, os momentos das forças diretrizes podem, na prática, ser avaliados em razão do quadrado dos comprimentos das agulhas. Esse resultado que foi encontrado *na primeira e na segunda experiência*, é confirmado pela *quinta, sexta e sétima*, nas quais se encontra que, qualquer que seja o comprimento das agulhas, a intensidade magnética de sua extremidade é sensivelmente a mesma. Assim, caso o formato da curva das intensidades seja representado por um triângulo com a ponta no meio da agulha, e se denominarmos, *Figura 4, Número 3*,[892,893] a intensidade ns das extremidades das agulhas [pela letra] A, e x [como sendo] a metade [do comprimento] da agulha, teremos, para o *momento* da força diretriz dessa agulha

[891][Nota de Potier:] Biot propôs a fórmula

$$y = A\left(\mu^x - \mu^{L-x}\right)$$

para representar o resultado das observações de Coulomb, sendo x a distância *em polegadas* até uma das extremidades do ímã de comprimento L, o valor de μ deduzido da curva *abcde* representada acima seria 0,518 (ou 0,784 se considerarmos o centímetro como unidade).

A partir dessa fórmula deduzimos para o torque do par de forças terrestre, se H é a componente horizontal [do magnetismo terrestre, o seguinte valor:]

$$\frac{2AH}{l\cdot\mu}\left[\frac{L}{2}(1+\mu L)+\frac{1-\mu L}{l\cdot\mu}\right] .$$

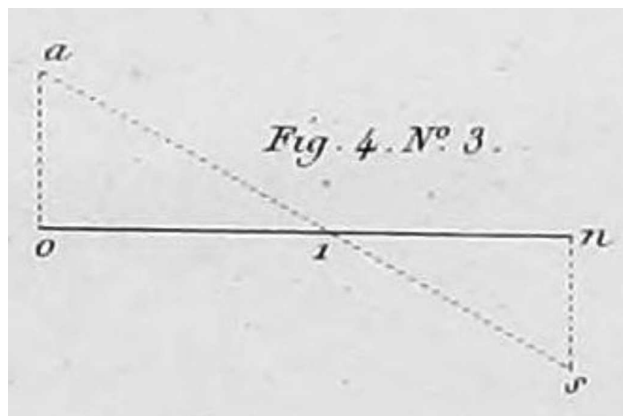
Se tentarmos determinar as constantes $\frac{2AH}{l\cdot\mu}$ e μ de maneira a representar as experiências da Seção 22.5, encontraremos (considerando como unidades as polegadas e os graus de torção) $\frac{2AH}{l\cdot\mu} = 38,22$ e $\mu = 0,525$, números esses bem próximos dos anteriores.

Aplicada ao fio da primeira experiência (Seção 22.4), a mesma fórmula forneceria $\frac{2A'H}{l\cdot\mu'} = 2$ e $\mu' = 0,0433$. Os valores de μ e μ' satisfazem à relação $rl\cdot\mu = r'l\cdot\mu'$, com r e r' sendo os raios dos dois fios, e a razão $\frac{A'}{l\cdot\mu'} : \frac{A}{l\cdot\mu}$ é perceptivelmente a razão das seções [retas].

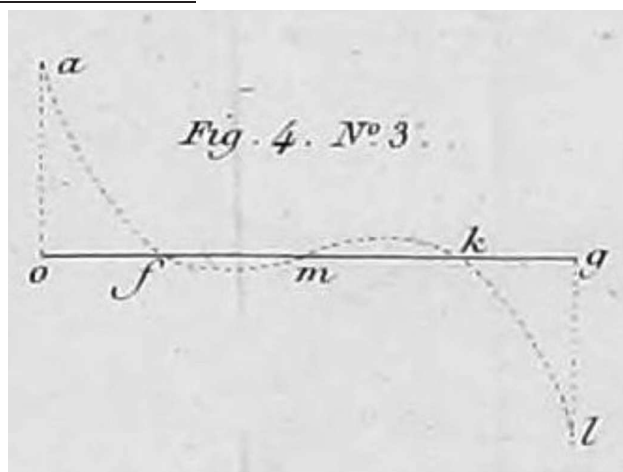
[892]Nessa Figura 4, Número 3, o segmento $0n$ representa a agulha imantada, o ponto 1 é seu ponto médio com a distância 01 sendo representada por x. A agulha está apoiada por seu ponto médio. Além disso, $0a$ e ns representam as intensidades magnéticas opostas nas extremidades dessa agulha. Coulomb vai indicar o valor absoluto dessa intensidade pela letra "A". A reta tracejada indica a intensidade magnética ao longo do comprimento da agulha, sendo ela positiva em uma metade (representando, por exemplo, o fluido boreal ou Norte) e negativa em outra metade (representando, por exemplo, o fluido austral ou Sul).

[893]Entre as imagens dessa Sétima Memória de Coulomb aparece também uma outra imagem numerada como Figura 4, Número 3. Não sei onde essa Figura deveria aparecer. De qualquer forma coloco-a nessa Nota de rodapé:

$$\frac{2Ax^2}{3}.^{[894]}$$

Ou seja, os *momentos* da força diretriz são como os quadrados dos comprimentos das agulhas, no caso em que [os comprimentos dessas] agulhas são menores que 50 vezes seus diâmetros, e quando o lugar geométrico das densidades magnéticas é aproximadamente uma linha reta.

3°. Quando comparamos duas agulhas de mesma natureza cujas dimensões são semelhantes, os *momentos* [magnéticos] de suas forças diretrizes são proporcionais ao cubo das dimensões semelhantes.

22.25 XXV. *Ensaio sobre a Teoria do Magnetismo, com Algumas Experiências Novas para Esclarecer Essa Teoria*

Os físicos atribuíram durante longo tempo os efeitos do magnetismo a um turbilhão de matéria fluida que fizesse sua revolução ao redor dos ímãs, sejam artificiais ou naturais, entrando por um polo e saindo por outro.[895] Esse fluido agiria, dizem, sobre o ferro e o aço devido à configuração de suas partículas, mas não exerceria qualquer ação sobre os outros

[894]Na Seção 23.1 apresento um cálculo detalhado para chegar nesse resultado.
[895]Ver a Seção 4.1.

corpos. Nesse sistema, na medida em que apareceram alguns fenômenos inexplicáveis por um único turbilhão, foram imaginados vários turbilhões, ou então combinaram-se vários ímãs entre si, fornecendo a eles movimentos particulares na medida em que isso era necessário. As três Memórias que foram premiadas pela Academia em 1746 foram baseadas em hipóteses semelhantes.[896]

Acredito ter provado no *nono volume dos Savans étrangers, páginas 137 e 157*,[897] como era difícil de explicar, por meio de turbilhões, os diferentes fenômenos magnéticos. Portanto, é necessário ver se esses fenômenos podem ser explicados mais facilmente por meio de suposições simples de forças atrativas e repulsivas. Para evitar toda discussão alerto, como já fiz nas diferentes Memórias anteriores, que toda hipótese de atração e repulsão seguindo uma lei qualquer[898] deve ser considerada apenas como uma fórmula que exprime um resultado experimental. Caso essa fórmula seja deduzida a partir da ação entre moléculas elementares de um corpo dotado de certas propriedades, se pudermos obter a partir dessa primeira ação elementar todos os outros fenômenos, e se, enfim, os resultados do cálculo teórico estiverem exatamente de acordo com as medidas que as experiências fornecem, [então] não poderemos talvez esperar ir mais longe até encontrarmos uma lei mais geral que abranja pelo mesmo cálculo os corpos dotados de diferentes propriedades, as quais, até o momento, não nos parecem ter qualquer ligação entre si.

O Sr. Aepinus[899] parece ter sido um dos primeiros que buscou explicar, por meio do cálculo, os fenômenos magnéticos utilizando a atração e a repulsão. Ele pensa que a causa do magnetismo pode ser atribuída a um único fluido que atua sobre suas próprias partículas por uma força repulsiva, e [atua] sobre as partículas do aço e do ímã por uma força atrativa. Esse fluido, uma vez presente nos poros do ímã, desloca-se apenas com dificuldade. Esse sistema conduziu o Sr. Aepinus a essa conclusão, a saber, que para explicar diferentes fenômenos magnéticos, é necessário supor entre as partes sólidas do ímã uma força repulsiva. Depois do Sr. Aepinus, vários físicos admitiram [a existência de] dois fluidos magnéticos. Eles fizeram a suposição de que quando uma lâmina de aço estava em seu estado natural, esses dois fluidos estavam reunidos até a saturação; e que pela atuação do magnetismo, eles se separariam e seriam levados até as duas extremidades da lâmina. De acordo com esses autores, os dois fluidos exercem um sobre o outro uma ação atrativa, porém exercendo sobre as próprias partes uma ação repulsiva. É fácil de perceber que esses dois sistemas[900] devem fornecer os mesmos resultados pela teoria.

Trata-se agora de ver se os cálculos baseados nas hipóteses anteriores estarão exatamente de acordo com as experiências. Não é possível tentar essas pesquisas antes de conhecer a lei de atração e repulsão entre as moléculas magnéticas dos corpos magnetizados; lei essa que encontramos nas *Mémoires de l'Académie pour 1785, página 606 e seguintes*,[901] como sendo proporcional à densidade ou intensidade magnética e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias. Era igualmente impossível de verificar qualquer hipótese antes de

[896]Ver a Nota de rodapé 247 na página 131.

[897]Essa numeração me parece estranha. Creio que Coulomb está se referindo às páginas 173 e 257 do artigo original: [Coulomb, 1780, págs. 173 e 257], traduzido no Capítulo 5. Ver, em particular, as páginas 56 e 131 dessa tradução em português.

[898]Ou seja, qualquer que seja a variação da força em função da distância entre as partículas magnéticas que estejam interagindo.

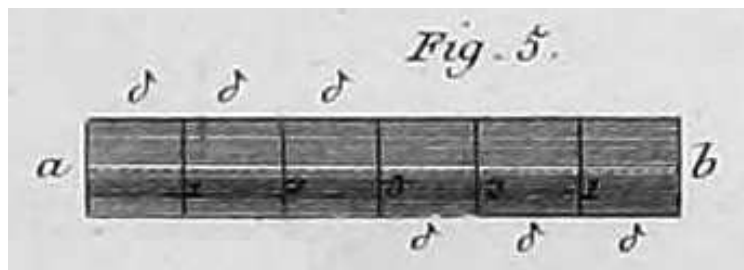
[899]Ver a Nota de rodapé 147 na página 69.

[900]Ou seja, o sistema com um único fluido magnético e o sistema que admite a existência de dois fluidos magnéticos.

[901]Ver a página 228 e as páginas seguintes na Seção 12.2.

ter empregado os meios que fornecessem as medidas exatas nas experiências; assim como tentamos fazer nas experiências anteriores.

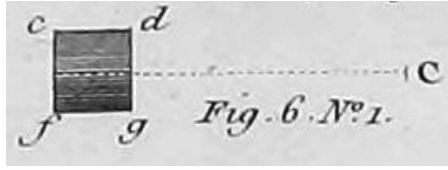
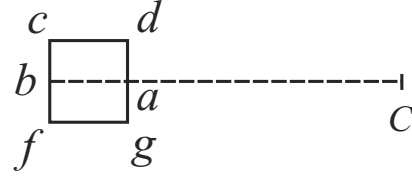
22.26 **XXVI.** *Exemplo para Determinar, pelo Cálculo, a Distribuição do Fluido Magnético em uma Agulha Cilíndrica de Aço, de Acordo com os Sistemas que Acabam de Ser Enunciados*

Para simplificar os resultados e colocar os cálculos ao alcance de um número maior de leitores, vamos aplicar um método de aproximação a um exemplo bem simples, mas que vai ser suficiente para nos indicar ao mesmo tempo os resultados principais, fornecidos pelas experiências anteriores, e a marcha que poderemos seguir nos exemplos mais complicados. Suponhamos, *Figura 5*, que a agulha de aço cilíndrica ab tenha um comprimento que seja seis vezes o seu diâmetro, e que esteja dividida em partes iguais.[902]

Suponhamos essa agulha imantada até a saturação e busquemos saber qual deve ser a densidade magnética de cada parte para que haja equilíbrio no ponto do eixo de cada divisão;[903] além disso suponhamos que a densidade magnética seja uniforme em cada parte e que ela seja diferente apenas entre uma parte e outra. De acordo com essa suposição, estando o ponto 3 colocado no meio da agulha, as densidades magnéticas dos pontos dos dois lados, a iguais distâncias do ponto 3, serão iguais; porém as densidades de um lado serão positivas e as do outro lado serão negativas. Seja o limite da força coercitiva que impede o fluido magnético de deslocar-se de uma parte da agulha para outra representado pela quantidade constante A, força essa que podemos comparar ao atrito nas máquinas, ou à coesão. Para ter a ação de cada parte sobre um ponto do eixo, é necessário determinar pelo cálculo na *Figura 6, [Número 1]*,[904] a ação do pequeno cilindro $cdfg$, cuja densidade é uniforme, sobre o ponto C do eixo, ao supor a ação de todos os pontos em razão inversa do quadrado das distâncias.

---

[902] Discuto essa Figura 5 na Seção 23.2.

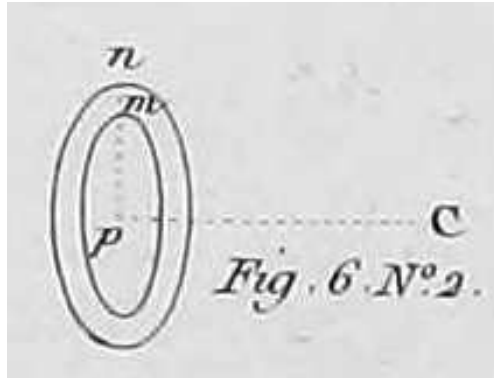
[903] O que Coulomb chama aqui de densidade magnética (*densité magnétique*) deve ser entendido como a densidade volumétrica de fluido magnético.

[904] A imagem original de Coulomb aparece na letra (a) dessa Figura. Na letra (b) adicionei as letras a e b que serão mencionadas a seguir por Coulomb. Essas letras a e b estão ao longo do eixo do cilindro.

(a) (b)

Seja o raio do cilindro $ag = r$, a distância $Cb = a$, a distância $Ca = b$, o comprimento do cilindro $ba = a - b$, e seja 2π a razão da circunferência para o raio.[905] A ação do cilindro $cdfg$, cuja densidade é δ,[906] atuando sobre o ponto C do eixo, na direção do eixo aC, será expressa pela fórmula[907]

$$2\pi\delta\left(a - b + \sqrt{b^2 + r^2} - \sqrt{a^2 + r^2}\right) .$$

Aqui vai o tipo de cálculo que fornece essa fórmula. A ação[908] de uma zona circular, *Figura 6, Número 2*, que teria $mn = dr$ de largura e um raio $pm = r$, afastada do ponto C sobre o qual ela atua pela distância $pC = x$,[909] seria representada pela quantidade

$$\frac{2\pi\delta x r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} .$$

[905]No original, [Coulomb, 1793, pág. 484], Coulomb representa pela letra c minúscula "*le rapport de la circonférence au rayon*", isto é, a razão da circunferência para o raio. Estou aqui seguindo Potier, [Potier, 1884, pág. 299], e representando essa razão por 2π. A mesma substituição foi feita nas outras fórmulas desse trabalho.

[906]Ou seja, δ é a densidade volumétrica de fluido magnético, tal que a quantidade de fluido magnético contida em um volume infinitesimal dV é dada por δdV.

[907]No original, [Coulomb, 1789, pág. 484], Coulomb define a letra minúscula c como sendo a razão da circunferência de um círculo para o raio. Hoje em dia essa razão é representada por 2π. Potier, [Potier, 1884, pág. 299], substituiu a letra c por 2π. Além disso, substituiu a expressão ab no primeiro parêntese da próxima fórmula por $a - b$. Segui nessa tradução o procedimento de Potier. A próxima equação apareceu no original da seguinte forma:

$$c\delta\left((ab) + (bb + rr)^{1/2} - (aa + rr)^{1/2}\right) .$$

[908]Ou seja, a componente da força ao longo da direção pC.

[909]Por um lapso aparece aqui no original a expressão $pm = x$.

Essa quantidade integrada de maneira que ela se anule quando $r = 0$ fornecerá para a ação do círculo de raio r, [a seguinte quantidade:]

$$2\pi\delta\left(1 - \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right) .$$

Multiplicada por dx e integrando de maneira que o valor se complete quando $x = a$, e que ele se anule quando $x = b$, teremos, *Figura 6, Número 2*, para representar a ação do pequeno cilindro $cfgd$ sobre o ponto C,[910] calculada na direção do eixo, a fórmula

$$2\pi\delta\left(a - b + \sqrt{b^2 + r^2} - \sqrt{a^2 + r^2}\right) .$$

Ao aplicar agora essa fórmula ao nosso exemplo, no qual cada parte do cilindro [tem um comprimento] igual a $2r$, e onde é necessário, *Figura 5*, que haja equilíbrio nos pontos 1, 2 e 3 do eixo entre as forças magnéticas e a resistência experimentada por esse fluido ao passar de um ponto a outro do fio de aço, obteremos as três equações a seguir.

No ponto 1:

$$0,77\delta_1 = 0,74\delta_2 + 0,06\delta_3 + \frac{A}{2\pi r} .$$

No ponto 2:

$$0,13\delta_1 = -0,81\delta_2 + 0,65\delta_3 + \frac{A}{2\pi r} .$$

No ponto 3:

$$0,10\delta_1 = -0,22\delta_2 - 1,52\delta_3 + \frac{A}{2\pi r} .$$

Ao reduzir essas três equações, encontramos para as densidades magnéticas os seguintes valores:

$$\delta_1 = 2,41\frac{A}{2\pi r} ; \qquad \delta_2 = 0,72\frac{A}{2\pi r} ; \qquad \delta_3 = 0,19\frac{A}{2\pi r} .$$

22.27 XXVII

Se supormos uma outra agulha cuja força coercitiva, força essa que depende da natureza e do grau de têmpera da agulha, seja representada por A', sendo r' o raio da agulha e cujo comprimento seja igual a seis vezes seu diâmetro, teríamos uma agulha na qual todas as dimensões seriam semelhantes, ou proporcionais, às dimensões daquela [agulha] que acabou de servir de modelo para o nosso cálculo e, ao denominar d_1, d_2 e d_3 às densidades correspondentes nas três divisões da metade dessa [nova] agulha, teremos os três valores[911]

$$d_1 = 2,41\frac{A'}{2\pi r'} ; \qquad d_2 = 0,72\frac{A'}{2\pi r'} ; \qquad d_3 = 0,19\frac{A'}{2\pi r'} .$$

[910]Por um lapso no original aparece aqui cilindro $efgd$. Coulomb certamente está se referindo aqui à ação do pequeno cilindro imantado $cfgd$ da Figura 6, Número 1, ao atuar sobre uma partícula colocada no ponto C.

[911]Por um lapso no original aparece A em vez de A' nas três próximas equações, corrigi isso.

Assim teríamos nas duas agulhas, ao comparar as densidades correspondentes:[912]

$$\delta_1 : d_1 :: \delta_2 : d_2 :: \delta_3 : d_3 :: \frac{A}{r} : \frac{A'}{r'} \ ,$$

isto é, as densidades das porções correspondentes das duas agulhas estão entre si

$$:: \frac{A}{r} : \frac{A'}{r'} \ ,$$

[ou seja,] em razão direta das forças coercitivas e [em razão] inversa dos raios.

Caso as duas agulhas que queremos comparar tenham, em relação a seus diâmetros, um comprimento maior que o anterior, mas se elas possuírem dimensões semelhantes, é fácil de ver que teríamos, pelo método anterior, um número de equações igual ao número de divisões que haveria em cada metade da agulha, e como em cada equação correspondente os coeficientes das partes colocadas similarmente são os mesmos, resulta disso que as densidades das partes colocadas similarmente estarão entre si em todos os casos

$$:: \frac{A}{r} : \frac{A'}{r'} \ .$$

22.28 XXVIII

É fácil agora calcular, de acordo com a teoria, a razão entre os torques magnéticos devidos às ações do globo terrestre que impelem de volta ao meridiano magnético duas agulhas de dimensões semelhantes imantadas até a saturação. Consideremos nessas duas agulhas duas partes semelhantes cujos raios sejam r e r', as massas das partes semelhantes estarão [entre si]

$$:: r^3 : r'^3 \ ,$$

as massas do fluido magnético dessas mesmas partes[913] serão como as densidades [volumétricas de fluido magnético] multiplicadas pelo cubo dos raios. Porém, sendo em nossas experiências o meio de cada agulha o centro de rotação ao redor do qual cada parte solicitada pela força magnética terrestre é trazida de volta a seu meridiano magnético, resulta disso que cada parte tem como *torque* ao redor desse ponto, o produto de sua densidade, do cubo do raio e da distância desse ponto ao centro de rotação. Porém, como as densidades em duas partes correspondentes de duas agulhas semelhantes estão entre si

$$:: \frac{A}{r} : \frac{A'}{r'} \ ;$$

e como, além disso, para as partes colocadas similarmente nas duas agulhas semelhantes, as distâncias ao centro das agulhas são como os raios; resulta disso que os *torques* magnéticos que impelem de volta duas agulhas semelhantes ao meridiano magnético, estão entre si em

[912]Ou seja:

$$\frac{\delta_1}{d_1} = \frac{\delta_2}{d_2} = \frac{\delta_3}{d_3} = \frac{A/r}{A'/r'} \ .$$

[913]Isto é, as quantidades totais de fluido magnético de cada uma dessas partes.

razão direta composta da força coercitiva e do cubo do raio.[914] Mas vimos na *Seção* 22.10, que resulta da experiência que em duas agulhas de mesma natureza e de dimensões semelhantes os torques da força diretriz eram como os cubos dos raios, o que se encontra perfeitamente de acordo com a teoria.

Também encontramos na Seção 22.21, de acordo com a experiência, que em duas agulhas de aço de mesma natureza, mas com diâmetros diferentes, o centro de gravidade da curva que representava as densidades do fluido magnético estava colocado em relação às extremidades dessas agulhas em distâncias proporcionais a seus diâmetros; as fórmulas anteriores fornecem o mesmo resultado.

22.29 XXIX

A concordância que encontramos aqui entre as experiências fundamentais e o cálculo parecem dar um grande peso, seja à opinião do Sr. Aepinus, seja ao sistema de dois fluidos, tal como apresentamos. Contudo, devo confessar que existem alguns fenômenos que parecem discordar totalmente dessas hipóteses; aqui vai um dos principais.

Vimos na Seção 22.1 que quando uma agulha imantada estava suspensa livremente, a soma das forças boreais que solicitavam essa agulha ao longo do meridiano magnético, era exatamente igual à soma das forças austrais.[915] Esse resultado, baseado em experiências que não podemos contradizer, ocorre não apenas para uma agulha que acabamos de imantar, mas também quando, após ela ter sido imantada, se cortarmos essa agulha em partes diferentes, se separarmos, por exemplo, a extremidade da parte boreal, essa parte quando suspensa [também] vai ser solicitada por forças boreais e austrais exatamente iguais. Contudo, nas hipóteses anteriores, essa parte estaria carregada unicamente de fluido boreal, e a ação dos dois polos magnéticos do globo terrestre se juntariam para transportar essa parte em direção ao polo boreal. Logo a teoria encontra-se aqui em contradição com a experiência.[916]

22.30 XXX

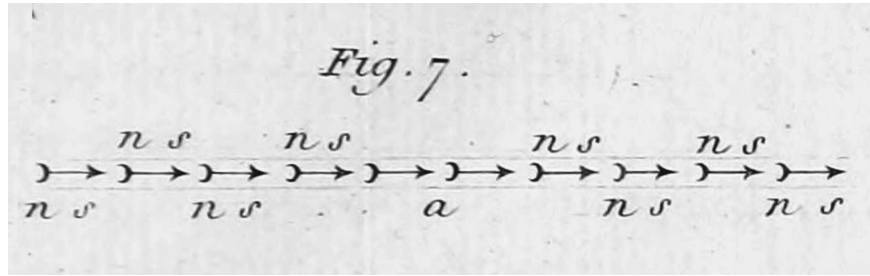
Creio que podemos reconciliar o resultado das experiências com o cálculo ao fazer algumas mudanças nas hipóteses; aqui vai uma modificação que parece poder explicar todos os fenômenos magnéticos cujos testes anteriores forneceram medidas precisas. Essa mudança consiste em supor no sistema do Sr. Aepinus que o fluido magnético está contido em cada molécula ou em cada parte integrante[917] do ímã ou do aço, [supor] que o fluido pode ser transportado de uma extremidade a outra dessa molécula, o que fornece dois polos a cada molécula, mas [supor ainda] que esse fluido não pode passar de uma molécula para outra. Assim, por exemplo, se uma agulha imantada tiver um diâmetro muito pequeno, ou se, *Figura 7*, cada molécula puder ser considerada como uma pequena agulha cuja extremidade Norte seria unida à extremidade Sul da agulha anterior a ela, haveriam apenas duas extremidades

[914]Ou seja, o torque exercido pela Terra sobre uma agulha imantada é proporcional à força coercitiva que atua sobre as partes magnéticas da agulha e é também proporcional ao volume da agulha.

[915]Sendo que essas duas forças atuam em sentidos opostos, ao longo de retas paralelas, compondo um par de forças que gera um torque sobre a agulha.

[916]Ver a discussão sobre esse argumento na Seção 4.4.

[917]Ver a Nota de rodapé 333 na página 174. Outra possibilidade de tradução seria partícula integrante, individual ou constituinte.

n e s dessa agulha que forneceriam sinais de magnetismo; já que seria apenas nessas duas extremidades onde um dos polos das moléculas não estaria em contato com o polo contrário de uma outra molécula.

Caso, por exemplo, uma agulha semelhante fosse cortada no ponto a em duas partes após ter sido imantada, a extremidade a da parte na teria a mesma intensidade que tinha a extremidade s da agulha inteira, e a extremidade a da parte sa teria igualmente a mesma intensidade que tinha a extremidade n da agulha inteira antes de ter sido cortada.[918]

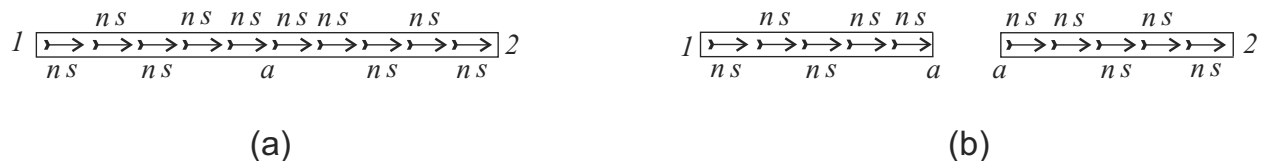
Esse fato encontra-se confirmado bem exatamente pela experiência; pois, se cortarmos em duas partes uma agulha muito longa e muito fina após ter sido imantada, cada parte ao ser testada na balança [magnética] encontra-se imantada até a saturação, e embora ela seja novamente imantada, ela não vai adquirir uma força diretriz maior.

Cada parte de nossa agulha, nesse novo sistema, não importando de qual maneira ela seja imantada ou cortada, será direcionada ao longo do meridiano magnético por meio de forças austrais e boreais exatamente iguais; o que parece ser um dos principais fenômenos que as hipóteses devem satisfazer.

A hipótese que acabamos de fazer parece bem análoga a uma experiência elétrica bem conhecida. Quando eletrizamos uma placa de vidro coberta com dois planos metálicos, não importando quão finos sejam esses planos, se os afastarmos da placa de vidro, eles fornecem sinais intensos de eletricidade: as superfícies do vidro, após termos descarregado os revestimentos [metálicos], permanecem elas próprias impregnadas de duas eletricidades opostas, formando um eletróforo muito bom;[919] esse fenômeno ocorre não importando quão fina seja a placa de vidro. Assim o fluido elétrico, embora de natureza diferente nos dois lados do vidro, penetra apenas até uma distância infinitamente pequena de sua superfície;

[918] Vou supor aqui a agulha 12 na Figura (a) dessa Nota de rodapé como tendo um polo Norte na extremidade 1 e um polo Sul na extremidade 2. No seu centro a não há uma intensidade de polo magnético, já que os polos sn nesse ponto se cancelam por estarem praticamente em contato:

(a) 1 — 2; n s, a

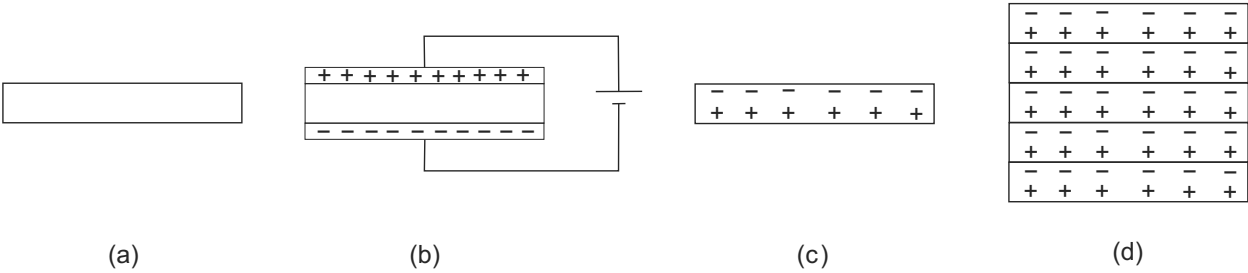
(b) 1 — a, a — 2; n s

Ao cortar a agulha em seu ponto médio a e separar as duas partes, ficamos com duas agulhas, $1a$ e $a2$, como mostrado na Figura (b). A parte $1a$ tem um polo Norte na extremidade 1 e um polo Sul na extremidade a. Já a parte $a2$ tem um polo Norte na extremidade a e um polo Sul na extremidade 2, como afirmado por Coulomb. As intensidades dos polos magnéticos nas extremidades da agulha $1a$ são as mesmas intensidades que aquelas da agulha original 12. O mesmo ocorre com a agulha $a2$ comparada com a agulha 12.

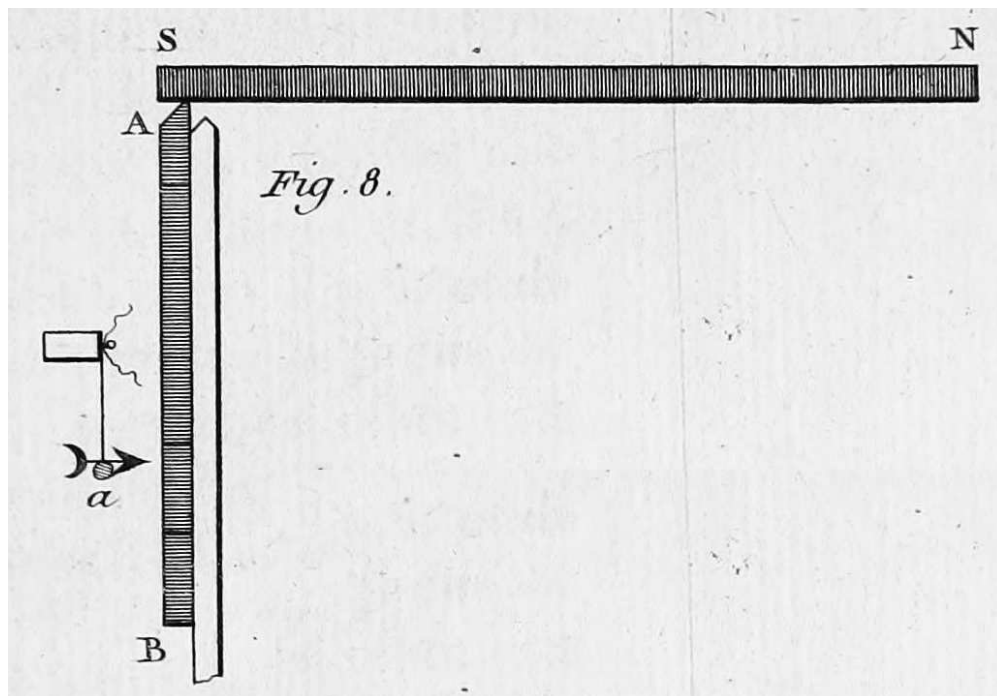
[919] Para uma discussão detalhada do eletróforo ver o Capítulo 6 (o eletróforo) de [Assis, 2018b], [Assis, 2018a] e [Assis, 2019].

e essa placa [de vidro] lembra exatamente uma molécula magnetizada de nossa agulha. E se colocarmos agora um sobre o outro uma sequência de placas de vidro assim eletrizadas de maneira que, na reunião das placas, o lado positivo que forma a superfície da primeira placa encontre-se a várias polegadas de distância da superfície negativa da última placa, cada superfície das extremidades, assim como prova a experiência, produzirá, a distâncias bem grandes, efeitos tão perceptíveis quanto no caso de nossas agulhas imantadas, embora o fluido [elétrico] de cada superfície das placas das extremidades só penetre essas placas até uma profundidade infinitamente pequena, e embora os fluidos elétricos de todas as superfícies em contato se equilibrem mutuamente, já que uma das superfícies será positiva e a outra negativa.[920]

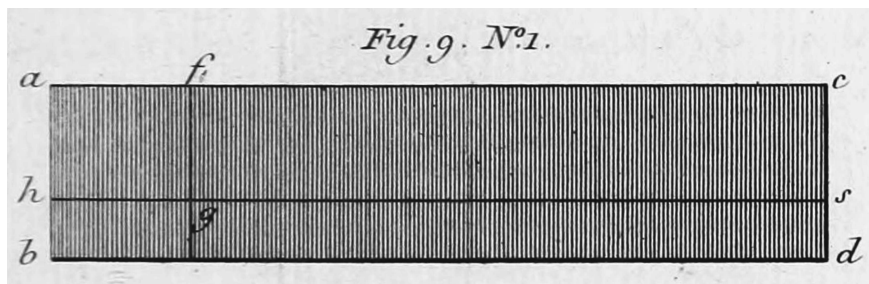
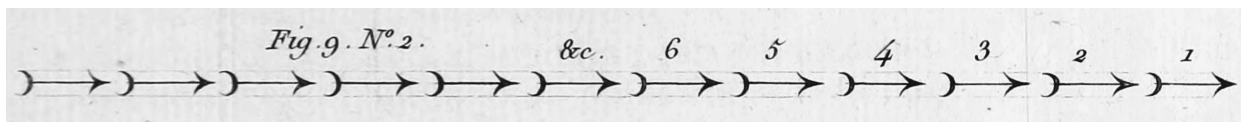
Enfim, em nenhum sistema de atração e repulsão, se pode supor que um dos dois fluidos magnéticos possa passar de uma barra de aço para outra, já que as agulhas imantadas são sempre solicitadas por forças boreais e austrais absolutamente iguais. Contudo, se preenchermos um pequeno tubo ou canudo de limalha de aço, e se o imantarmos, encontraremos nesse tubo uma força diretriz muito perceptível, à qual mediremos facilmente com nossa balança magnética.[921] A limalha do tubo encontra-se na situação de nossa hipótese, já que o fluido magnético não pode passar de uma molécula de aço para uma outra.

Vai ainda aqui uma experiência a favor de nossa opinião. Ao longo de uma régua de madeira coloco, *Figura 8*, uma fila de cinco ou seis paralelepípedos de ferro bem doce em contato por suas extremidades, formando juntos um comprimento de dezoito a vinte polegadas [48,726 a 54,14 cm].

[920]Uma ilustração dessa experiência aparece na Figura dessa Nota de rodapé:

Em (a) temos uma placa de vidro neutra. O vidro dessa experiência tem de se comportar como isolante, ver a Nota de rodapé 417 na página 214. Em (b) essa placa de vidro é coberta com dois planos condutores que são ligados às extremidades de uma bateria, ficando assim por um certo tempo. Ao retirar os planos eletrizados, observa-se que a placa de vidro ficou polarizada eletricamente, como mostrado em (c). Ao empilhar várias dessas placas polarizadas é observado que o conjunto também fica polarizado, com cargas de sinais opostos em suas faces externas, (d).

[921]Por um lapso no original aparece aqui "balança elétrica".

Aplico o polo s de uma barra imantada à extremidade A [da fila], e faço deslizar, como fiz na *Figura 3, [Número 3]*, a linha AB de meus paralelepípedos a quatro ou cinco linhas de distância [0,904 ou 1,13 cm] de uma pequena agulha a imantada. Como o fluido magnético não pode passar de um paralelepípedo ao outro, cada paralelepípedo deveria apresentar dois polos. A experiência ensina, ao contrário, que toda linha AB fornece a mesma natureza de magnetismo que o polo s do ímã sn em contato por esse polo com a extremidade A. Essa experiência é explicada facilmente com nossa hipótese.

22.31 XXXI

É fácil perceber, após o que acabamos de dizer, o estado magnético de uma lâmina imantada. Seja *abcd*, *Figura 9, Número 1*, essa lâmina, que supomos formada de uma infinidade de elementos longitudinais.

Na *Figura 9, Número 2* vemos ampliada uma fibra elementar *hgs*, na qual 1, 2, 3 representam as pequenas agulhas ou moléculas elementares.

Em cada molécula o fluido magnético pode se transportar de uma extremidade à outra, mas não pode sair da molécula. Assim, na primeira agulha, caso o fluido magnético esteja condensado na extremidade boreal pela quantidade a, nessa mesma agulha ele será dilatado na extremidade austral pela quantidade a além do estado de neutralização; na agulha 2 ele poderá estar condensado na extremidade boreal de uma quantidade $a+b$, logo ele será dilatado na outra extremidade da agulha pela mesma quantidade $a+b$; na agulha 3 ele será condensado na extremidade boreal da quantidade $a+b+c$, assim na outra extremidade da mesma agulha ele será dilatado da mesma quantidade; ocorrerá o mesmo para todos os elementos dessa fibra.

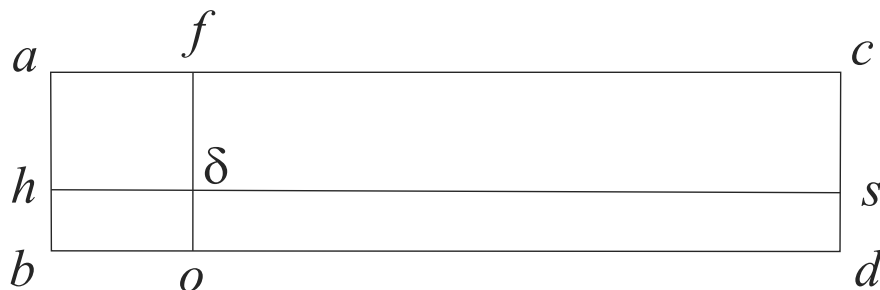
Disso resulta que na extremidade de nossa fibra, a força boreal será a; que na extremidade boreal do segundo elemento, a força boreal será reduzida ao valor b, sendo a força a destruída pela força negativa a da extremidade austral do elemento 1; na extremidade boreal do elemento 3, a força boreal será reduzida ao valor c, sendo a parte $(a+b)$ destruída pela força negativa do polo austral do elemento 2.

Agora é fácil ao substituir nossa fibra na *Figura 9, Número 1*, de ver que ao considerar nessa fibra, do lado boreal, por exemplo, um ponto qualquer δ, cuja força boreal reduzida de acordo com a observação anterior seja representada por δ, se traçarmos por esse ponto δ uma linha of perpendicular ao comprimento da lâmina [então,] no estado de estabilidade, a ação de toda a parte $abfo$ sobre o ponto δ, sendo decomposta na direção $h\delta$, deverá equilibrar à ação de toda a parte restante $focd$ juntamente com a força coercitiva que impede o fluido de deslocar-se em cada elemento.[922]

Assim, em nossa hipótese, o cálculo das ações magnéticas ou da intensidade das forças magnéticas de cada ponto deve nos fornecer precisamente o mesmo resultado que o cálculo [com a suposição] do transporte do fluido magnético de uma extremidade de uma lâmina à outra, cálculo que fornece, como vimos, a maior concordância entre as experiências e a teoria quando as agulhas estão imantadas até a saturação.

22.32 XXXII

Até aqui tentamos determinar pela experiência e pela teoria as principais leis da distribuição do fluido magnético nas agulhas de diferentes comprimentos e diferentes espessuras. Vimos

[922]Apresento nessa Nota de rodapé as letras mencionadas por Coulomb como me parecem que deveriam estar localizadas na Figura 9 Número 1 original:

que por meio de algumas correções era fácil de ajustar a teoria com os fenômenos magnéticos. Agora vamos apresentar algumas experiências com o objetivo de determinar:

1. A forma mais vantajosa das agulhas imantadas destinadas a indicar o meridiano magnético;

2. o grau de têmpera e de recozimento que são mais convenientes para que as lâminas de aço possam adquirir o magnetismo;

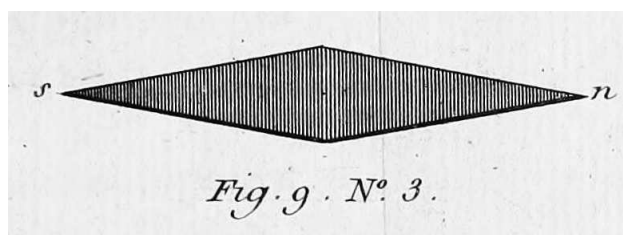
3. o grau de magnetismo adquirido por um feixe de lâminas imantadas, assim como [o grau de magnetismo] de cada lâmina desse feixe, quando a destacamos desse feixe e quando, sem imantá-la novamente, determinamos sua força magnética;

4. os meios que funcionaram melhor para imantar as agulhas de aço até a saturação e para formar ímãs artificiais.

22.33 **XXXIII.** *Formato e Grau de Têmpera das Agulhas Imantadas*

A maioria dos autores acreditava que o formato mais vantajoso das agulhas imantadas era uma lâmina de aço tendo a forma de um paralelogramo retângulo.

A experiência me provou que para um mesmo comprimento, mesmo peso e mesma espessura, uma lâmina com ponta de flecha, *Figura 9, Número 3*, tem um *momento* magnético maior que um paralelogramo retângulo.

Fig. 9. Nº. 3.

22.33.1 Oitava Experiência

Em uma lâmina de aço que encontramos no comércio sob o nome de *folha de aço da Inglaterra*,[923] cortamos três agulhas com o comprimento de seis polegadas (16,24 cm).

A primeira era um paralelogramo retângulo com $9\frac{1}{2}$ linhas (2,14 cm) de largura, que pesava 382 grãos (20,10 g).

A segunda, igualmente um paralelogramo retângulo, tinha $4\frac{3}{4}$ linhas [1,07 cm] de largura e pesava 191 grãos [10,14 g].

A terceira, com ponta de flecha, tinha em seu centro $9\frac{1}{2}$ linhas de largura [2,15 cm] e pesava 191 grãos como a segunda.

Suspendemos sucessivamente essas três agulhas em nossa balança magnética, após tê-las imantado, e obtivemos os seguintes resultados:

[923]No original: *tole d'acier d'Angleterre*.

Primeiro teste. *As três agulhas temperadas ao vermelho branco*.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 382 grãos, foi mantida a 30° de seu meridiano magnético, por uma força de torção medida por 85°.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 191 grãos, ... por 49°.[924]

A agulha em flecha, pesando 191 grãos, ... por 53°.

Segundo teste. *As agulhas recozidas à consistência de uma mola violeta*.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 382 grãos, foi mantida a 30° do meridiano magnético, por uma força de torção de 118°.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 191 grãos, ... por 65°.

A agulha em flecha, pesando 191 grãos, ... por 68°.

Terceiro teste. *As agulhas recozidas à cor da água*.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 382 grãos, foi mantida a 30° do meridiano magnético, por uma força de torção de 126°.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 191 grãos, ... por 68°.

A agulha em flecha, pesando 191 grãos, ... por 3°.

Quarto teste. *As agulhas recozidas a um grau de calor vermelho obscuro*.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 382 grãos, foi mantida a 30° do meridiano magnético, por uma força de torção medida por 134°.

A agulha em forma de paralelogramo, pesando 191 grãos, ... por 70°.

A agulha em flecha, pesando 191 grãos, ... por 79°.

Quinto teste. *As agulhas aquecidas ao branco e não temperadas*.

Ao aquecer as agulhas ao branco,[925] e deixando-as resfriar lentamente sem temperá-las, encontramos que o grau de magnetismo que elas podem adquirir era aproximadamente o mesmo que quando as agulhas eram temperadas ao vermelho branco, como no primeiro teste.

22.34 XXXIV. *Observação sobre Essa Experiência*

Essa experiência nos ensina, em primeiro lugar, que nas lâminas o estado de têmpera bem rígido[926] é aquele no qual elas adquirem menos magnetismo, que nesse estado o magnetismo é aproximadamente o mesmo que quando a agulha é recozida ao vermelho branco; que a partir do estado da têmpera mais intensa, o magnetismo das lâminas sempre vai aumentando em todos os graus de recozimento, até que o recozimento seja de um vermelho bem sombrio, e que em seguida o magnetismo diminui na medida em que a lâmina é recozida em um maior grau de calor, que, chegando ao vermelho branco e resfriando lentamente, a lâmina sendo

[924]As reticências indicam as mesmas condições anteriores, ou seja, "foi mantida a 30° de seu meridiano magnético".

[925]No original: *en faisant rougir les aiguilles à blanc*.

[926]Ver a Nota de rodapé 337 na página 176.

em seguida imantada, ela vai adquirir aproximadamente o mesmo grau de magnetismo que aquele adquirido após a têmpera mais rígida sem recozimento.

Essa experiência mostra ainda que nas lâminas de mesma espessura e de mesmo peso, o *momento* magnético da lâmina cortada em forma de flecha, é um pouco maior que nas agulhas em forma de paralelogramo.

Enfim, é ainda fácil de ver nessa experiência que em um paralelogramo de mesma espessura e comprimento, mas tendo um comprimento dobrado em relação a um outro, o *momento* magnético não é duas vezes maior. Esse resultado havia sido indicado pela teoria.

22.35 XXXV. *Estado Magnético de um Feixe Composto de Várias Lâminas*

22.35.1 Nona Experiência

A partir[927] da mesma folha de aço que foi utilizada nas experiências anteriores, cortamos 16 agulhas em forma de paralelogramos retângulos com 6 polegadas de comprimento [16,24 cm] e 9 linhas e meia de largura [2,15 cm], cada uma pesando 382 grãos [20,29 g]. Elas foram recozidas ao branco sem temperá-las para termos certeza de que elas tinham o mesmo estado, já que, assim como acabamos de ver, o magnetismo varia de acordo com o grau de têmpera e de recozimento, e já que seria difícil que o estado de elasticidade fosse o mesmo em todas as lâminas caso tivéssemos empregado um nível inferior de recozimento. Cada agulha em particular foi imantada até a saturação e em seguida as reunimos ao juntar os polos de mesmo nome,[928] formando dessa maneira feixes com um certo número de agulhas que eram reunidas com um fio de seda bem fino mas bem forte para apertá-las uma contra a outra. Colocávamos o feixe na balança magnética, afastando-o em cada teste de 30° de seu meridiano magnético, observando então a força de torção necessária para manter o feixe a essa distância.

Primeiro teste. Com uma única agulha a 30° de seu meridiano magnético, era necessário para mantê-la a essa distância uma força de torção medida por 82°.

Segundo teste. Duas agulhas reunidas ... 125°.

Terceiro teste. Quatro agulhas reunidas ... 150°.

Quarto teste. Seis agulhas reunidas ... 172°.

Quinto teste. Oito agulhas reunidas ... 182°.

Sexto teste. Doze agulhas reunidas ... 205°.

Sétimo teste. Dezesseis agulhas reunidas ... 229°.

[927]Por um lapso no original essa Seção foi numerada com o mesmo número da Seção anterior, a saber, 34. Devido a isso alterei a numeração dessa Seção e das próximas Seções para que seguissem a ordem crescente, sem repetições e sem lacunas.

[928]Ou seja, elas foram colocadas lado a lado com todos os polos Norte em uma extremidade e com todos os polos Sul na outra extremidade.

22.36 XXXVI. Décima Experiência. *Decomposição da Agulha Anterior*

Separei[929] as 16 agulhas do sétimo teste da experiência anterior. As coloquei sucessivamente na balança magnética, afastando-as a 30° do meridiano magnético e ao denominar como sendo a primeira agulha aquela de uma das superfícies do feixe, seguindo essa nomenclatura até a décima sexta que forma a outra superfície, encontrei:

Primeiro teste. A primeira agulha é mantida a 30° de seu meridiano por uma força de torção de 46°.
Segundo teste. Segunda agulha ... 39°.
Terceiro teste. Terceira agulha ... $14\frac{1}{2}^\circ$.
Quarto teste. Quarta agulha ... $44\frac{1}{2}^\circ$.
Quinto teste. Quinta agulha ... 31°.
Sexto teste. Sexta agulha ... $32\frac{1}{2}^\circ$.
Sétimo teste. Sétima agulha ... $22\frac{1}{2}^\circ$.
Oitavo teste. Oitava agulha ... $30\frac{1}{2}^\circ$.
Nono teste. Nona agulha ... 30°.
Décimo teste. Décima agulha ... 26°.
Décimo primeiro teste. Décima primeira agulha ... $29\frac{1}{2}^\circ$.
Décimo segundo teste. Décima segunda agulha ... 34°.
Décimo terceiro teste. Décima terceira agulha ... 26°.
Décimo quarto teste. Décima quarta agulha ... 32°.
Décimo quinto teste. Décima quinta agulha ... 30°.
Décimo sexto teste. Décima sexta agulha ... 48°.

Em seguida reunimos novamente todas as agulhas, sem alterar em nada seus estados magnéticos, nem a ordem na qual elas estavam no sétimo teste da nona experiência. Ao colocar o feixe na balança magnética, afastando-o a 30° de seu meridiano, foi necessário, para mantê-lo a essa distância, uma força de torção de 229°, exatamente a mesma que antes da separação das agulhas.

22.37 XXXVII. *Resultado das Duas Experiências Anteriores*

A nona experiência prova que a força magnética de cada feixe cresce em uma razão menor que o número das lâminas, ou que a espessura do feixe. Uma única lâmina tem para o *momento* de sua força diretriz 82° de torção, enquanto que para 16 agulhas reunidas, o *momento* magnético médio de cada lâmina tem por medida $\frac{229}{16}^\circ$ ou $14,3^\circ$, isto é, aproximadamente a sexta parte de 82°, que é a força diretriz de uma única lâmina isolada e imantada até a saturação. Já tirei desse resultado uma conclusão muito importante no *nono volume dos Savans étrangers*[930] em relação às agulhas de bússola destinadas a indicar o meridiano e

[929]Por um lapso no original essa experiência apareceu com o mesmo número da anterior, ou seja, como sendo a nona. Devido a isso alterei a numeração dessa experiência e das próximas para que seguissem a ordem crescente, sem repetições e sem lacunas.
[930][Coulomb, 1780]. Ver, em particular, o Capítulo 5.5 na página 98.

colocadas sobre capas[931] e pivôs, a saber, que o *torque* do atrito dos pivôs aumenta, como provei então, em uma razão maior que [o aumento das] pressões, enquanto que os *momentos* magnéticos crescem em uma razão bem menor que as massas ou que as pressões dos pivôs, [portanto,] as agulhas finas e muito leves são, com um mesmo comprimento, preferíveis a todas as outras. De fato, vemos por nossa experiência que até mesmo supondo os *torques* de atrito proporcionais às pressões, caso o atrito pudesse produzir sobre uma única lâmina imantada até a saturação um erro de $4'$ em sua orientação em relação ao meridiano magnético, [então,] de acordo com nossa experiência, ele produziria nesse caso [um erro] seis vezes maior, ou aproximadamente de $24'$, se tivéssemos utilizado um feixe de 16 lâminas.

É inútil examinar aqui as leis que seguem os *momentos* magnéticos dos feixes de lâminas que submetemos às experiências. Seria necessário, para obter essa lei, expandir o trabalho que fizemos na nona experiência para um caso particular, a saber, com lâminas de comprimentos diferentes e de larguras diferentes. Porém, nos parece fácil prever esses resultados de uma maneira suficientemente exata na prática, de acordo com todas essas pesquisas que apresentamos no começo dessa Memória, em casos análogos, para cilindros de aço de espessuras e comprimentos diferentes.

Ao examinar agora a Tabela fornecida pela décima experiência, vemos que as duas lâminas das superfícies do feixe decomposto possuem uma força magnética maior que as outras. Sendo a [força magnética da] primeira [lâmina] medida por 46° e a décima sexta por 48°, vemos igualmente que o *momento* médio de todas as outras lâminas é aproximadamente igual, sendo medido por 30°. Afinal de contas, embora o *momento* magnético da terceira lâmina tenha sido encontrado nessa experiência de apenas $14,5°$, essa diminuição é compensada pelo *momento* das agulhas vizinhas; a segunda tendo por medida de sua força diretriz 39° e a quarta 44°;[932] de maneira que o *momento* médio dessas três agulhas é de[933]

$$\frac{39+14\frac{1}{2}+44}{3}=31\frac{1}{6}\ .$$

Ao repetir essa experiência e ao substituir a terceira lâmina por uma outra, não encontrei mais nenhuma irregularidade, e essa terceira lâmina tinha uma força diretriz medida por 32° como as outras.

Porém uma observação bem curiosa que apresenta essa décima experiência é que a soma dos *momentos* particulares de todas as lâminas fornece uma quantidade maior que o dobro daquele do feixe composto. De fato, se somarmos os *momentos* de todas as lâminas da décima experiência, encontraremos essa soma igual a 516°, enquanto que ao reunir todas as agulhas, o feixe assim composto fornece apenas 229°.

Esse último resultado poderia ser explicado, em nossa hipótese, pelo estado forçado do fluido magnético, repelido das extremidades de cada elemento no feixe composto devido à ação de todas as lâminas reunidas, e sobretudo pela ação das [lâminas das] superfícies; ação essa que só ocorre de uma maneira perceptível nas extremidades do feixe. Quando o

[931]No original: *chapes*. Ver a Nota de rodapé 108 na página 54.

[932]Na décima experiência aparece que a força de torção da quarta agulha era de $44,5°$.

[933]O resultado correto dessa conta é

$$\frac{39+14\frac{1}{2}+44}{3}=32,5\ .$$

Tenho a impressão que Coulomb chegou no resultado $31\frac{1}{6}$ ao utilizar por um lapso o valor 40 em vez de 44 no terceiro termo do numerador.

feixe é decomposto, a ação das partes afastadas das extremidades, que resta aproximadamente a mesma que no caso das lâminas compostas, repele o fluido magnético em direção às extremidades: de onde resulta o aumento do *momento* que acabamos de encontrar pela experiência.

22.38 XXXVIII. *Décima Primeira Experiência*

Decomposição de um feixe de quatro lâminas.

Juntei apenas quatro das agulhas anteriores, após tê-las imantado até a saturação. O feixe, afastado a 30° de seu meridiano, era nesse caso trazido de volta por uma força medida por 150°.

Essas agulhas ao serem separadas eram trazidas de volta ao meridiano:[934]

A primeira por uma força de *momento* medida por 70°.

A segunda, ... por 44°.

A terceira, ... por 44°.

A quarta, ... por 60°.

22.39 XXXIX. *Décima Segunda Experiência*

Decomposição de um feixe de oito lâminas.

Oito agulhas reunidas eram trazidas de volta ao meridiano magnético, do qual elas estavam afastadas de 30°, por uma força de 183°.

As agulhas foram separadas.

A primeira era trazida de volta[935] por uma força medida por 48°.

A segunda, ... por 36°.

A terceira, ... por 35°.

A quarta, ... por 33°.

A quinta, ... por 34°.

A sexta, ... por 38°.

A sétima, ... por 35°.

A oitava, ... por 51°.

É inútil nos determos nessas duas experiências. Elas fornecem resultados análogos àqueles que obtivemos nas Seções anteriores. Vamos passar [agora] aos métodos para imantar as lâminas até a saturação e para formar ímãs artificiais.

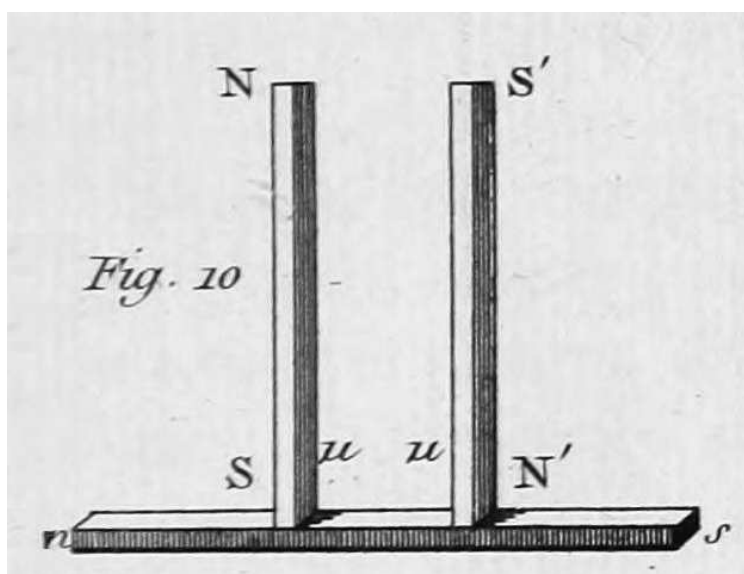
22.40 XL. *Sobre a Maneira de Imantar*

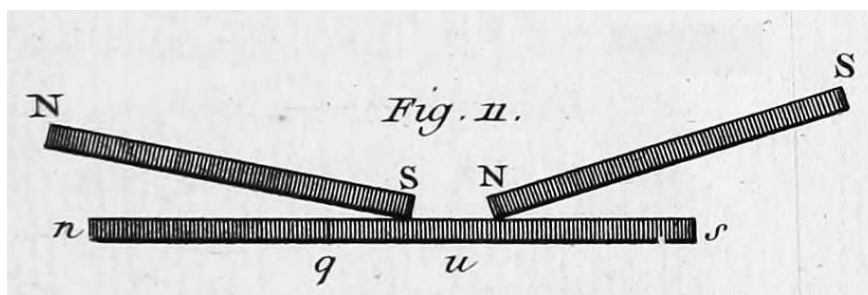
Vou apresentar as maneiras que funcionaram melhor para mim para fabricar, com poucos gastos, ímãs artificiais de uma grande força. Será fácil de ver que fui guiado pelas experiências e observações anteriores.

Quando queremos imantar um fio ou uma lâmina de aço, percebemos que deve ser vantajoso, quando utilizamos duas barras [magnetizadas] para imantar, de fazer colaborar a

[934] Quando estavam afastadas de 30° do meridiano.

[935] Quando estava afastada de 30° do meridiano magnético.

ação dos dois polos dessas barras. Foi isso que fez com que fosse criado o método de toque duplo.[936] A *Figura 10* indica a maneira pela qual ele foi praticado inicialmente.

Sobre a agulha ns que queremos imantar, colocamos verticalmente as duas barras SN e $S'N'$ a mais ou menos 7 ou 8 linhas de distância entre si [1,58 ou 1,81 cm], de acordo com a força dos ímãs: os pontos S e S' representam os polos Sul, enquanto que N e N' representam os polos Norte. Nessa situação as duas barras são movidas de uma extremidade da agulha ns até a outra [extremidade].[937]

O Sr. Aepinus[938] observou que nesse método o centro de ação[939] dos dois ímãs NS e $N'S'$, estando necessariamente colocado a uma certa distância de suas extremidades, por exemplo no ponto μ, a ação sobre os pontos da agulha compreendidos entre as duas barras [imantadas], é feita muito obliquamente e, consequentemente, não fornece a essa agulha todo o grau de magnetismo que ela poderia adquirir. Assim, em vez de colocar nessa operação as duas barras verticalmente, o Sr. Aepinus aconselha de inclina-las sobre a agulha, como na *Figura 11*, e de deslocá-las nessa configuração de uma extremidade da agulha até a outra.

De fato encontrei por meio da balança magnética que descrevi no começo dessa Memória

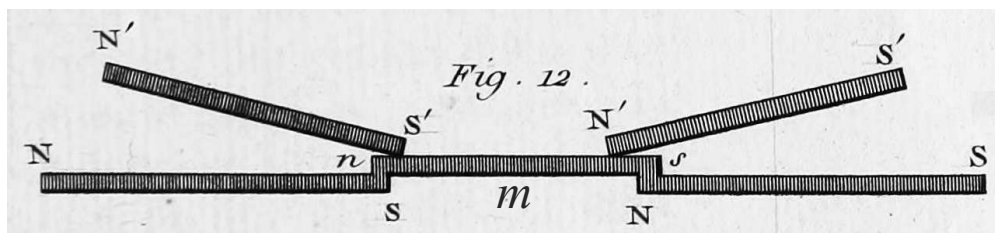
[936] Ver a Seção 4.6.

[937] Os dois ímãs NS e $S'N'$ são movidos em conjunto mantendo uma separação fixa entre eles. No final do processo a extremidade esquerda da agulha adquire um polo Norte, n, enquanto que a extremidade direita adquire um polo Sul, s.

[938] Ver a Nota de rodapé 147 na página 69.

[939] Ver a Nota de rodapé 478 na página 233.

que o método do Sr. Aepinus era preferível ao primeiro método. Porém, ao mesmo tempo, encontrei que ele não fornecia totalmente às agulhas o grau de saturação magnética; que na maioria das vezes, quando a agulha tinha um grande comprimento, formavam-se nas partes intermediárias vários polos, cuja ação, de fato, era pequena, mas ainda perceptível. Atribuo a causa disso à ação particular de cada ímã, a qual tende a produzir sobre os pontos ultrapassados pelos dois ímãs, um efeito contrário em relação ao efeito que buscamos. Em nossa *Figura 11*, o polo S, por exemplo, colocado sobre a agulha, tende a fornecer ao mesmo tempo no ponto q que está situado sob o polo S, o mesmo tipo de magnetismo que no ponto u;[940] isto é, que na hipótese dos dois fluidos magnéticos, que podem se deslocar em direção às duas extremidades das agulhas, se o ponto u[941] é direcionado para o ponto n; o ponto q que é vizinho a ele será direcionado para o ponto s, depois que esse ponto q tiver sido ultrapassado pelos dois ímãs: em nossa hipótese, na qual o fluido magnético pode mover-se apenas nas partes integrantes,[942] as moléculas u[943] e q, que são vizinhas, tendem a se imantar em sentido contrário; o que deve produzir uma diminuição do magnetismo próximo das extremidades das agulhas, onde o fluido magnético deve ser mais condensado, e que pode, nas agulhas muito compridas, assim como prova a experiência, dar origem a vários polos. Essa observação que só poderia ser o fruto das medidas exatas fornecidas por nossas experiências, me obrigou a modificar o método de imantar do Sr. Aepinus. Aqui vai, após várias tentativas, o método que pareceu ser mais vantajoso de acordo com a balança magnética.

Utilizo, para minha operação, de quatro ímãs muito fortes, feitos de acordo com um método que vou detalhar logo em seguida. Coloco, *Figura 12*, sobre um plano horizontal, meus dois ímãs fortes NS e NS, colocando-os em linha reta, de maneira que estejam afastados entre si de um valor algumas linhas menor que o comprimento da agulha ns que quero imantar.

Em seguida pego os dois ímãs $N'S'$, inclinando-os como no método de Aepinus, e os coloco inicialmente unindo seus polos sobre o centro m da agulha.[944] Em seguida puxo cada ímã, sem mudar sua inclinação, até a extremidade da agulha, e recomeço essa operação cinco ou seis vezes sobre as diferentes faces da agulha. É claro que nessa operação, os polos ns permanecendo fixos e invariáveis nas extremidades da agulha por meio dos dois fortes ímãs NS sobre os quais essa agulha é apoiada, o efeito produzido por esses dois ímãs pode apenas ser aumentado pela ação dos dois ímãs superiores que colaboram para imantar todas as moléculas da agulha na mesma direção.

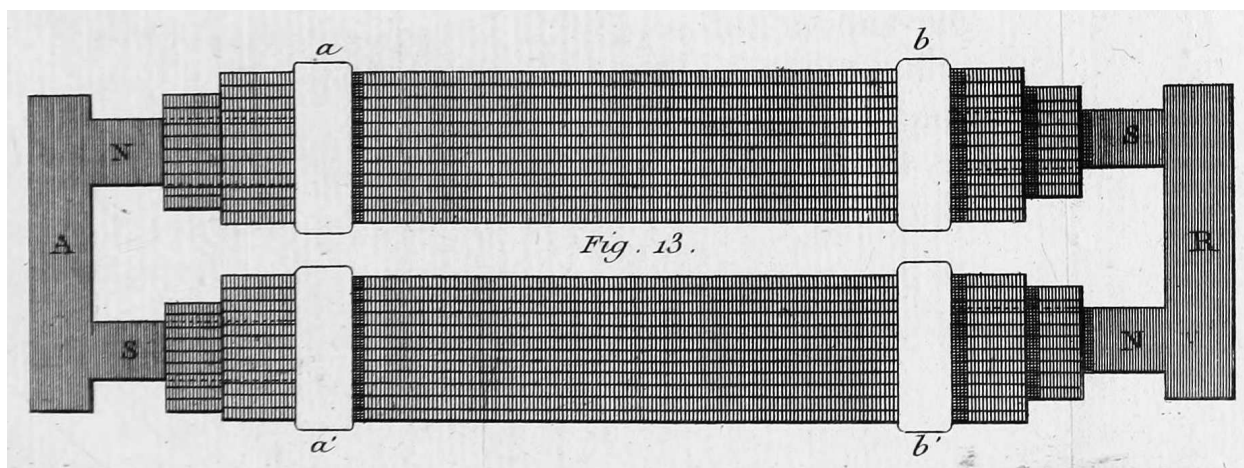
Da mesma forma que pela operação anterior, a agulha ns colocada entre os dois grandes

[940]No original aparece aqui μ em vez de u.
[941]No original aparece aqui μ em vez de u.
[942]Ou seja, na qual o fluido magnético pode desloca-se apenas no interior de cada molécula ou partícula da barra, sem passar de uma molécula para outra. Ver ainda a Nota de rodapé 333 na página 174.
[943]No original aparece aqui μ em vez de u.
[944]Acrescentei na Figura 12 a letra m que não aparece na imagem original.

ímãs adquire pela combinação das ações dos quatro ímãs, uma força polar mais intensa do que aquela que ela pode suportar quando a separamos desses ímãs. Resulta disso que no momento dessa separação, a agulha perde uma parte do magnetismo que ela deve a essas forças, e que seu magnetismo diminui até o ponto em que a ação magnética de toda a agulha sobre cada um de seus pontos esteja em equilíbrio com a força coercitiva. Assim, ao separar a agulha dos ímãs, ela encontra-se imantada até a saturação.

Encontrei ainda que ao imantar por nosso método, estávamos mais seguros de fornecer às superfícies das lâminas destinadas a formar as agulhas que têm o objetivo de indicar o meridiano magnético um grau uniforme de magnetismo; o que parece merecer uma grande atenção na construção das bússolas, caso a agulha seja suspensa de lado.

22.41 XLI. *Construção de Ímãs Artificiais*

Peguei, *Figura 13*, cerca de trinta lâminas de aço temperado e trazidas à consistência de uma mola, de 5 a 6 linhas de largura (1,1 a 1,3 cm), com 2 ou 3 linhas de espessura (0,45 a 0,68 cm), e com 36 polegadas de comprimento (97,45 cm).

As lâminas de folha, tais como as que encontramos no comércio, formam ímãs muito bons. É preferível a chapa de aço da Inglaterra, cortada em lâminas com uma polegada de largura [2,7 cm], temperada e recozida à consistência de uma mola, nos graus indicados na Seção 22.33. Quando utilizamos para cada ímã apenas 15 ou 20 libras (7 a 10 kg) de peso de aço, é suficiente dar às lâminas 30 a 36 polegadas (81 a 97 cm) de comprimento.

Imanto cada lâmina em particular, de acordo com o método prescrito na Seção anterior. Em seguida pego dois paralelepípedos retângulos de ferro bem doce e muito bem polido, com seis polegadas (16,24 cm) de comprimento, de 20 a 24 linhas (4,5 a 5,4 cm) de largura, e de 10 a 12 linhas (2,2 a 2,7 cm) de espessura. Formo com esses dois paralelepípedos, representados na *Figura 13*, em N e S, a armadura de meu ímã, ao envolver uma extremidade de cada paralelepípedo de uma camada de minhas lâminas de aço imantadas, de maneira que a extremidade dos paralelepípedos ultrapasse a extremidade das lâminas, de 20 a 24 linhas, e tal que a outra extremidade dos paralelepípedos se encontre envolvida pela extremidade das lâminas. Sobre essa primeira camada de lâminas de aço, com 3 a 4 linhas de espessura [0,68 a 0,90 cm], coloco uma segunda [camada] que tem 3 polegadas [8,12 cm] a menos de comprimento que a primeira, de maneira que a primeira [camada] ultrapasse essa segunda

em 18 linhas [4,07 cm] de cada lado. Fixamos tudo nas pontas por meio de dois aneis de cobre que apertam as lâminas e evitam que a armadura escape.

A *Figura 13* representa dois ímãs artificiais, compostos de acordo com o método que acabamos de prescrever; N e S são as duas extremidades dos dois paralelepípedos de ferro; as duas outras extremidades, engajadas entre as lâminas de aço, estão tracejadas nessa mesma Figura. Cada ímã assim composto é preso solidamente pelos aneis de cobre que estão marcados sobre os dois ímãs em a, b, a', b', os contatos colocados em A e B[945] reúnem os polos das armaduras.

A experiência me ensinou que com um aparelho dessa forma, cada ímã pesando 15 ou 20 libras [7 a 10 kg], seria necessário uma força de 80 a 100 libras para separar os contatos; e que ao colocar as agulhas comuns de bússola sobre as duas extremidades de nossas duas barras, compostas como na Figura 12, elas ficariam imantadas até a saturação, sem que fosse necessário atritá-las com os ímãs superiores. É inútil observar que quando quisermos obter ímãs com uma força maior, será necessário, na medida em que multiplicamos o número de lâminas, de aumentar seus comprimentos e as dimensões dos paralelepípedos de ferro que servem de armadura. Seria fácil avaliar as diferentes dimensões que devem possuir os ímãs de uma maneira suficientemente exata na prática, de acordo com as leis do magnetismo e a posição do centro de ação dos fios de aço com comprimentos e espessuras diferentes, tais como apresentamos no decorrer dessa Memória.

[945]Na Figura 13 aparece a letra R em vez da letra B.

Capítulo 23

Observações sobre a Sétima Memória de Coulomb

23.1 Cálculo do Momento Magnético de uma Agulha Imantada Quando a Densidade do Fluido Magnético Varia Linearmente ao Longo de Seu Comprimento

Na Seção 22.24 Coulomb apresentou o resultado do momento magnético de uma agulha imantada quando supôs a densidade linear do fluido magnético variando linearmente ao longo do comprimento da agulha, ver a Nota de rodapé 894 na página 446. Vou detalhar aqui como Coulomb chegou nesse resultado.

Inicialmente suponho um dipolo magnético composto por duas partículas separadas por uma distância $2x$ ao longo do eixo ℓ. Uma dessas partículas possui um fluido Norte de intensidade μ e está localizada em $\ell = x$, enquanto que a outra partícula possui um fluido Sul de intensidade $-\mu$ e está localizada em $\ell = -x$, Figura 23.1.

Figura 23.1: Dipolo magnético.

Essa configuração é chamada de dipolo magnético. O momento de dipolo magnético m é definido por

$$m = \sum_{i=1}^{2} \ell_i \cdot \mu_i = (-x)(-\mu) + x\mu = 2x\mu \ . \tag{23.1}$$

Na Figura 23.2 apresento uma agulha imantada sn de comprimento $2x$. Coulomb supôs na Seção 22.24 uma densidade linear de fluido magnético variando linearmente ao longo do

comprimento da agulha e tendo intensidade máxima A na extremidade da agulha. Representando essa densidade linear de fluido magnético pela letra λ vem então que sua variação ao longo do eixo ℓ é dada pela Figura 23.2:

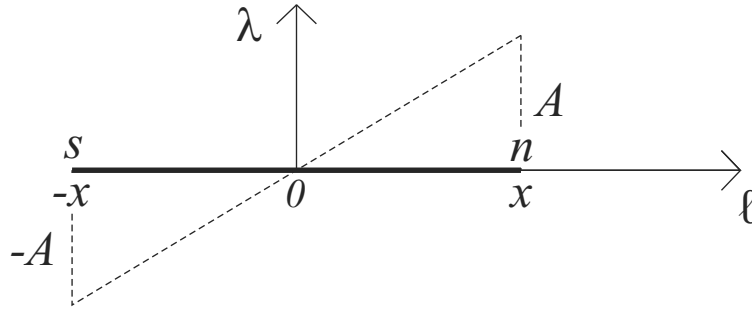



Figura 23.2: Agulha imantada com densidade linear do fluido magnético variando linearmente ao longo de seu comprimento.

Considerando essa agulha ao longo do eixo ℓ, com seu centro na origem 0 desse eixo, vem então que podemos assumir que λ varia em função de ℓ da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{A\ell}{x} \ . \tag{23.2}$$

Dessa forma temos $\lambda = -A$ quando $\ell = -x$, $\lambda = 0$ quando $\ell = 0$ e $\lambda = A$ quando $\ell = x$. A unidade de λ e de A é a unidade de fluido magnético pela unidade de comprimento. O momento de dipolo magnético dessa agulha é obtido pela Equação (23.1) ao substituir a somatória por uma integral ao longo da agulha:

$$m = \int_{\ell=-x}^{x} \ell \cdot d\mu = \int_{\ell=-x}^{x} \ell(\lambda d\ell) \ , \tag{23.3}$$

onde $\lambda = d\mu/d\ell$ é a densidade linear de fluido magnético. Utilizando a equação (23.2) e integrando obtém-se:

$$m = \int_{\ell=-x}^{x} \ell \frac{A\ell}{x} d\ell = \frac{A}{x} \int_{\ell=-x}^{x} \ell^2 d\ell = \frac{A}{x} \left[\frac{\ell^3}{3} \right]_{\ell=-x}^{x} = \frac{2Ax^2}{3} \ . \tag{23.4}$$

Essa foi a equação apresentada por Coulomb na página 446, ver a Nota de rodapé 894.

23.2 Figura 5 Refeita

A Figura 5 que aparece na página 448 da Seção 22.26 representa uma agulha cilíndrica imantada. Refiz essa imagem de Coulomb na Figura 23.3 para indicar mais claramente as letras:

Além disso, incluí as letras α, β, γ, σ, ϕ e θ para distinguir as partes da agulha. Os pontos 1, 2 e 3 estão ao longo do eixo do cilindro. O ponto 1 está na junção entre as partes α e β, assim como na junção entre as partes ϕ e θ. O ponto 2 está na junção entre as partes β e γ, assim como na junção entre as partes σ e ϕ. Já o ponto 3 no centro do cilindro está na junção entre as partes γ e σ.

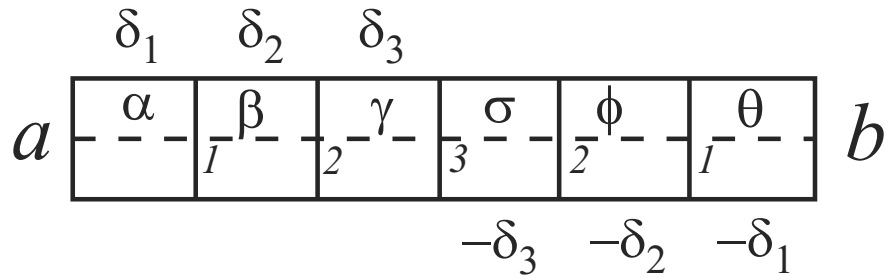



Figura 23.3: Figura 5 refeita.

Essa agulha cilíndrica *ab* está imantada até a saturação ao longo de seu eixo. Coulomb assume que a densidade de fluido magnético em cada parte é uniforme. Por simetria Coulomb assume ainda que a densidade magnética na primeira parte, α, é igual e oposta à densidade magnética na última e sexta parte θ. Ou seja, se a densidade magnética da primeira parte é δ_1, então a densidade magnética da sexta parte será $-\delta_1$. Da mesma forma a densidade δ_2 na segunda parte, β, é igual e oposta à densidade da quinta parte ϕ. Já a densidade δ_3 da terceira parte, γ, é igual e oposta à densidade da quarta parte σ. Por esse motivo substituí nessa Figura as densidades das partes σ, ϕ e θ por $-\delta_3$, $-\delta_2$ e $-\delta_1$ no lugar das densidades δ_3, δ_2 e δ_1 que aparecem na Figura original de Coulomb.

Capítulo 24

Determinação Teórica e Experimental das Forças que Trazem de Volta a Seus Meridianos Magnéticos Diferentes Agulhas Imantadas até a Saturação

Por Coulomb[946]

1. Nas diferentes Memórias que apresentei perante a Academia de Ciências encontrei por meio de minha balança de torção, por experiências que parecem decisivas, as principais leis da ação dos elementos do fluido magnético.

2. Resulta dessas experiências que, qualquer que seja a causa dos fenômenos magnéticos, todos esses fenômenos podem ser explicados e submetidos ao cálculo supondo nas lâminas de aço ou em suas moléculas, dois fluidos magnéticos,[947] as partes de cada fluido repelindo-se em razão direta de suas densidades e em razão inversa do quadrado da distância entre eles, e atraindo as moléculas do outro fluido na mesma razão; de maneira que cada lâmina de ferro ou aço contém em cada molécula, antes de ser imantada, uma quantidade suficiente dos dois fluidos para se saturar ou se equilibrar mutuamente, tal que os dois fluidos assim reunidos não exercem mais qualquer ação um sobre o outro.

3. Resulta dessa suposição que toda técnica de magnetizar uma lâmina consiste em separar os dois fluidos, e provei nas Memórias que acabo de citar que, quer eles sejam apenas separados em cada molécula de aço, ou transportados de uma extremidade da lâmina para a outra [extremidade], os resultados são os mesmos em termos de cálculo.

4. Porém, como esses dois fluidos que supomos separados nas lâminas imantadas atuam [entre si] para se reunir; eles de fato se reuniriam, caso não houvesse nas lâminas magnetizadas alguma força que impedisse essa reunião. A suposição mais simples para satisfazer a essa condição é uma força de adesão[948] desse fluido às moléculas do aço, [força essa] que o impede de se deslocar. Porém, caso exista essa força de adesão, ela possui um limite: assim todas

[946]Esse trabalho foi lido em 1799 no Instituto de Ciências da França, sendo publicado em 1801, [Coulomb, 1801a].

[947]No original: *fluides aimantaires*. Ver ainda [Gillmor, 1971a, pág. 216].

[948]No original: *force d'adhérence*.

as vezes em que a ação do fluido magnético sobre uma molécula desse fluido for maior que sua adesão ao aço, essa molécula se deslocará, e esse deslocamento continuará até que haja igualdade entre as forças que atuam sobre cada molécula magnética[949] para que ela se desloque, e a força de adesão que se opõe a esse deslocamento.

5. Resulta do Artigo anterior que a distribuição do fluido magnético em uma lâmina imantada fornece ao cálculo um problema indeterminado; pois esse fluido pode ser distribuído de todas as maneiras possíveis, desde que não exista qualquer ponto na lâmina no qual a ação que tende a deslocá-lo seja maior que a adesão do fluido em relação às moléculas do aço. Entre todas as suposições que podemos fazer para a distribuição desse fluido, e que tornam esse problema determinado, existe uma na qual podemos dizer que a agulha está imantada até a saturação: é aquela na qual cada ponto do fluido sofre da parte de todo o fluido da lâmina uma ação tendendo a deslocá-lo que é precisamente igual à ação que a coesão opõe a esse deslocamento. Como vemos, essa condição determina a disposição do fluido e nesse caso a questão pode ser submetida ao cálculo.

6. Conseguimos magnetizar até a saturação, ou ao menos a chegar muito próximo desse estado nas lâminas de aço, seja pelo método de toque duplo,[950] seja por aquele método que utilizo.[951,952] Por meio desse último método o fluido magnético é transportado de uma extremidade da lâmina à outra [extremidade] e, consequentemente, é separado pelas forças combinadas dos polos opostos de quatro ímãs fortes. Quando em seguida separamos a lâmina imantada dos ímãs, o fluido nas extremidades da lâmina possui uma densidade maior do que no estado de saturação, o que quer dizer que todo o fluido espalhado na lâmina atua sobre cada uma de suas moléculas com uma força maior do que a resistência oposta pela adesão: assim o fluido magnético desloca-se de cada ponto da agulha, até que exista por todo lado igualdade entre a ação que tende a deslocá-lo, e a adesão que se opõe a esse deslocamento.

Algumas vezes ocorre que nas lâminas que são muito longas em relação às suas outras dimensões, e sobretudo naquelas que são fortemente temperadas, que sejam formados vários centros magnéticos;[953] ou então pode ocorrer que o centro magnético não se situe no centro da agulha. Relataremos esse efeito em outra Memória; diremos apenas que é devido a essa dificuldade de colocar o centro magnético no centro de gravidade das lâminas, que devemos atribuir um fato absolutamente necessário de ser conhecido na construção das agulhas de bússola. Vai aqui no que ele consiste. Quando temperamos ao branco uma lâmina de aço longa e fina, que tenha, por exemplo, 330 milímetros de comprimento, 10 milímetros de largura e 1 milímetro de espessura, encontramos que a força diretriz que a traz de volta a seu meridiano é muito menor que no caso em que a agulha retorna à consistência de mola. O contrário ocorre nas agulhas pequenas: é necessário, para que o torque da força diretriz seja um *máximo*, que ela seja temperada ao vermelho-branco. Já encontrei uma parte desses fatos;[954,955] mas a essa altura já havia generalizado demais os resultados. Serei obrigado de voltar a eles em uma ou duas Memórias que vão se seguir imediatamente a essa daqui, e que terminarão o trabalho que realizei sobre as leis do magnetismo e seus usos na construção de agulhas imantadas.

[949]No original: *molécule aimantaire*. Essa molécula magnética seria uma partícula que conteria apenas um dos fluidos magnéticos. Ver ainda a Seção 4.5.

[950]Ver a Seção 4.6 na página 43.

[951][Nota de Coulomb:] Volume da Academia de Ciências para o ano de 1789, pág. 504.

[952][Coulomb, 1793, pág. 504]. Ver a Seção 22.40 na página 462.

[953]Ver a Nota de rodapé 112 na página 55.

[954][Nota de Coulomb:] Volume da Academia para o ano de 1789, pág. 494.

[955][Coulomb, 1793, pág. 494]. Ver a Seção 22.33, página 458.

7. Volto ao assunto dessa Memória que hoje submeto ao julgamento do Instituto. Em uma das experiências descritas na Memória que acabo de citar, reuni em feixes várias agulhas de fio de ferro e, ao imantá-las até a saturação assim reunidas, encontrei que ao formar feixes semelhantes, ou, o que dá no mesmo, no qual todas as dimensões correspondentes fossem proporcionais, esses feixes eram trazidos de volta ao meridiano magnético por forças cujo *torque* era como o cubo das dimensões semelhantes.[956] Em seguida tentei provar por um método de tentativa e erro que, em relação ao eixo de dois cilindros imantados até a saturação, a teoria fornecia o mesmo resultado.

Hoje tenho como objetivo provar que, qualquer que seja o formato de duas agulhas imantadas, desde que elas sejam semelhantes, ou seja que as partes correspondentes sejam proporcionais entre si, resulta da experiência que o torque de suas forças diretrizes em direção ao meridiano magnético é proporcional ao cubo de suas dimensões correspondentes.

Em seguida provarei por um método rigoroso que, de acordo com a teoria que acabo de explicar, esse resultado tinha de ocorrer. A junção dessas duas provas não vai deixar mais dúvidas, não sobre as causas do magnetismo, que sempre oferecerão um amplo leque [de discussão] para todos os sistemas, mas sobre as leis de acordo com as quais devemos calcular e determinar de uma maneira rigorosa todos os fenômenos magnéticos.

24.1 Primeira Experiência

8. Obtive duas agulhas de formato paralelogrâmico de uma mesma placa de aço laminado, elas tinha 250 milímetros de comprimento, 30 milímetros de largura, e aproximadamente 1 milímetro de espessura.

Reuni essas duas agulhas por seus planos, ligando fortemente as duas extremidades, de maneira a mantê-las em contato; logo em seguida elas foram imantadas até a saturação, as colocamos [juntas] na balança de torção da qual falaremos logo em seguida, e encontramos que para mantê-las a 27 graus de distância de seus meridianos, era necessária uma força de torção de 332 graus.

24.2 Segunda Experiência

9. Cortei uma terceira lâmina da mesma placa de aço que tinha precisamente a metade do comprimento e da largura da primeira lâmina. Como ela foi obtida da mesma placa, ela necessariamente tinha a metade da espessura das duas lâminas reunidas. Sendo essa lâmina imantada até a saturação, era necessária uma força de torção de 42 graus para mantê-la, assim como a primeira, a 27 graus de seu meridiano magnético.

24.3 Explicação e Resultado Dessa Experiência

10.[957] Expliquei nas *Memórias da Academia* para o ano de 1789[958] todos os detalhes da construção de uma balança de torção baseada nas leis da força de torção dos fios metálicos.

[956]Isto é, o torque era proporcional ao cubo de qualquer dimensão linear para agulhas com formatos semelhantes. Ou seja, o torque magnético exercido pela Terra é proporcional ao volume da agulha imantada.

[957]As Seções 10 e 11 não foram incluídas na reimpressão das obras de Coulomb preparada por Potier, [Potier, 1884].

[958][Coulomb, 1793]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 22.

Aqui vai o princípio dessa construção. Quando prendemos um cilindro a um fio de metal muito fino, de maneira que o eixo do cilindro encontre-se ao longo do prolongamento do fio e do ponto de fixação, vai haver uma orientação na qual esse cilindro vai ficar em repouso, e essa é a posição na qual a torção do fio é nula. Porém se girarmos esse cilindro ao redor desse eixo, sem perturbar o eixo da orientação vertical na qual se encontra, o fio vai torcer, e a força de torção, quando soltamos o cilindro, vai obrigá-lo a girar e a oscilar ao redor desse eixo. Ora, se observarmos com um relógio de segundos o tempo das oscilações, encontraremos que, sendo o ângulo de torção de apenas alguns graus ou de vários círculos,[959] as oscilações serão isócronas. Disso resulta, de uma teoria conhecida de todos os matemáticos,[960] que as forças de torção de um mesmo fio são proporcionais ao ângulo de torção. O valor absoluto dessa força de torção é determinado em seguida de maneira exata, de acordo com o tempo das oscilações do cilindro, do qual conhecemos o peso e o raio. Provei[961,962] que ao determinar a força de torção de um fio metálico, de acordo com as oscilações de um cilindro suspenso nesse fio, e girando ao redor de seu eixo por meio dessa força de torção, encontra-se que o torque dessa força era igual a $\left(\frac{Pa^2}{2\lambda}\right)$ multiplicado pelo ângulo de torção, no qual P é o peso do cilindro, a é o seu raio, e λ o comprimento do pêndulo que realiza oscilações isócronas com as oscilações do cilindro. Encontra-se no volume das *Memórias da Academia* para o ano de 1784 todos os detalhes da experiência e do cálculo necessários para determinar a força de torção de diferentes fios de suspensão em relação a seus comprimentos, a suas espessuras e a suas naturezas.

11. Nesse momento, para utilizar a força de torção de um fio metálico para determinar a razão da força que traz de volta duas agulhas a seus meridianos magnéticos, necessitamos apenas saber que a força de torção para o mesmo fio é proporcional ao ângulo de torção. De acordo com isso suspendemos em uma caixa, horizontalmente e sucessivamente por meio de um fio metálico, as duas agulhas imantadas, fazendo isso de tal maneira que a torção seja nula quando as agulhas estão ao longo de seus meridianos magnéticos. Em seguida torcemos o fio por meio de uma pinça que o prende na sua parte superior, e que possui um ponteiro que mede o ângulo de torção. Assim como em nossas duas experiências, fazemos isso de maneira que a torção seja tal que as lâminas imantadas se encontrem nos dois casos formando o mesmo ângulo com o meridiano magnético, e nessa situação o torque da força que traz de volta as duas agulhas ao meridiano magnético é proporcional ao ângulo de torção. Percebemos que para ter o verdadeiro ângulo de torção, é necessário remover do ângulo que percorre o ponteiro, aquele [ângulo] pelo qual a lâmina imantada, impulsionada pela força de torção, se afasta de seu meridiano.[963] Encontraremos no volume de 1789 das *Memórias da Academia* todos os detalhes de acordo com os quais podemos determinar as leis magnéticas por meio da balança de torção. Só é necessário observar que, na utilização desse instrumento, devemos observar as agulhas à direita e à esquerda do meridiano, obtendo uma média para corrigir o erro que pode resultar da incerteza da linha meridiana traçada sobre o centro da agulha, ou do ângulo original de torção em relação a esse meridiano.

12. Vai aqui o resultado da experiência anterior. A agulha na primeira experiência,

[959] Ou seja, sendo o ângulo de torção pequeno de alguns graus, ou grande de várias voltas completas ao redor do eixo.

[960] No original: *géomètres*. Essa palavra também pode ser traduzida como geômetras.

[961] [Nota de Coulomb:] *Memórias da Academia* para o ano de 1784.

[962] [Coulomb, 1787]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 7.

[963] Ou seja, o verdadeiro ângulo de torção é dado pelo ângulo indicado pelo ponteiro preso à parte superior do fio de torção, diminuído do ângulo da agulha em relação ao meridiano magnético. Apresento na Seção 13.1 uma ilustração desse procedimento.

composta de duas grandes lâminas, tinha todas as dimensões dobradas da pequena lâmina da segunda experiência. Assim, os cubos dessas dimensões estavam entre si :: 8 : 1. Encontramos para as forças de torção os números 322 e 41, que estão aproximadamente entre si :: 81 : 10. Assim os torques das forças que trazem de volta as duas agulhas a seus meridianos magnéticos, estão entre si como os cubos de suas dimensões semelhantes.

24.4 Terceira Experiência

13. Reuni três lâminas semelhantes às duas da primeira experiência, e para afastar essa agulha composta dessa forma de 21 graus de seu meridiano, encontrei que era necessária uma torção de 340 graus.

24.5 Quarta Experiência

14. Uma lâmina obtida da mesma placa, mas que tinha apenas um terço da largura e do comprimento das três [lâminas] anteriores, foi mantida a 21 graus de seu meridiano por uma força de aproximadamente 13,5 graus.

15. Nas duas últimas experiências, os cubos das dimensões semelhantes estão entre si :: 27 : 1. As forças de torção estão entre si em uma razão um pouco maior do que 25 para 1, quantidades que podemos considerar como muito próximas em experiências desse tipo.

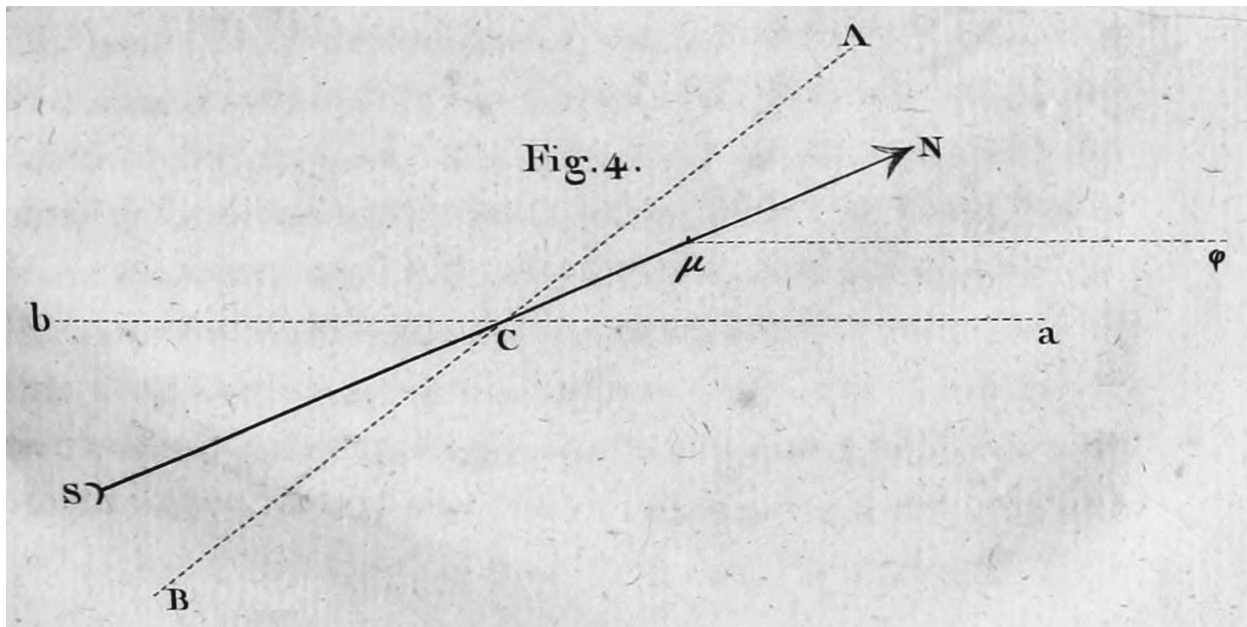
16. Enfim, para não haver qualquer dúvida sobre a continuidade dessa lei, quis comparar entre si agulhas paralelogrâmicas ou cilíndricas cuja razão dos cubos fosse representada por um número muito grande como, por exemplo, 150 para 1. Além disso, nas experiências anteriores, minhas primeiras agulhas eram de várias peças, e queria comparar entre si agulhas de uma única peça, para saber se as agulhas ou os ímãs, compostos de uma ou de várias peças, tinham a mesma força que as outras. Porém percebi de acordo com os resultados das experiências anteriores que ao colocar agulhas muito pequenas no suporte da balança magnética, [suporte esse] que é destinado a apoiar essas agulhas, tinha apenas, ao afastar essas pequenas agulhas de 20 ou 30 graus de seus meridianos, ângulos de torção muito pequenos, e que os erros de observação colocavam nesse caso a incerteza nos resultados. Decidi nesse último caso utilizar do método das oscilações que convém para esse tipo de experiência, e cujo cálculo é bem fácil quando queremos comparar entre si apenas figuras simples que possuem ao longo de todos os seus comprimentos o mesmo número de fibras iguais.

17. Aqui vai no que consiste esse método. Euler[964] havia encontrado antes de mim, e desenvolvi essa teoria no nono volume das *Mémoires des Savans étrangers*,[965] que quando uma agulha imantada, seja de formato paralelogrâmico ou cilíndrico, oscila formando ângulos pequenos com o meridiano magnético, o torque das forças que a trazem de volta a esse

[964] Ver a Nota de rodapé 129 na página 62.
[965] [Coulomb, 1780]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 5.

meridiano era bem exatamente representado pela fórmula[966,967]

[966][Nota de Coulomb:] Vai aqui a demonstração desse resultado. Na *Figura* 4, ab representa o meridiano magnético; $ACa = A$ representa o ângulo que a agulha forma com seu meridiano quando ela começa a oscilar ao redor de seu centro C, ângulo esse que supomos muito pequeno; φ representa a força magnética da Terra que atua sobre o ponto μ paralelamente ao meridiano magnético; NC representa a posição da agulha ao final do tempo t:

$$ACN = s \; ; \qquad NCa = (A - s) \; ; \qquad C\mu = r \; .$$

Sendo μ uma molécula magnética colocada em μ, temos para o torque da ação da Terra que traz de volta a agulha a seu meridiano CA [a seguinte expressão],

$$(A - s)dt \int \varphi\mu r \; ;$$

e sendo u a velocidade angular, teremos rdu para a aceleração do ponto μ, e $du \cdot \int \mu r^2$ para o torque da aceleração de toda a agulha. De onde resulta

$$(A - s) \int \varphi\mu r \cdot dt = du \int \mu r^2 \; ,$$

ou

$$(A - s)dt \frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2} = du \; .$$

Porém, se um pêndulo comum oscila, temos [ao supor L como sendo o comprimento desse pêndulo simples:]

$$(a' - s')dt \frac{g}{L} = du \; .$$

$$\frac{Pl^2}{3\lambda} ,$$

multiplicada pelo ângulo pelo qual ela é afastada desse meridiano, na qual P é o peso da agulha, l a metade de seu comprimento, e λ o comprimento de um pêndulo que realizaria oscilações isócronas à oscilação da agulha.

Assim caso, nas experiências nas quais queremos comparar duas agulhas semelhantes, fizermos P [como sendo] o peso da primeira, l seu comprimento, e λ o [comprimento do] pêndulo que realiza oscilações isócronas às vibrações dessa agulha; P', l' e λ' as grandezas correspondentes da segunda agulha; se denominarmos φ [como sendo] o momento magnético da primeira agulha, e φ' o momento magnético da segunda, teremos

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{Pl^2 \cdot \lambda'}{P'l'^2 \cdot \lambda} .$$

Porém como o comprimento de dois pêndulos está na razão do quadrado dos tempos das oscilações, caso T seja o tempo no qual a primeira agulha realiza um certo número de oscilações, e T' o tempo no qual a segunda agulha realiza o mesmo número de oscilações, teremos $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{T^2}{T'^2}$. Assim

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{Pl^2 \cdot T'^2}{P'l'^2 \cdot T^2} .$$

Porém como queremos comparar aqui as agulhas de dimensões semelhantes, sejam elas paralelogrâmicas ou cilíndricas, resulta que $\frac{P}{P'} = \frac{l^3}{l'^3}$. Assim

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{l^5 \cdot T'^2}{l'^5 \cdot T^2} .$$

Assim, se supormos, o que é permitido, as duas equações idênticas, a agulha e o pêndulo realizarão suas oscilações no mesmo tempo, e teremos nesse caso

$$\frac{\int \varphi\mu r}{\int \mu r^2} = \frac{g}{L} .$$

Porém, se h é a área que representa a seção reta da agulha, seção essa na qual supomos as dimensões muito pequenas em relação ao comprimento da agulha, teremos $\int \mu r^2 = \int hr^2 \cdot dr$, cuja integral é $\left(\frac{hr^3}{3}\right)$, e sendo R a metade do comprimento da agulha, teremos para toda a agulha $\frac{2hRR^2}{3}$. Assim

$$\int \varphi\mu r = g2hR\frac{R^2}{3L} ;$$

e como $g2hR$ representa o peso da agulha, temos

$$\int \varphi\mu r = \frac{PR^2}{3L} ,$$

quantidade essa que representa o torque da ação magnética que a força magnética da Terra exerce para trazer de volta a agulha a seu meridiano magnético.

[967] A Nota de rodapé 966 não foi incluída por Potier na reimpressão das obras de Coulomb, [Potier, 1884, pág. 326]. Por um lapso nessa Nota de rodapé, Coulomb escreveu $ACB = A$ em vez de $ACa = A$. Corrigi esse erro na Nota de Coulomb.

E caso φ/φ' fosse, assim como encontramos pelas experiências anteriores, proporcional a l^3/l'^3, teríamos, de acordo com essa fórmula,

$$\frac{l^3}{l'^3} = \frac{l^5 \cdot T'^2}{l'^5 \cdot T^2} , \qquad \text{ou} \qquad \frac{l'}{l} = \frac{T'}{T} ;$$

o que quer dizer que ao supor que os torques das forças magnéticas de duas agulhas de dimensões semelhantes sejam, assim como as experiências anteriores nos indicaram, proporcionais aos cubos de suas dimensões, devemos encontrar os tempos das oscilações proporcionais aos comprimentos das lâminas.

Consequentemente será fácil verificar, por essa razão bem simples, se a lei que nos foi indicada nas experiências anteriores ainda é válida quando o número que representa a razão dos cubos dessas dimensões é muito grande.

24.6 Quinta Experiência

18. Peguei duas lâminas paralelogrâmicas retangulares de aço fundido: a primeira pesava 100,31 gramas; a segunda 0,61 grama. As raízes cúbicas desses pesos estão entre si :: 5,5 : 1,0; essa é também a razão que demos para suas dimensões semelhantes. A primeira [lâmina] tinha 321 milímetros de comprimento, a segunda tinha 58 milímetros;[968] as outras dimensões estavam na mesma razão. Estando essas duas lâminas imantadas até a saturação, a primeira realizou 30 oscilações em 300", a segunda realizou 30 oscilações em 55".[969]

24.7 Resultado Dessa Experiência

19. Se pegarmos a raiz cúbica do peso das duas agulhas, encontraremos essas raízes muito aproximadamente :: 55 : 10. Estando os comprimentos, as larguras e as espessuras nas mesmas proporções, encontraremos [a razão do] tempo de um mesmo número de oscilações :: 300 : 55, [ou seja,] muito aproximadamente :: 55 : 10. Dessa maneira, estando os tempos de um mesmo número de oscilações assim como o comprimento das agulhas, resulta do cálculo do Artigo anterior que os torques das forças diretrizes estão entre si como os cubos das dimensões.

[A razão entre] os cubos das dimensões e, consequentemente, a razão das forças, encontra-se aqui :: 164 : 1. Isso não deixa qualquer dúvida sobre a verdade do resultado que estabelecemos de acordo com a experiência.

24.8 Sexta Experiência

20. Peguei duas agulhas cilíndricas de um excelente aço fundido, tais como encontramos difundido no comércio.

A primeira pesava 46,388 gramas; seu comprimento era de 322 milímetros. A pequena pesava 2,159 gramas; ela tinha 115 milímetros de comprimento.

A agulha grande realizava 10 oscilações em 90"; a pequena agulha realizava 10 oscilações em 32".

[968] A razão entre esses comprimentos era de 321/58 = 5,5/1,0.

[969] Isto é, a primeira realizou 30 oscilações em 300 segundos, a segunda em 55 segundos.

24.9 Resultado Dessa Experiência

21. A razão das raízes cúbicas dos pesos das duas agulhas é aproximadamente :: 28 : 10; a razão dos comprimentos das agulhas :: 28 : 10; a razão de um mesmo número de oscilações :: 90 : 32 :: 28 : 10.

Essas três razões calculadas rigorosamente, utilizando um número maior de algarismos, são tão próximas que, nas experiências desse tipo, podemos considerá-las como iguais.

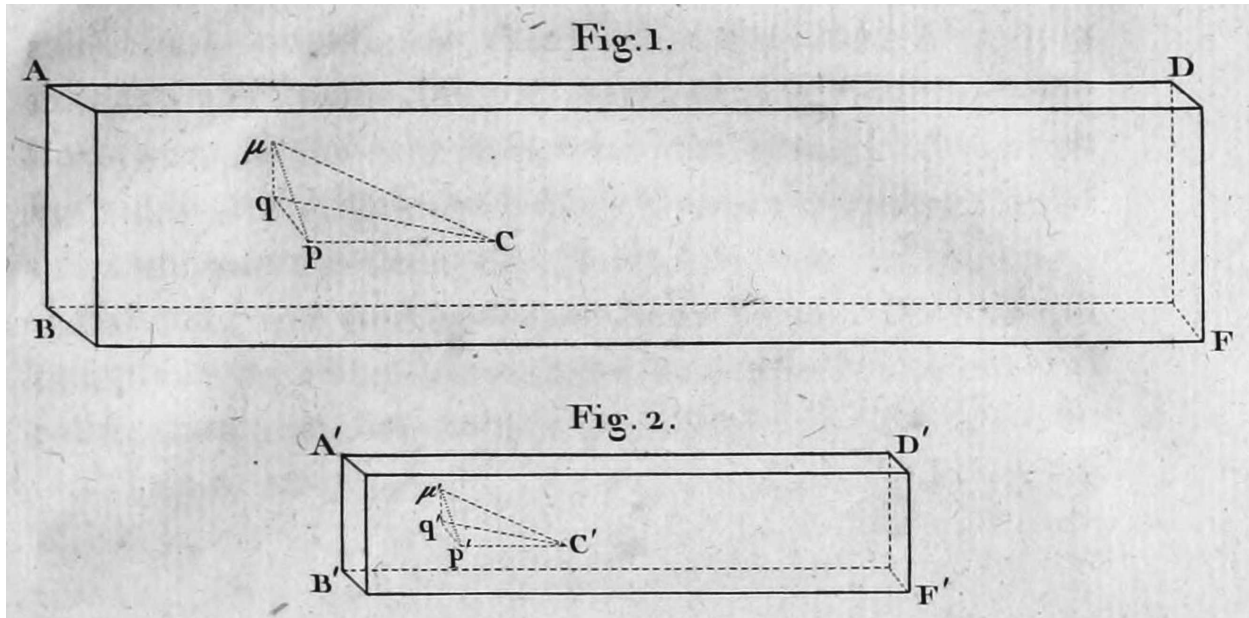
22. Não aumentarei inutilmente essa Memória de um número de experiências das quais todas me forneceram o mesmo resultado. Aviso apenas que, para que elas sejam bem sucedidas, é absolutamente necessário que as agulhas estejam no mesmo estado, quer dizer, ou recozidas ao vermelho-branco, ou temperadas ao vermelho-branco. O primeiro estado é preferível:

- Em primeiro lugar, porque nas agulhas assim recozidas, a menos que elas tenham um comprimento muito grande em relação às outras dimensões, é muito raro que seus centros magnéticos não as divida ao meio, ou que elas tenham vários centros.[970] É sempre necessário verificar isso antes de comparar as experiências.

- Em segundo lugar, porque se é muito difícil fornecer, ao temperar duas agulhas, precisamente o mesmo grau de têmpera; é ainda mais difícil, ao lhes recozer até o estado de mola, de lhes fornecer o mesmo grau de recozimento. E nesse caso, não sendo o estado do aço o mesmo nas duas agulhas, a adesão das moléculas magnéticas às moléculas do aço não é a mesma.[971]

22*.[972] Para preencher o objetivo dessa Memória, me resta ver a concordância do cálculo teórico com as experiências anteriores.[973]

As *Figuras* 1 e 2 representam dois paralelepípedos cujos lados são semelhantes.

[970] Ver a Nota de rodapé 112 na página 55.
[971] Ver as Notas de rodapé 319 e 337 nas páginas 163 e 176, respectivamente.
[972] por um lapso no original esse Artigo recebeu o mesmo número 22 que o Artigo anterior. Alterei sua numeração para 22*.
[973] O restante desse Artigo até o fim do Artigo 24 não foi incluído por Potier na reimpressão das obras de Coulomb, [Potier, 1884].

Escolhi essas Figuras por causa de suas simplicidades. Veremos logo em seguida que, quaisquer que sejam os corpos que comparamos entre si, desde que as duas figuras sejam semelhantes, pode ser aplicada a demonstração que vai em seguida.

Relaciono um ponto qualquer c[974] às três coordenadas perpendiculares entre si e paralelas às faces do paralelepípedo. Faço $cp = x$, $pq = y$ e $q\mu = z$.

Em seguida considero na paralelepípedo $A'B'D'F'$ um ponto c' colocado de maneira semelhante ao primeiro [ponto c].

Divido cada paralelepípedo em um número infinito de paralelepípedos semelhantes aos paralelepípedos $ABDF$ e $A'B'D'F'$; de maneira que cada paralelepípedo contenha um número igual deles.[975]

De acordo com essas suposições, a ação de uma molécula elementar colocada em μ sobre o ponto c será representada pela massa dessa molécula multiplicada por sua densidade,[976] e dividida pelo quadrado de sua distância [até o ponto c].

E se essa força for decomposta paralelamente ao eixo cp, teremos a força decomposta ao longo da direção desse eixo igual a

$$\frac{\delta dxdydzx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} ,$$

na qual δ é a densidade do fluido magnético em μ. Teremos para o pequeno paralelepípedo, ao denominar as letras com um acento, as quantidades correspondentes:

$$\frac{\delta' dx'dy'dz'x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} .$$

[974]Por um lapso no original aparece aqui ponto μ em vez de ponto c.

[975]Isto é, os paralelepípedos $ABDF$ e $A'B'D'F'$ vão ser compostos pelo mesmo número de pequenos paralelepípedos semelhantes.

[976]Coulomb está referindo-se aqui à força magnética exercida por uma partícula magnética μ atuando sobre uma outra partícula magnética localizada no ponto c. A quantidade de fluido magnético da partícula μ é dada por sua densidade volumétrica de fluido magnético, δ, multiplicada pelo volume $dxdydz$ infinitesimal ocupado pela partícula μ.

Porém, como supomos as moléculas, nos dois paralelepípedos, em igual número e de formatos semelhantes aos paralelepípedos que elas compõem, resulta dessa suposição que

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{l}{l'} = \frac{dx}{dx'} = \frac{dy}{dy'} \text{ , etc.,}$$

onde l e l' são os comprimentos dos dois paralelepípedos. Assim, a força que atua no segundo paralelepípedo fica na forma

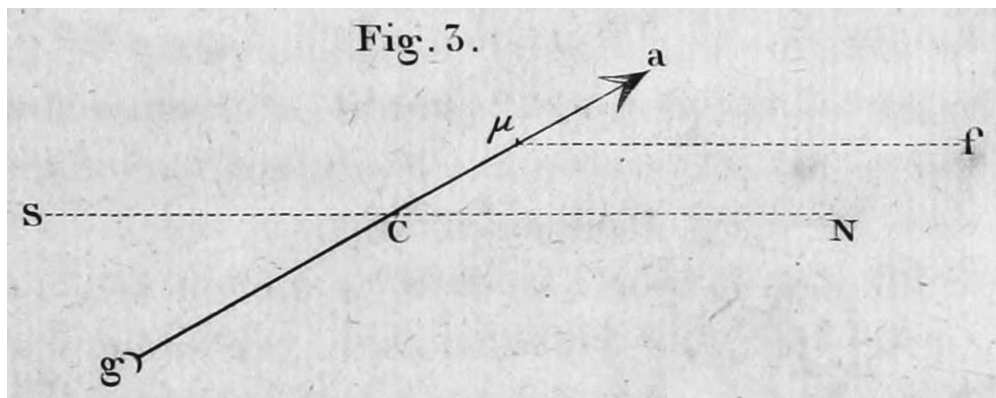
$$\frac{\delta' l'}{l} \frac{(xdxdydz)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \ .$$

De onde resulta que a ação de uma molécula magnética [atuando] sobre o ponto c no primeiro paralelepípedo, está para a ação correspondente no segundo paralelepípedo [atuando] sobre o ponto c' colocado semelhantemente :: $\delta : \frac{\delta' l'}{l}$.

Mas observaremos que cada um dos dois paralelepípedos contém um mesmo número de paralelepípedos semelhantes colocados semelhantemente em relação aos pontos c e c', e que sendo a mesma a adesão nos dois paralelepípedos, é necessário que a soma das ações de todas as moléculas magnéticas que atuam ao longo de pc no grande paralelepípedo, seja igual à ação magnética que atua semelhantemente sobre o ponto c' no paralelepípedo pequeno: o que acontecerá se assumirmos que as moléculas correspondentes nos dois paralelepípedos exercem sobre os pontos c e c' uma ação igual; de onde resulta $\delta' l' = \delta l$.

Assim as densidades magnéticas dos pontos correspondentes nos dois paralelepípedos semelhantes estão entre si em razão inversa dos comprimentos desses dois paralelepípedos.

23. Agora é necessário provar que, de acordo com essa razão entre as densidades, os torques das forças magnéticas que trazem de volta duas agulhas semelhantes a seus meridianos estão entre si como os cubos das dimensões semelhantes.

Na *Figura* 3, NS representa o meridiano magnético, ag uma fibra longitudinal considerada ao longo do comprimento da agulha, μ uma molécula dessa fibra, sobre a qual atua a força magnética da Terra ao longo de μf, paralelamente ao meridiano magnético.

Porém, como o centro de ação da Terra está a uma distância que podemos considerar como infinita em relação ao comprimento ga da agulha, resulta disso que ela[977] será em todo lugar proporcional à densidade do fluido da molécula μ, multiplicada por seu volume. O

[977]Ou seja, a força magnética exercida pela Terra.

torque dessa força, caso a agulha forme o ângulo aCN com seu meridiano magnético, será igual a $\delta\mu c\mu \cdot \operatorname{sen} aCN$.[978]

Se compararmos esse primeiro resultado com aquele que ocorreria para uma fibra semelhante e colocada semelhantemente no pequeno paralelepípedo, teríamos para essa fibra correspondente [o torque dado por][979] $\delta'\mu'c'\mu' \cdot \operatorname{sen} aCN$.

Assim, os momentos das duas moléculas correspondentes nos dois paralelepípedos,[980] estão entre si para um mesmo ângulo aCS :: $\delta \cdot c\mu \cdot \mu : \delta' \cdot c'\mu' \cdot \mu'$. Porém, sendo as moléculas semelhantes aos paralelepípedos,

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{l^3}{l'^3} \qquad \text{e} \qquad \frac{c\mu}{c'\mu'} = \frac{l}{l'} \ .$$

Encontramos antes que $\delta l = \delta' l'$. Logo teremos $\delta c\mu \cdot \mu : \delta' c'\mu' \cdot \mu' :: \delta l^4 : \delta' l'^4 :: l^3 : l'^3$,[981] da mesma forma que a experiência nos havia ensinado originalmente.

Assim, resulta igualmente da experiência e da teoria, que dois paralelogramos de aço de mesma natureza, e com o mesmo grau de recozimento e de têmpera, possuem os momentos de suas forças diretrizes como os cubos de suas dimensões semelhantes.[982]

24. Acreditamos ser necessário apresentar a teoria anterior em um caso particular no qual os cálculos elementares são bem simples. Porém é fácil perceber, e essa observação não é para aqueles que estão acostumados a tratar esses tipos de questões, que ocorre o mesmo resultado em todos os corpos de formatos semelhantes, já que sempre podemos considerar pontos colocados semelhantemente nos dois corpos semelhantes, e supor cada corpo dividido em moléculas cuja massa seja proporcional à massa total do corpo. Isso fornecerá ao mesmo tempo um número igual de moléculas em cada corpo, e todos os resultados anteriores. Isso é também o que prova a experiência. Pois, ao comparar entre si agulhas imantadas de formatos semelhantes, tais como aquelas que temos o hábito de utilizar nas bússolas, que são usualmente paralelepípedos retângulos longos e achatados, ou agulhas cilíndricas, ou agulhas em formato de flecha, achatadas ou cônicas, sempre encontrei que os momentos de suas forças diretrizes eram como os cubos de suas dimensões semelhantes.[983]

25. Quando comparamos entre si duas agulhas semelhantes, mas que não são da mesma natureza, nesse caso a adesão do fluido nas moléculas das duas agulhas de aço não é mais a mesma e, nos resultados do Artigo 23, ao invés de fazer $\delta l = \delta' l'$, é necessário, para que se mantenha o equilíbrio, fazer $\delta l : \delta' l' :: A : A'$, ou $\delta l A' = \delta' l' A$, ao supor A como sendo a força de adesão na primeira agulha, e A' a força de adesão da segunda.[984] Nesse caso, para ter os torques da força diretriz, ao invés de $\delta' l' = \delta l$, é necessário fazer $\delta' l' = \frac{A'\delta l}{A}$. Isso fornece

[978]Ou seja, o torque será dado pela densidade volumétrica de fluido magnético δ multiplicada pelo volume da partícula μ, multiplicado pela distância $c\mu$ e pelo seno do ângulo aCN.

[979]Por um erro de impressão no original aparece aqui: $\delta'\mu'c\mu' \cdot \operatorname{sen} aCN$.

[980]Isto é, os torques magnéticos exercidos pela Terra sobre as duas moléculas correspondentes localizadas nos dois paralelepípedos.

[981]Ou seja,

$$\frac{\delta c\mu \cdot \mu}{\delta' c'\mu' \cdot \mu'} = \frac{\delta l^4}{\delta' l'^4} = \frac{l^3}{l'^3} \ .$$

[982]Isto é, os torques magnéticos exercidos pela Terra sobre esses dois paralelogramos são proporcionais aos cubos de suas dimensões semelhantes, ou seja, são proporcionais aos seus volumes.

[983]Ou seja, os torques exercidos pela Terra eram proporcionais aos cubos das dimensões semelhantes.

[984]O restante desse trabalho a partir desse ponto não foi incluído por Potier na reimpressão das obras de Coulomb, [Potier, 1884, pág. 329].

a razão dos torques das forças magnéticas das duas agulhas semelhantes, mas de natureza diferente

$$:: \delta l^4 : \frac{A'}{A}\delta l l'^3 :: Al^3 : A'l'^3 \ .$$

Assim, em duas agulhas semelhantes, mas de natureza diferente, os torques das forças diretrizes estão entre si em uma razão composta da adesão do fluido magnético às moléculas de aço, e do cubo de uma das dimensões.

26. O método analítico que acabo de colocar sob os olhos do Instituto é totalmente elementar; ele parece dar origem a essa observação. A maior parte das questões de física apresenta fenômenos de atração, de repulsão e de coesão, dos quais quase sempre é mais curioso do que útil conhecer as causas, e raramente chegamos a elas. Mas não ocorre o mesmo para as leis de atração e de repulsão de acordo com as quais os corpos atuam uns sobre os outros. Uma vez conhecidas essas leis, qualquer que seja a posição das moléculas, caso essa posição seja dada, a questão reduz-se a um problema de análise que frequentemente é muito difícil de resolver, sobretudo quando muitos elementos atuam uns sobre os outros de acordo com leis diferentes; porém, quase sempre há em cada questão pontos de vista que os simplificam, e que são suficientes para verificar as leis que servem de base aos cálculos, e nos quais uma análise muitas vezes elementar pode ser feita.

Capítulo 25

Resultado de Diferentes Métodos Utilizados para Fornecer às Lâminas e Barras de Aço a Maior Intensidade Magnética

Por Coulomb[985]

1. Vimos[986] nas diferentes Memórias que apresentei sucessivamente, seja à Academia de Ciências ou ao Instituto, que as barras e lâminas de aço imantadas por certos métodos logo adquirem uma força magnética que elas não pode ultrapassar. Esse estado é aquele de saturação magnética; ele ocorre quando a resultante da ação magnética de todos os pontos imantados, que tendem a destruir o magnetismo de cada ponto magnetizado,[987] é tal que ela equilibra a força coercitiva ou a força de adesão do fluido magnético a cada molécula do aço que compõe uma lâmina no estado magnético.

2. Provei no Volume III das *Memórias do Instituto*, página 176 e seguintes,[988] que quando barras ou lâminas de dimensões semelhantes são imantadas até a saturação, resulta da experiência e da teoria que os torques das forças magnéticas que as direcionam em direção ao meridiano magnético estão entre si na razão do cubo de uma de suas dimensões ou, se quisermos, como [a razão de] seus volumes ou como [a razão de] seus pesos.

A experiência, já em 1789 (*Memórias da Academia de Ciências*, página 466),[989] me forneceu esse resultado, tanto mais fácil de verificar, pois quando ele ocorre, o cálculo indica que o tempo para um mesmo número de oscilações segue a razão de uma das dimensões; de maneira que se as dimensões correspondentes de duas barras que queremos comparar estão entre si como 2 está para 1, os tempos para a duração de um mesmo número de oscilações também estarão entre si assim como 2 está para 1.

3. Esse resultado, assim como todos aqueles de diferentes experiências que comuniquei, seja para a Academia de Ciências acima ou para o Instituto, prova, como já disse diver-

[985] Esse trabalho foi lido em 1802 no Instituto de Ciências da França, sendo publicado em 1806, [Coulomb, 1806].

[986] Potier não incluiu o Artigo 1 até a metade do Artigo 13 desse trabalho em sua reimpressão das obras de Coulomb, [Potier, 1884].

[987] Já que fluidos magnéticos de tipos opostos tendem a se atrair, neutralizando-se quando estão unidos.

[988] [Coulomb, 1801a]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 24.

[989] [Coulomb, 1789, pág. 466], ver a Seção 18.34 na página 339.

sas vezes, que todos os fenômenos magnéticos podem ser calculados, supondo *dois fluidos magnéticos cujas moléculas se atraem reciprocamente em razão inversa do quadrado das distâncias [entre elas], e repelindo suas próprias moléculas*[990] *na mesma razão*; supondo ainda, que *os dois fluidos, separados de uma maneira qualquer, podem ser mantidos nesse estado de separação por suas adesões ao aço: o limite dessa adesão determina a [intensidade]* máxima *de magnetismo ou o estado de saturação*. Não pretendo, como já disse várias vezes, indicar a causa do magnetismo, mas [apenas a existência de] uma lei que certamente ocorre, qualquer que seja a causa que a produz.

4. Para ter certeza de que uma agulha está imantada até a saturação, é necessário recorrer a um método para determinar exatamente a intensidade magnética dessa agulha, imantando-a de acordo com os diferentes métodos utilizados até o momento. Este é o objetivo da Memória que hoje apresento ao Instituto.

5. Nos contentamos por muito tempo, para medir a intensidade magnética, de sustentar pela extremidade da barra imantada um pedaço de ferro que carregávamos sucessivamente de pesos diferentes. Contudo, esse método que apenas torna conhecida a adesão do ferro ao ponto da barra com o qual ele está em contato, e que varia caso o ferro e a barra tenham um polimento maior ou menor, não pode ser aceito nas pesquisas precisas que devem ser verificadas pelo cálculo. O método mais exato para determinar pela experiência a intensidade magnética, consiste em suspender horizontalmente a barra imantada por meio de um fio não torcido de seda. Contamos então o tempo de duração de um certo número de oscilações, e deduzimos dessa forma a força que direciona a barra ao longo de seu meridiano magnético, a partir da duração de cada oscilação.

Aqui vai o fundamento desse método. Sendo o globo terrestre um ímã natural cujo centro de ação sobre a barra que oscila está a uma distância infinita em relação ao comprimento da barra, a velocidade das oscilações[991] aumentará necessariamente na medida em que for maior a intensidade magnética de cada ponto da barra. Podemos ver, no volume III das *Memórias de matemática e física do Instituto*, página 186,[992] que quando uma barra ou uma lâmina que tenha a mesma espessura ao longo de todo o seu comprimento, oscila ao redor de seu meridiano magnético, o torque da força que a direciona ao longo desse meridiano é expresso pela fórmula $\frac{Pl^2}{3\lambda}$, na qual P é o peso da barra, l representa a metade de seu comprimento, e λ o comprimento do pêndulo que realizaria oscilações de mesma duração que aquelas que a força magnética produz na barra.

Assim, se imantarmos a mesma barra por dois métodos diferentes e se observarmos os tempos de duração de um mesmo número de oscilações da barra imantada por esses dois métodos, estando os comprimentos de dois pêndulos na mesma razão que o quadrado dos tempos de um mesmo número de oscilações,[993] os torques das forças que direcionam a barra ao longo do meridiano magnético serão como a razão inversa do comprimento dos pêndulos e, consequentemente, os torques das forças serão como a razão inversa do quadrado dos tempos de um mesmo número de oscilações. Como vemos, esse fato faz com que a avaliação da força diretriz dependa de um cálculo muito simples.

6. Preferi hoje determinar a força magnética pelas oscilações de barras ao invés de determiná-la pela balança magnética, que utilizei em minhas primeiras Memórias, e cuja utilização é absolutamente necessária nas diferentes pesquisas do mesmo tipo, já que nem

[990]Isto é, repelindo moléculas que possuem o mesmo tipo de fluido magnético.

[991]No original: *la vitesse des oscillations*. Coulomb está se referindo aqui à frequência das oscilações.

[992][Coulomb, 1801a, pág. 186], ver a Nota de rodapé 966 na página 476.

[993]Ver a Nota de rodapé 444 na página 222.

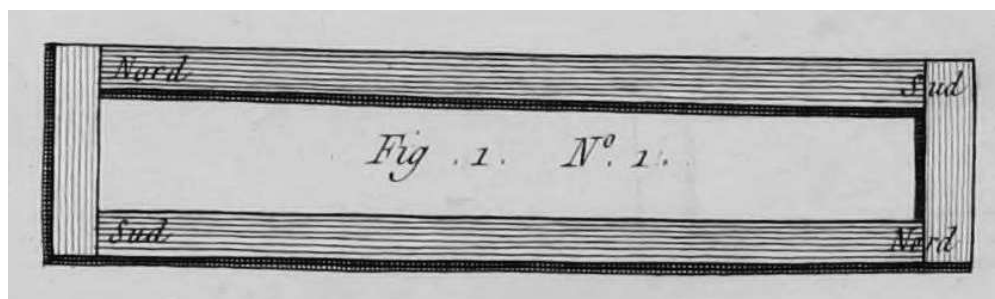
todos os físicos possuem essa balança à sua disposição e também porque ao observar um número muito grande de oscilações obtemos um grau de precisão que seria difícil de obter por meio de qualquer outro método. Além disso, para determinar a força diretriz por meio das oscilações, é necessário apenas um anel de tecido ou de papel suspenso por um fio não torcido de seda no qual introduzimos a barra para fazê-la oscilar, instrumento esse que sempre pode ser obtido sem necessidade de assistência ou mão-de-obra especializada. Passo agora aos diferentes métodos utilizados atualmente para imantar as lâminas e barras.

7. No primeiro método, que por muito tempo foi quase que o único método utilizado, deslizávamos em ângulo reto a lâmina ou barra que queríamos imantar sobre um dos polos de um ímã natural ou artificial.[994] Veremos em seguida que esse método só consegue imantar até a saturação agulhas com uma espessura muito pequena.

8. Após várias tentativas, o método que parecia estar próximo da teoria é aquele devido ao Sr. Knight. Encontramos os detalhes nas *Transactions philosophiques* de 1745.[995] Esse físico colocava duas barras fortemente imantadas em linha reta, juntando o polo Norte de uma barra ao polo Sul da outra barra. Depois ele colocava uma pequena barra temperada na cor cereja clara ao longo das barras grandes, com o centro da pequena barra correspondendo à junção das outras duas barras. Deslizando em seguida cada uma das barras grandes do seu lado até as extremidades da pequena barra, essa pequena barra ficava carregada dessa forma de uma força magnética maior do que aquela que havia sido possível obter antes dele.

Através desse método, caso as barras grandes que utilizamos sejam bem fortemente imantadas, as pequenas barras, quando elas são muito curtas e quando possuem uma espessura pequena, adquirem aproximadamente o grau de saturação magnética. Porém é impossível fornecer por esse método o estado de saturação a uma barra um pouco longa, qualquer que seja sua espessura.

9. As pequenas barras do Sr. Knight, que foram espalhadas por todos os laboratórios de física,[996] fizeram por essa época com que vários físicos buscassem outros métodos de fornecer às barras a mesma intensidade de magnetismo. O Sr. Duhamel, membro da Academia de Ciências, ao se reunir com o Sr. Antheaume para essa pesquisa, chegou a um método da maneira descrita a seguir.[997]

Ele forma (*Figura* 1, [Número 1],) um paralelogramo retângulo com duas barras de aço e dois paralelepípedos de ferro doce tendo um comprimento bem menor que as barras.[998]

[994]Ver a Figura 4.10 na página 46.

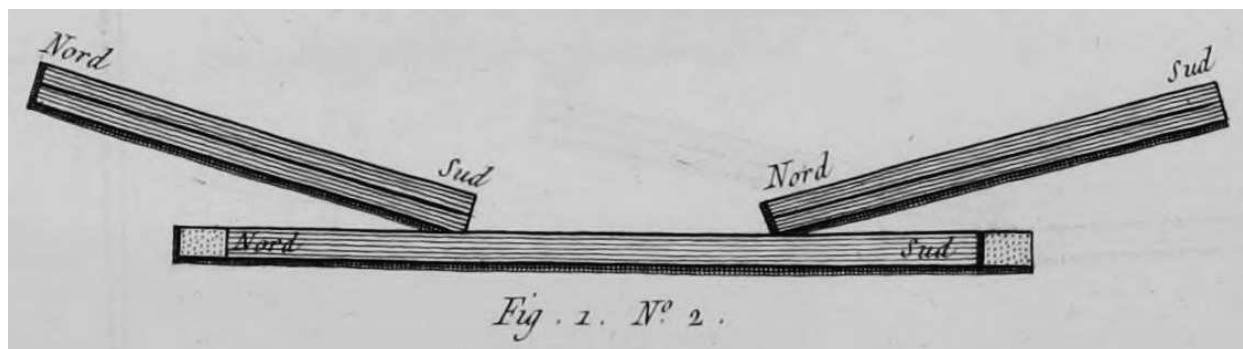
[995]Ver a Seção 4.6 na página 43. Ver também [Knight, 1744a], [Knight, 1744b] e [Knight, 1746].

[996]No original: *cabinets de physique*.

[997]Ver a Seção 4.6 na página 43. Ver também [Du Hamel, 1745], [Du Hamel, 1750] e [Antheaulme, 1760].

[998]Nas barras está escrito de cima para baixo e da esquerda para a direita: Norte, Sul, Sul e Norte. Porém, no início do processo essas barras de aço compridas ainda não estão magnetizadas. É dessa maneira que as barras vão ficar imantadas ao fim do processo descrito a seguir na Figura 1 Número 2 que aparece na página 488.

Em seguida ele pega dois feixes de barras já imantadas e junta os polos de nomes diferentes perto do centro de uma das barras do paralelogramo. Depois inclina esses feixes como vemos na Figura 1, Número 2, fazendo-os deslizar lentamente, cada um para seu lado, até a extremidade da barra.[999]

Fig. 1. N° 2.

A primeira Figura indica muito melhor a posição dos polos e o detalhe do processo do que uma descrição mais longa.

Veremos depois que esse método um pouco modificado é a melhor maneira que podemos empregar para imantar as agulhas de bússola e as lâminas que não possuem mais do que 2 ou 3 milímetros de espessura, desde que utilizemos, para os feixes que vão imantá-las, barras fortemente magnetizadas.

10. Aproximadamente na mesma época em que o Sr. Duhamel se ocupava em Paris dessas pesquisas, os Srs. Michel e Canton buscavam o mesmo objetivo na Inglaterra.[1000]

O Sr. Michel utilizava dois feixes de barras fortemente imantadas, ligadas paralelamente entre si, com os polos de nomes diferentes reunidos em cada extremidade, contudo de tal maneira que restava entre eles um intervalo de 7 a 8 milímetros. Em seguida ele colocava várias barras iguais em linha reta e deslizava em ângulo reto uma das extremidades do feixe ao longo da linha formada pelas barras que ele queria imantar. Encontrou por esse método que as barras intermediárias ao longo do linha reta adquiriam uma grande intensidade magnética, o que é verdadeiro, embora essa intensidade de magnetismo não forneça jamais o [valor] máximo ou o ponto de saturação.

11. O Sr. Canton colocava a barra que ele queria imantar em um paralelogramo similar àquele que descrevemos ao relatar o procedimento do Sr. Duhamel. Inicialmente ele utilizava, para imantar suas barras, o método do Sr. Michel. Depois, ao separar os dois feixes, ele os inclinava sobre a barra, como o Sr. Duhamel, e os deslizava como ele até suas extremidades. Esse último método que aumentou, disse ele, a força magnética da barra, era, como vemos, precisamente o método do Sr. Duhamel. E o procedimento que ele utilizou, que jamais fornece o grau de saturação, era inútil.

12. Não creio ser necessário falar de vários outros métodos já que todos eles podem ser relacionados aos métodos anteriores. Porém, não se deve confundir esses métodos com aquele do Sr. Aepinus que é, de acordo com esse autor, uma correção do método de toque duplo do

[999]Ou seja, o feixe inclinado da esquerda desloca-se do centro para a extremidade esquerda da barra deitada, enquanto que o feixe inclinado da direita desloca-se do centro para a extremidade direita da barra deitada. Ao final do processo a extremidade esquerda dessa barra deitada vai ficar imantada com um polo Norte e sua extremidade direita vai ficar com um polo Sul.

[1000]Ver a Seção 4.6 na página 43. Ver também [Michell, 1750], [Canton, 1752] e [Michell and Canton, 1752].

Sr. Canton.[1001] Esse método é baseado em um teoria análoga à teoria do Sr. Franklin sobre eletricidade.[1002] Ele possui uma vantagem muito grande sobre todos os outros métodos quando é necessário imantar barras muito espessas utilizando feixes [imantados] que não possuem uma força magnética muito grande. Aqui vai no que consiste esse método.

Depois de ter formado com as barras imantadas e com dois pequenos paralelepípedos de ferro o paralelogramo do Sr. Duhamel, inclinamos dois feixes de barras imantadas, de maneira que cada um deles forme de seu lado um ângulo de 15 ou 20 graus com a barra que queremos imantar; colocamos seus polos Sul e Norte a uma distância muito pequena entre si; e nesse estado, sem alterar a distância entre esses polos, deslizamos conjuntamente os dois feixes alternadamente desde o centro da barra até sua extremidade, partindo sempre, em cada operação, do centro da barra.[1003]

Vemos que por esse método fazemos não apenas com que a ação dos dois polos desses feixes contribuam para transportar ou separar os fluidos magnéticos de uma extremidade da barra até a outra extremidade, como ocorre nos métodos dos Srs. Michel e Canton, mas ainda observamos que ao inclinar bastante os feixes, estamos executando essa ação da maneira mais vantajosa. Esse método possui vantagem sobre todos os outros métodos quando queremos imantar barras bem grossas utilizando feixes fracamente imantados, embora ele jamais forneça em qualquer caso exatamente o ponto de saturação. Pois, se colocarmos as lâminas ou barras imantadas por esse método sob uma folha de papel sobre a qual espalhamos a limalha [de ferro], veremos que o centro magnético[1004] nunca estará colocado no centro da lâmina, mas estará sempre alguns milímetros mais perto da extremidade da lâmina que foi imantada por último.[1005]

Contudo, como as barras imantadas por esse método possuem, de acordo com a experiência, uma força diretriz ao longo de seus meridianos que difere apenas de uma trigésima parte da força diretriz dada pelo estado de saturação, esse método é preferível a todos os outros, como logo veremos, caso imantemos barras muito grossas, e quando não temos à disposição feixes [imantados] com uma grande intensidade magnética.

13. Após me familiarizar com os métodos anteriores e, na medida do possível, em conformidade com as indicações da teoria, apresento aqui o aparelho que utilizo para imantar facilmente as barras e lâminas de todas as dimensões. Já descrevi esse instrumento nas *Memórias da Academia de Ciências de Paris*, ano de 1789.[1006]

Por meio de dez barras de aço temperadas na cor cereja claro, *Figura* 2, tendo cada uma de 5 a 6 decímetros de comprimento, 15 milímetros de largura e 5 [mm] de espessura, formo duas camadas com cinco barras cada uma, separadas nas duas extremidades por um

[1001]Ver a Seção 4.6 e [Aepinus, 1979].

[1002]Ver a Nota de rodapé 51 na página 32.

[1003]A palavra "alternadamente" aqui significa que os dois feixes são atritados em conjunto contra a lâmina, deslizando juntos do centro para uma das extremidades da lâmina, depois deslizando juntos do centro para a segunda extremidade da lâmina, deslizando novamente juntos do centro para a primeira extremidade da lâmina, e assim sucessivamente.

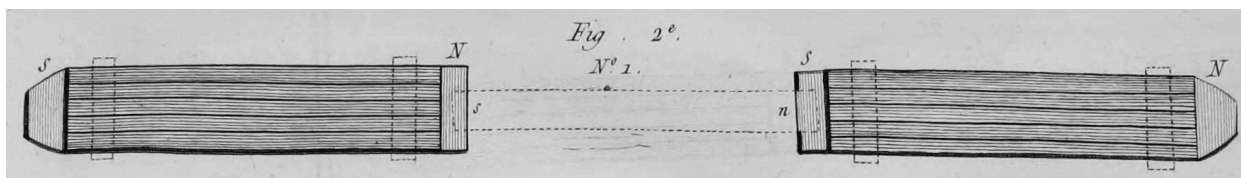
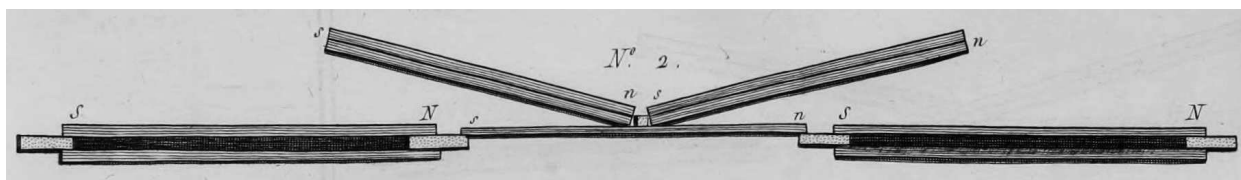
[1004]Ver a Nota de rodapé 112 na página 55.

[1005]No método de Aepinus os feixes previamente magnetizados são atritados em conjunto contra a lâmina que se quer imantar, deslizando juntos do centro da lâmina até uma de suas extremidades. Em seguida os feixes são colocados novamente no centro da lâmina, deslizando juntos até a outra extremidade. Esse procedimento vai sendo alternado até que a lâmina atinja a imantação desejada.

O problema desse método é que o centro magnético da lâmina, ou seja, o ponto neutro onde ela não está imantada entre seus polos Norte e Sul, não fica localizado exatamente no centro da lâmina, ficando um pouco mais próximo da extremidade da lâmina cuja metade foi atritada por último.

[1006][Coulomb, 1793]. Essa Memória está traduzida no Capítulo 22. Ver, em especial, a Seção 22.40.

paralelepípedo de ferro bem doce que tem 75 milímetros de largura, isto é, uma largura igual à largura das cinco barras reunidas lado a lado, 80 milímetros de comprimento e de 7 a 8 milímetros de espessura. Esse paralelepípedo é colocado entre as duas camadas de barras, encaixado em suas extremidades aproximadamente sobre a metade de seu comprimento;[1007] de maneira que tendo as barras sido cada uma imantada em separado antes de serem reunidas, esses paralelepípedos de ferro formam uma espécie de armadura para essas barras.

A Figura 2, Número 1, representa esse ímã com suas armaduras, visto do topo.[1008]

A Figura 2, Número 2, representa a seção reta ao longo de seu comprimento.[1009]

Os dois ímãs,[1010] assim como os dois feixes, são colocados como devem estar quando

[1007]Creio que aqui deveria ser "sobre a metade de sua largura".

[1008]Do lado esquerdo vemos 5 barras lado a lado, já imantadas, com seus polos S na extremidade esquerda e com seus polos N na extremidade direita. Abaixo delas são colocadas outras 5 barras lado a lado, também com seus polos S na extremidade esquerda e com seus polos N na extremidade direita. Esse conjunto de 10 barras vai ser um dos ímãs que Coulomb vai mencionar a seguir.

Do lado direito vemos outras 5 barras lado a lado, já imantadas, com seus polos S na extremidade esquerda e com seus polos N na extremidade direita. Abaixo delas são colocadas outras 5 barras lado a lado, também com seus polos S na extremidade esquerda e com seus polos N na extremidade direita. Esse outro conjunto de 10 barras vai ser um dos outros ímãs que Coulomb vai mencionar a seguir.

As armaduras são representadas pelos paralelogramos brancos, dois deles em cada conjunto de 10 barras, separando as 5 barras superiores das 5 barras inferiores.

Entre esses dois conjuntos aparece um longo retângulo horizontal pontilhado que representa a lâmina que vai ser imantada. Os polos s e n indicados nessa lâmina representam os polos magnéticos que ela vai adquirir após a imantação.

[1009]A lâmina central horizontal é a lâmina de aço que vai ser imantada. As letras s e n sobre ela indicam como ela vai ficar imantada ao final do processo.

Temos dois feixes inclinados nessa Figura, já imantados, com seus polos invertidos colocados sobre a lâmina horizontal central que vai ser imantada. O feixe da esquerda tem um polo superior s e um polo inferior n. Já o feixe da direita tem um polo superior n e um polo inferior s. Existe um pequeno quadrado entre esses feixes que representa uma lâmina de chumbo que vai mantê-los unidos com uma separação constante enquanto são deslizados em conjunto do centro da lâmina horizontal até sua extremidade esquerda, ou então do centro da lâmina horizontal até sua extremidade direita, nos casos em que Coulomb vai utilizar o método de imantação de Aepinus.

Do lado esquerdo dessa Figura as letras S e N representam o primeiro conjunto de 10 barras imantadas visto de cima na Figura 2, Número 1. Do lado direito dessa Figura as letras S e N representam o segundo conjunto de 10 barras visto de cima na Figura 2, Número 1.

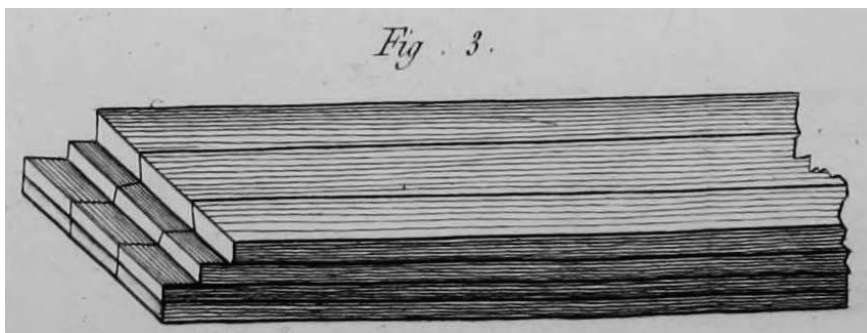
As quatro armaduras separando as barras superiores das barras inferiores de cada ímã são representadas pelos quatro pequenos retângulos horizontais com pontos espalhados em seus interiores.

[1010]Cada ímã é um composto por um conjunto de 10 barras imantadas mencionadas anteriormente.

começamos a imantar uma barra ou uma lâmina. As letras N, S e n, s, representam a natureza e a posição dos diferentes polos. Assim, durante o procedimento, os grandes ímãs permanecem parados, colocados em linha reta, quase à distância do comprimento da lâmina que queremos imantar,[1011] e essa lâmina deve ultrapassar apenas 4 ou 5 milímetros além da extremidade das armaduras.

Os polos inferiores dos feixes destinados a deslizar sobre a lâmina que queremos imantar devem estar afastados entre si de apenas 5 ou 6 milímetros, se utilizarmos o método do Sr. Aepinus. Mantemos esses polos a essa distância constante, durante todo o procedimento, por meio de uma pequena lâmina de chumbo que os separa. Porém observo novamente que quando a lâmina que queremos imantar tem no máximo 2 ou 3 milímetros de espessura, como no caso de quase todas as agulhas de bússola, fornecemos mais seguramente o grau de saturação a essas lâminas colocando, como na Figura, os dois polos Norte e Sul dos dois feixes no meio da lâmina, e deslizando os dois feixes, cada um para seu lado, até as extremidades da lâmina, mantendo uma inclinação de 20 ou 30 graus.[1012]

Cada um dos feixes deslizantes que utilizo são compostos, nas operações comuns, de quatro barras com 400 milímetros de comprimento, 5 [mm] de espessura e 15 [mm] de largura. Após tê-las imantado fortemente, ligo duas [barras] ao longo da largura[1013] e duas ao longo da espessura;[1014] o que fornece a cada feixe 30 milímetros de largura e 10 [mm] de espessura.

Antes de reunir as barras [para formar os dois feixes], elas são temperadas na cor cereja claro e imantadas até a saturação. Quando quero imantar barras grossas, sou obrigado a formar meus feixes com um número maior de barras colocadas umas sobre as outras de forma escalonada, retraídas de 10 ou 12 milímetros no sentido da espessura. A Figura 3 representa a extremidade de um feixe desse tipo.

O aço desses feixes é o aço estampado com sete estrelas;[1015] sua qualidade é medíocre. Mas já observei como devemos fazer para que os aços temperados, a menos que fossem de

[1011]A distância a que Coulomb se refere aqui é a distância entre a extremidade direita do ímã da esquerda e a extremidade esquerda do ímã da direita, isto é, entre os pontos N e S centrais da Figura 2, Número 2. Por essa Figura é possível perceber que essa distância é um pouco maior do que o comprimento da lâmina central que vai ser imantada.

[1012]Nesse último caso em que os feixes se afastam, indo do centro para as extremidades da lâmina que se quer imantar, Coulomb está utilizando o método de Duhamel aperfeiçoado. Nesse procedimento não se utiliza a lâmina de chumbo que, no caso do método de Aepinus, mantém as extremidades inferiores dos feixes a uma distância constante entre si durante o processo.

[1013]Isto é, colocadas lado a lado.

[1014]Ou seja, com duas barras colocadas lado a lado reunidas sobre outras duas barras colocadas lado a lado.

[1015]No original: *l'acier timbré à sept étoiles*. Esse é um tipo de aço vendido no comércio na época de Coulomb.

uma qualidade muito ruim, adquiram aproximadamente o mesmo grau de magnetismo.

Após ter dado uma ideia, que me parece ser suficiente, dos diferentes métodos de imantação utilizados até o momento, vou submetê-los à experiência e compará-los.

25.1 Primeira Experiência

14. Um fio de aço com 300 milímetros de comprimento e 1 milímetro de diâmetro, deslizou em ângulo reto sobre o polo de uma única barra imantada tendo 400 milímetros de comprimento, 15 milímetros de largura e 5 [mm] de espessura. Sendo colocado em oscilação em um plano horizontal e suspenso em um fio de seda muito fino, realizou dez oscilações em 74”.[1016]

Ao deslizar em ângulo reto sobre os polos de quatro e [sobre os polos] de dez barras [imantadas] reunidas, ele realizou igualmente dez oscilações em 74”.

Ao imantar esse fio pelo método[1017] do Sr. Duhamel ou por aquele do Sr. Aepinus, ele realizou igualmente dez oscilações em 74”.

Assim, todos os métodos fornecem a mesma intensidade de magnetismo para os fios de aço com um diâmetro muito pequeno, sendo esse grau de magnetismo aquele da saturação.

25.2 Segunda Experiência

15. uma lâmina de aço recozida, tendo 300 milímetros de comprimento, 8 [mm] de largura, $\frac{6}{10}$ de milímetro de espessura, deslizando em ângulo reto sobre o polo de uma única barra [imantada], realizou dez oscilações em 77”.

[Após deslizar] sobre os polos de duas barras reunidas, [realizou] dez oscilações em 75”.

[Após deslizar] sobre os polos de dez barras reunidas, [realizou] dez oscilações em 75”.

Tendo uma única barra [imantada] de cada lado, [sendo a lâmina imantada] pelos métodos dos Srs. Duhamel e Aepinus, [ela realizou] dez oscilações em 75”.[1018]

25.3 Terceira Experiência

16. Uma lâmina de aço com 164 milímetros de comprimento, 9 [mm] de largura, $\frac{6}{10}$ [mm] de espessura, temperada na cor cereja claro, após ter deslizado em ângulo reto sobre os polos de duas barras [imantadas] reunidas, realizou dez oscilações em 51”.

[Após deslizar] sobre os polos de quatro barras [imantadas] reunidas, [realizou] dez oscilações em 49”.

[Após deslizar] sobre os polos de oito e [sobre os polos] de dez barras [imantadas] reunidas, [realizou] dez oscilações em 47,5”.

[1016]Isto é, em 74 segundos. Deve ser lembrado que cada oscilação para Coulomb dura a metade da definição moderna do período de oscilação, ver a Seção 6.3 na página 139.

[1017][Nota de Coulomb:] Na sequência dessa Memória sempre denominarei de método do Sr. Duhamel àquele método no qual, ao colocar uma lâmina sobre meu instrumento descrito no Artigo 13, deslizamos os dois feixes em sentidos opostos, até alcançarem as armaduras. Denominarei de método do Sr. Aepinus ao método no qual os polos dos feixes que deslizam sobre a lâmina que estamos imantando permanecem sempre a uma distância [fixa] de 5 ou 6 milímetros.

[1018]Quando Coulomb afirma que tem uma única barra de cada lado, creio que ele está se referindo às barras imantadas horizontais que ficam de cada lado da lâmina de aço que se quer imantar, como mostrado na Figura 2, Números 1 e 2.

Porém, ao utilizar apenas duas barras [imantadas] reunidas, e deslizando-as com um ângulo de inclinação de 15 a 20 graus sobre a lâmina, [após esse procedimento a lâmina] realizou igualmente dez oscilações em 47,5".

Pelos métodos dos Srs. Duhamel e Aepinus, a lâmina imantada com uma única barra de cada lado, ainda realizou dez oscilações em 47,5".

Só é necessário observar que, pelo método do Sr. Aepinus, encontramos uma duração de meio segundo e algumas vezes de um segundo a mais do que pelo método do Sr. Duhamel.

25.4 Observação sobre as Três Experiências Anteriores

17. Nas duas primeiras experiências, tanto o fio de aço quanto a lâmina eram recozidos na cor cereja claro. Nesse estado, as duas barras [imantadas] reunidas pelos mesmos polos, e até mesmo uma única barra, deslizando em ângulo reto sobre o fio de aço ou sobre a lâmina, eram suficientes para imantá-los até a saturação. Porém, na terceira experiência, na qual a lâmina era temperada na cor cereja claro, foi apenas com um feixe de oito ou dez barras que conseguimos imantar essa lâmina até a saturação, ao deslizar a lâmina em ângulo reto sobre a extremidade do feixe. Porém, ao fornecer à direção da ação do feixe uma orientação mais vantajosa, ou seja, inclinando-o de 15 a 20 graus sobre a lâmina, [nesse caso] duas barras reunidas pelo mesmo polo foram suficientes para fornecer o grau de saturação.

18. Nas duas últimas experiências as lâminas possuíam apenas $\frac{6}{10}$ de milímetro de espessura: elas eram facilmente penetradas pela ação magnética de um único feixe ao longo de todo o seu comprimento. Logo não devemos nos surpreender que todos os métodos sejam igualmente bons, desde que utilizemos feixes com uma grande intensidade magnética. Nas experiências que vão a seguir, as lâminas e as barras possuem uma espessura maior e são temperadas na cor cereja claro.

25.5 Quarta Experiência

19. Uma lâmina com 202 milímetros de comprimento, 14 milímetros de largura, 1 milímetro de espessura, após ter deslizado várias vezes em ângulo reto sobre o polo de uma única barra [imantada], realizou dez oscilações em 73".

[Após deslizar] sobre o polo de quatro barras reunidas, [realizou] dez oscilações em 62".

[Após deslizar] sobre o polo de dez barras reunidas, [realizou] dez oscilações em 59".

Porém, com um único feixe [composto] de duas barras, deslizando com uma inclinação de 15 graus em relação à lâmina, ela realizou dez oscilações em 53".

[Um feixe] com a mesma inclinação composto de quatro barras reunidas, [a lâmina realizou] dez oscilações em 49".

[Um feixe] com a mesma inclinação contendo oito ou dez barras, [a lâmina realizou] dez oscilações em 49".

[Após ser imantada] pelos métodos dos Srs. Duhamel e Aepinus, com uma única barra [imantada] de cada lado, ou tendo um número maior [de barras imantadas de cada lado], [a lâmina realizou] dez oscilações em 49".

25.6 Observação sobre Essa Experiência

20. Como temos aqui a mesma lâmina imantada por métodos diferentes, a força que a direciona ao longo de seu meridiano é medida pelo inverso do quadrado do tempo [necessário para realizar] um mesmo número de oscilações.[1019] Vemos assim que, mesmo ao reunir dez barras [imantadas] e fazendo-as deslizar em ângulo reto, ainda falta muito para que ela esteja imantada até a saturação. Porém, chegamos facilmente [a esse estado de saturação] utilizando um único feixe [composto] de quatro barras [imantadas], ao fornecer à sua ação magnética sobre a lâmina uma direção mais vantajosa, ou seja, uma inclinação de 15 a 20 graus. Duas barras são suficientes ao utilizar os métodos dos Srs. Duhamel e Aepinus para fornecer a essa lâmina o estado de saturação. Porém, uma observação muito importante é que sempre há desvantagem em utilizar lâminas com mais de 1 milímetro de espessura para formar as agulhas de bússola, como já observei frequentemente nas diferentes Memórias anteriores a essa. [Logo,] desde que sejam reunidas quatro ou seis barras fortemente imantadas, elas sempre serão suficientes para dar a essas agulhas [com até 1 mm de espessura] o grau de saturação magnética.

21. Querendo imantar várias lâminas similares à lâmina anterior, reunindo-as uma sobre a outra antes de imantá-las, acreditei que, para lhes fornecer o grau de saturação de acordo com os resultados que acabo de encontrar, deveria utilizar apenas os procedimentos dos Srs. Duhamel e Aepinus. Nas experiências que vão a seguir, cada lâmina possui 302 milímetros de comprimento, 28 [mm] de largura e 1,07 milímetro de espessura, sendo elas temperadas na cor cereja claro.

25.7 Quinta Experiência

22. Uma única lâmina, imantada com [dois] feixes compostos cada um por duas barras [previamente magnetizadas], realizou, pelos dois métodos,[1020] dez oscilações em 72".

O mesmo resultado ocorre com feixes sendo compostos por um maior número de barras. Houve algumas pequenas variações ao utilizar o método do Sr. Aepinus; porém nunca houve variações com o método do Sr. Duhamel.

25.8 Sexta Experiência

23. Duas lâminas reunidas e formando uma espessura de 2,14 milímetros, imantadas pelo método do Sr. Duhamel com dois feixes sendo cada feixe composto de duas barras, realizaram dez oscilações em 80".

[Imantando essas duas lâminas] com dois feixes de quatro barras cada um, [as duas lâminas juntas] realizaram dez oscilações em 78".

[Imantando-as] com dois feixes de dez barras cada um, [as duas lâminas juntas] realizaram dez oscilações em 78".

[Imantando-as] pelo método do Sr. Aepinus, utilizando feixes [compostos] de duas, de quatro ou de dez barras cada um, [as duas lâminas juntas] realizaram igualmente dez oscilações em 78".

[1019] Ver a Nota de rodapé 444 na página 222.

[1020] Ou seja, tanto pelo método de Duhamel quanto pelo método de Aepinus.

25.9 Sétima Experiência

24. Quatro lâminas semelhantes às anteriores foram reunidas formando um feixe com 300 milímetros de comprimento, 28 milímetros de largura e 4,28 milímetros de espessura.

Só consegui imantar um feixe semelhante de lâminas pelo método de Duhamel ao utilizar oito barras em cada feixe. Ao suspender as quatro lâminas assim reunidas, elas realizaram dez oscilações em 91".

Pelo método do Sr. Aepinus, são suficientes dois feixes [contendo] duas barras cada um para imantar essas lâminas até a saturação. Assim, quando temos de imantar lâminas ou barras com mais de 4 a 5 milímetros de espessura, — a menos que utilizemos para imantá-las dois feixes com uma grande intensidade magnética, — o método do Sr. Aepinus ainda é preferível a todos os outros métodos, apesar do pequeno defeito desse método que observamos no Artigo 13.[1021,1022]

25.10 Oitava Experiência

25. Nessa experiência queria imantar uma das barras que formam o feixe que utilizo para imantar [as lâminas]. As barras possuem, como já disse, 400 milímetros de comprimento, 14 [mm] de largura e 5 [mm] de espessura; elas são temperadas na cor cereja claro.

Só consegui imantar essa barra pelo método do Sr. Duhamel [utilizando] dois feixes tendo quatro barras cada um.

Porém, pelo método do Sr. Aepinus, uma única barra de cada lado fornece o estado de saturação para a barra que estamos imantando, já que ela realiza nesse caso dez oscilações em 110".[1023]

E ao reunir, para imantar essa barra, um número maior de barras [de cada lado da barra a ser imantada], ela realiza igualmente dez oscilações em 110".

25.11 Nona Experiência

26. Após ter imantado lâminas e barras de 5 milímetros de espessura, tentei imantar uma [barra] tendo uma espessura maior. A [barra] dessa experiência tinha 400 milímetros de comprimento, 25 [mm] de largura e 9 [mm] de espessura. Essa barra era temperada na cor cereja claro. Ela possui aproximadamente as dimensões das barras mais grossas que utilizamos usualmente para imantar [outras lâminas]. Foi impossível para mim imantar essa barra pelo método do Sr. Duhamel, mesmo utilizando dois feixes tendo dez barras cada um. Por essa operação o grau de magnetismo [adquirido pela] barra era tal que ela realizava dez oscilações em 162".

Não é possível imantá-la, pelo método do Sr. Aepinus, com feixes tendo duas barras cada um; porém, imantada com dois feixes de quatro barras cada um ou de dez [barras em cada feixe], ela realiza igualmente dez oscilações em 153".

[1021] Coulomb está se referindo ao defeito mencionado no Artigo 12 e não no Artigo 13, ver a Nota de rodapé 1005 na página 489.

[1022] [Nota de Potier:] A linha neutra sempre se aproxima do polo que foi atritado por último.

[1023] Ou seja, Coulomb coloca uma única barra imantada horizontal de cada lado da barra horizontal que vai ser imantada, como ilustrado na Figura 2. Após a barra central ter sido imantada, ela realiza dez oscilações em 110 segundos.

Assim, para imantar barras semelhantes, o único método que devemos usar é aquele do Sr. Aepinus. Mas veremos logo a seguir que quando queremos obter ímãs artificiais com uma grande força, não há qualquer caso no qual devemos utilizar barras temperadas com uma espessura tão grande, e que sempre há uma grande vantagem em formar ímãs grossos reunindo um grande número de barras com uma espessura menor.

25.12 Décima Experiência

27. Nessa experiência queria saber qual seria a diferença nos resultados ao imantar várias barras separadamente, reunindo-as em seguida; ou imantando-as após terem sido reunidas. Como nessa experiência devo imantar barras tendo uma espessura maior do que na maior parte das experiências anteriores, me contentei em utilizar o método do Sr. Aepinus. Podemos adicionar, se quisermos, uma trigésima parte à força diretriz para ter, de acordo com a nota no Artigo 13, o estado de saturação.[1024]

Uma única barra com 400 milímetros de comprimento, 14 [mm] de largura e 5 [mm] de espessura, imantada com dois feixes tendo dez barras cada um, realizou dez oscilações em 108".

Duas barras semelhantes reunidas, formando um feixe de 28 milímetros de largura e 5 [mm] de espessura, cada uma delas imantada em separado antes de serem reunidas, realizaram, após sua junção, dez oscilações em 115".

Reunidas dessa forma, imantei-as no sentido contrário, ao trocar os polos de ponta a ponta e, após essa operação, o feixe composto pelas duas barras realizava igualmente dez oscilações em 115".

Assim, como obtive o mesmo resultado ao imantar cada uma das duas barras em separado antes de reuni-las, ou ao imantá-las no sentido contrário após tê-las reunido, os dois procedimentos são aqui perfeitamente iguais.

25.13 Décima Primeira Experiência

28. Quatro barras semelhantes às anteriores, formando um feixe de mesmo comprimento, mas com 28 milímetros de largura e 10 [mm] de espessura, foram imantadas em separado antes de juntá-las. O feixe, após a reunião das quatro barras, realizou dez oscilações em 130".

Tendo desejado, nesse estado de reunião, inverter os polos de ponta a ponta, obtive [após essa inversão] dez oscilações em 133".

Nunca consegui, ao inverter os polos de quatro barras assim reunidas, lhes fornecer exatamente o mesmo grau de força diretriz do que no caso em que as reunia após tê-las imantado cada uma em separado. O resultado foi aproximadamente o mesmo, embora as quatro barras reunidas não estivessem imantadas antes de serem reunidas.

25.14 Décima Segunda Experiência

29. Juntei outras quatro barras àquelas que foram utilizadas nas experiências anteriores: com cada uma delas sendo imantada separadamente, as oito barras reunidas formavam um feixe

[1024]Novamente Coulomb está referindo-se ao Artigo 12 e não ao Artigo 13. Ver, em especial, a página 489.

com 28 milímetros de largura e 20 [mm] de espessura. Esse feixe suspenso horizontalmente, como os anteriores, por fios de seda não torcidos, e colados com um pouco de goma, realizou dez oscilações em 166".

25.15 Observações sobre Essas Experiências

30. Se compararmos aqui os diferentes resultados fornecidos pelas experiências anteriores, e se quisermos deduzir deles a força diretriz que orienta uma mesma barra ao longo de seu meridiano magnético, quando ela está sozinha ou quando ela está reunida em um feixe de várias barras, encontraremos que no estado de saturação:

Uma barra isolada realiza dez oscilações em 108".

Duas barras reunidas, [realizam] dez oscilações em 115".

Quatro barras reunidas, [realizam] dez oscilações em 130".

Oito barras reunidas, [realizam] dez oscilações em 166".

Assim, como ao considerar uma única barra, quer ela esteja sozinha ou reunida a várias outras barras, a força que a orienta ao longo de seu meridiano magnético segue o inverso do quadrado dos tempos [para realizar] um mesmo número de oscilações, ao representar pelo número 1000 a força diretriz da barra isolada, teremos a seguinte Tabela:

	Força diretriz
Para a barra isolada	1000
Para a mesma barra reunida a uma outra barra	882
Para a mesma barra reunida a outras três barras	692
Para a mesma barra reunida a outras sete barras	433

Apresentei em uma outra Memória, de acordo com a teoria e com a experiência, a lei que segue a força diretriz de cada barra que compõe um feixe de uma espessura e de uma largura dadas. Tudo que devemos concluir do resultado anterior, em relação ao assunto dessa Memória, é que há pouca vantagem a ser esperada com o aumento da espessura dos ímãs artificiais, quando essa espessura passa de 10 ou 12 milímetros.

25.16 Segunda Observação

Enfim, há um resultado muito interessante obtido das experiências anteriores, a saber, a razão da força diretriz de uma barra grossa imantada até a saturação, e de um feixe com as mesmas dimensões.

Acabamos de ver na décima primeira experiência, que quatro barras reunidas, formando um feixe de 400 milímetros de comprimento, 28 milímetros de largura e 10 [mm] de espessura, imantadas até a saturação, realizam 10 oscilações em 130". Vimos porém na nona experiência, que uma única barra com o mesmo comprimento, mas com 25 milímetros de largura e 9 [mm] de espessura, realiza 10 oscilações em 153". Assim, embora a largura e a espessura do feixe sejam maiores que a largura e espessura da barra, sendo as larguras aproximadamente iguais, resulta, para cada parte da barra grossa reduzida às mesmas dimensões que uma única barra do feixe, uma força diretriz menor do que no feixe. Sendo a razão das forças diretrizes como o inverso do quadrado dos tempos de um mesmo número de oscilações, encontramos essa razão como $\overline{153}^2$ está para $\overline{130}^2$; [isto é,] aproximadamente assim como 14

está para 10, em favor do feixe, embora tenha dimensões maiores que as dimensões da barra grossa.

Como essa Memória é destinada unicamente a orientar os físicos e artesãos que querem fabricar imãs artificiais com uma força muito grande, ou [que querem] imantar até a saturação as agulhas de bússola; direciono para todas as explicações teóricas as diferentes Memórias que já publiquei, seja na coleção das *Memórias da Academia de Ciências de Paris* ou nas Memórias do Instituto.

Referências Bibliográficas

[Aepinus, 1759] Aepinus, F. U. T. (1759). *Tentamen Theoriae Electricitatis et Magnetismi*. Typis Academiae scientiarum, St. Petersburg.

[Aepinus, 1979] Aepinus, F. U. T. (1979). *Aepinus's Essay on the Theory of Electricity and Magnetism*. Princeton University Press, Princeton. Tradução de P. J. Connor. Introdução e notas de R. W. Home.

[Amontons, 1732] Amontons (1732). De la resistance causée dans les machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, & la maniere de calculer l'un & l'autre. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Année 1699*, pages 206–227. Troisiéme Edition.

[Amontons, 1742] Amontons (1742). Of the resistance caused in machines, both by the frictions of the parts of which they are composed, and by the stiffness of the cords employed in them. *The Philosophical History and Memoirs of the Royal Academy of Sciences at Paris*, 1:112–136. Translated by J. Martyn and E. Chambers.

[Andrade, 2013] Andrade, É. (2013). O mecanicismo em questão: o magnetismo na filosofia natural cartesiana. *Scientiae Studia*, 11:785–810.

[Antheaulme, 1760] Antheaulme (1760). *Mémoire sur les Aimants Artificiels*. Butard, Paris.

[Araújo, 2010] Araújo, J. H. (2010). A epístola "De Magnete" de Petrus Peregrinus e seu uso no ensino do magnetismo. In 1ª Conferência Latinoamericana do International History, Philosophy and Science Teaching Group (HPST_LA), São Sebastião. Caderno de Resumos, V. 1, p. 63.

[Assis, 1994] Assis, A. K. T. (1994). *Weber's Electrodynamics*. Kluwer, Dordrecht. Hoje em dia esse livro está disponível pela Springer. Doi: 10.1007/978-94-017-3670-1.

[Assis, 1995] Assis, A. K. T. (1995). *Eletrodinâmica de Weber — Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas. Primeira edição.

[Assis, 1998a] Assis, A. K. T. (1998a). *Mecânica Relacional*. Editora do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP/FAPESP, Campinas. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 1998b] Assis, A. K. T. (1998b). Newton e suas grandes obras: o Principia e o Óptica. In Almeida, M. J. P. M. d. and Silva, H. C. d., editors, *Linguagens, Leituras e Ensino da Ciência*, pages 37–52. Mercado de Letras/Associação de Leitura do Brasil, Campinas.

[Assis, 1999a] Assis, A. K. T. (1999a). *Relational Mechanics*. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 1999b] Assis, A. K. T. (1999b). *Uma Nova Física*. Editora Perspectiva, São Paulo.

[Assis, 2010a] Assis, A. K. T. (2010a). *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2010b] Assis, A. K. T. (2010b). *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2011] Assis, A. K. T. (2011). *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Editora Livraria da Física, São Paulo.

[Assis, 2013] Assis, A. K. T. (2013). *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2014] Assis, A. K. T. (2014). *Relational Mechanics and Implementation of Mach's Principle with Weber's Gravitational Force*. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2015a] Assis, A. K. T. (2015a). *Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Unicamp, Campinas. Segunda edição.

[Assis, 2015b] Assis, A. K. T. (2015b). *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal. Livro em russo traduzido da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2017] Assis, A. K. T. (2017). *I Fondamenti Sperimentali e Storici dell'Elettricità*. Associazione per l'Insegnamento della Fisica, Parma. La Fisica nella Scuola, Anno L, n. 2 Supplemento, Quaderno 26. Traduzido por P. Cerreta, A. Cerreta e R. Cerreta. Editado por P. Cerreta, R. Serafini e R. Urigu. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2018a] Assis, A. K. T. (2018a). *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*, volume 2. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2018b] Assis, A. K. T. (2018b). *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis, 2019] Assis, A. K. T. (2019). *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal. Livro em russo traduzido do volume 2 da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis and Chaib, 2015] Assis, A. K. T. and Chaib, J. P. M. C. (2015). *Ampère's Electrodynamics — Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience*. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis and Chaib, 2011] Assis, A. K. T. and Chaib, J. P. M. d. C. (2011). *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas.

[Assis (editor), 2021a] Assis (editor), A. K. T. (2021a). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 1: Gauss and Weber's Absolute System of Units. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis (editor), 2021b] Assis (editor), A. K. T. (2021b). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 2: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis (editor), 2021c] Assis (editor), A. K. T. (2021c). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 3: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Assis (editor), 2021d] Assis (editor), A. K. T. (2021d). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 4: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation. Apeiron, Montreal. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Bacha and Vannucci, 2014] Bacha, M. d. L. and Vannucci, J. (2014). A "Epistola de Magnete", de Petrus Peregrinus: experimento, técnica e tecnologia na construção de instrumentos magnéticos. *Anais Eletrônicos do 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*, pages 1–14. Belo Horizonte, UFMG, 08 a 11 de outubro.

[Bauer, 1949] Bauer, E. (1949). *L'Électromagnétisme—Hier et Aujourd'hui*. Albin Michel, Paris.

[Bernoulli, 1752] Bernoulli, D. (1752). Memoire sur la maniere de construire les boussoles d'inclinaison; pour faire, avec le plus de précision qu'il est possible, les observations de l'inclinaison de l'aiguille aimantée, tant sur mer que sur terre; ce qui suppose des boussoles, qui, étant mises dans un même lieu, donneront sensiblement la même inclinaison. In Académie des Sciences, editor, *Recueil des Pieces Qui ont Remporté les Prix de l'Academie Royale des Sciences, Depuis leur Fondation jusqu'à présent. Avec les Pieces qui y ont concouru*, volume V: Contenant les Pieces depuis 1741 jusqu'en 1744, pages 1–61. Académie des Sciences, Paris. Pour concourir au Prix de l'année 1743.

[Bernoulli and Bernoulli, 1752] Bernoulli, D. and Bernoulli, J. (1752). Nouveaux Principes de Mechanique et de Physique, Tendans a Expliquer La Nature & les Propriétés de l'Aiman. In Académie des Sciences, editor, *Recueil des Pieces Qui ont Remporté les Prix de l'Academie Royale des Sciences, Depuis leur Fondation jusqu'à présent. Avec les Pieces qui y ont concouru*, volume V: Contenant les Pieces depuis 1741 jusqu'en 1744, chapter XII, pages 115–144. Académie des Sciences, Paris. Cette piece est une des trois entre lesquelles le prix triple a été partagé en 1746.

[Biot, 1816a] Biot, J. B. (1816a). *Traité de Physique Expérimentale et Mathématique*, volume I. Deterville, Paris.

[Biot, 1816b] Biot, J. B. (1816b). *Traité de Physique Expérimentale et Mathématique*, volume II. Deterville, Paris.

[Biot, 1816c] Biot, J. B. (1816c). *Traité de Physique Expérimentale et Mathématique*, volume III. Deterville, Paris.

[Biot, 1816d] Biot, J. B. (1816d). *Traité de Physique Expérimentale et Mathématique*, volume IV. Deterville, Paris.

[Blondel, 1994] Blondel, C. (1994). La 'mécanisation' de l'électricité: idéal de mesures exactes et savoir-faire qualitatifs. In Blondel, C. and Dörries, M., editors, *Restaging Coulomb: Usages, Controverses et Réplications autour de la Balance de Torsion*, pages 99–119, Firenze. Leo S. Olschki.

[Blondel and Dörries, 1994] Blondel, C. and Dörries, M. (1994). *Restaging Coulomb: Usages, Controverses et Réplications autour de la Balance de Torsion*. Leo S. Olschki, Firenze.

[Blondel and Wolff, 2007] Blondel, C. and Wolff, B. (2007). Vídeo: Coulomb invente une balance pour l'électricité. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire e https://youtu.be/omobCEi2Ong.

[Blondel and Wolff, 2008a] Blondel, C. and Wolff, B. (2008a). Vídeo: Des hémisphères de Cavendish à la cage de Faraday. Disponível em https://youtu.be/cHhHi-lvHpk.

[Blondel and Wolff, 2008b] Blondel, C. and Wolff, B. (2008b). Vídeo: Le pouvoir des pointes. Disponível em https://youtu.be/bblItptaeE0.

[Blondel and Wolff, 2009] Blondel, C. and Wolff, B. (2009). L'électricité reste à la surface des conducteurs: Coulomb, Cavendish, Faraday... Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire/parcours-historique.

[Blondel and Wolff, 2011a] Blondel, C. and Wolff, B. (2011a). Coulomb et les hypothèses sur la nature de l'électricité. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2011b] Blondel, C. and Wolff, B. (2011b). La distribution du magnétisme dans les aimants (7éme Mémoire). Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2011c] Blondel, C. and Wolff, B. (2011c). Les calculs de Coulomb sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2011d] Blondel, C. and Wolff, B. (2011d). Les conséquences de la loi de l'électricité pour les conducteurs en équilibre électrique. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire/parcours-historique.

[Blondel and Wolff, 2011e] Blondel, C. and Wolff, B. (2011e). Les lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2011f] Blondel, C. and Wolff, B. (2011f). Quelques réflexions sur un instrument "fondateur". Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2012] Blondel, C. and Wolff, B. (2012). Teinturiers et tubes de verre: Gray et Dufay. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2013a] Blondel, C. and Wolff, B. (2013a). Charles-Augustin Coulomb, des fortifications de la Martinique à la mesure de la force électrique. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire/parcours-historique.

[Blondel and Wolff, 2013b] Blondel, C. and Wolff, B. (2013b). Coulomb et les lois du frottement. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire/parcours-historique.

[Blondel and Wolff, 2013c] Blondel, C. and Wolff, B. (2013c). De l'électricité "en + ou en −" de Franklin aux lois de l'électricité. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2013d] Blondel, C. and Wolff, B. (2013d). La proportionnalité de la force électrique aux charges: définition ou loi expérimentale? Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2013e] Blondel, C. and Wolff, B. (2013e). Une expérience contestée, un accueil contrasté. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire/parcours-historique.

[Blondel and Wolff, 2014] Blondel, C. and Wolff, B. (2014). Some reflections on a "founding" instrument. Traduzido por A. Butrica. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Blondel and Wolff, 2015] Blondel, C. and Wolff, B. (2015). Coulomb et la difficile gestion du "mélange du calcul & de la physique". In Gilain, C. and Guilbaud, A., editors, *Sciences mathématiques 1750-1850 Continuités et Ruptures*, pages 314–346. CNRS Editions, Paris.

[Borvon, 1994] Borvon, G. (1994). De Dufay à Ampère - Des deux espèces d'électricité aux deux sens du courant électrique - Un moment de l'histoire de l'électricité. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 88, No 760:27–60. Disponível em http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

[Borvon, 2009] Borvon, G. (2009). Les deux espèces d'électricité. Le blog d'histoire des sciences. Disponível em http://histoires-de-sciences.over-blog.fr/article-31138255.html.

[Borvon, s d] Borvon, G. ([s. d.]). Pourquoi deux espèces d'électricité? Pourquoi deux sens du courant électrique? L'histoire de l'électricité nous aide à comprendre. Disponível em www.ampere.cnrs.fr.

[Boss et al., 2012] Boss, S. L. B., Assis, A. K. T., and Caluzi, J. J. (2012). *Stephen Gray e a Descoberta dos Condutores e Isolantes: Tradução Comentada de Seus Artigos sobre Eletricidade e Reprodução de Seus Principais Experimentos*. Editora Cultura Acadêmica da Unesp, São Paulo. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e www.culturaacademica.com.br/catalogo/stephen-gray-e-a-descoberta-dos-condutores-e-isolantes/.

[Boss and Caluzi, 2007] Boss, S. L. B. and Caluzi, J. J. (2007). Os conceitos de eletricidade vítrea e eletricidade resinosa segundo Du Fay. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:635–644.

[Bouguer, 1749] Bouguer, P. (1749). *La Figure de la Terre, Déterminée par les Observations de Messieurs Bouguer, et de La Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou, pour observer aux environs de l'Equateur. Avec une Relation abregée de ce Voyage, qui contient la description du Pays dans lequel les Opérations ont été faites*. Charles-Antoine Jombert, Paris.

[Brewster, 1837] Brewster, D. (1837). *A Treatise on Magnetism, forming the article under that head in the seventh edition of the Encyclopaedia Britannica*. Adam and Charles Black, Edinburgh.

[Brugmans, 1765] Brugmans, A. (1765). *Tentamina Philosophica de Materia Magnetica Eiusque Actione in Ferrum et Magnetem*. Willem Coulon, Franeker.

[Canton, 1752] Canton, J. (1751-1752). A method of making artificial magnets without the use of natural ones. *Philosophical Transactions*, 47:31–38.

[Chaib, 2009] Chaib, J. P. M. d. C. (2009). Tese de Doutorado: "Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica." Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e http://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/435449.

[Cohen, 1966] Cohen, I. B. (1966). *Franklin and Newton: An Inquiry into Speculative Newtonian Experimental Science and Franklin's Work in Electricity as an Example Thereof*. Harvard University Press, Cambridge.

[Cohen, 1996] Cohen, I. B. (1996). *Benjamin Franklin's Science*. Harvard Univ. Press, Cambridge.

[Coulomb, 1935a] Coulomb, A. (1935a). First memoir on electricity and magnetism. In Magie, W. F., editor, *A Source Book in Physics*, pages 408–413, New York. McGraw-Hill. Tradução parcial da publicação original (1788) em francês.

[Coulomb, 1935b] Coulomb, A. (1935b). Second memoir on electricity and magnetism. In Magie, W. F., editor, *A Source Book in Physics*, pages 413–420, New York. McGraw-Hill. Tradução parcial da publicação original (1788) em francês.

[Coulomb, 1780] Coulomb, C. A. (1780). Recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées, de les suspendre, de s'assurer qu'elles sont dans le véritable méridien magnétique; enfin de rendre raison de leurs variations diurnes régulières. *Mémoires de Mathématique et de Physique, Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans les Assemblées*, 9:165–264. Pièce que a partagé le Prix proposé pour l'année 1777. Reimpresso parcialmente em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 1-62 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1787] Coulomb, C. A. (1787). Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'élasticité des fils de métal: applications de cette théorie à l'emploi des métaux dans les arts et dans differéntes expériences de physique: construction de différentes balances de torsion, pour mesurer les plus petits degrés de force. Observation sur les loix de l'élasticité et de la cohérence. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1784*, 87:229–269. Lû en 1784. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 63-103 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884); e em C. A. Coulomb, Théorie des Machines Simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et a la roideur des cordages (Bachelier, Paris, 1821).

[Coulomb, 1788a] Coulomb, C. A. (1788a). Description d'une boussole dont l'aiguille est suspendue par un fil de soie. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1785*, 88:560–568. Publicado em 1788.

[Coulomb, 1788b] Coulomb, C. A. (1788b). Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Construction et usage d'une balance électrique, fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal, d'avoir une force de réaction de torsion proportionelle à l'angle de torsion. Détermination expérimentale de la loi suivant laquelle les élémens des corps électrisés du même genre d'électricité, se repoussent mutuellement. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1785*, 88:569–577. Publicado em 1788. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 107-115 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1788c] Coulomb, C. A. (1788c). Quatrième mémoire sur l'électricité. Où l'on démontre deux principales propriétés du fluide électrique: La première, que ce fluide ne se répand dans aucun corps par une affinité chimique ou par une attraction élective, mais qu'il se partage entre differens corps mis en contact uniquement par son action répulsive; La seconde, que dans les corps conducteurs le fluide parvenu à l'état de stabilité, est répandu sur la surface du corps, & ne pénètre pas dans l'intérieur. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1786*, 89:67–77. Publicado em 1788. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 173-182 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1788d] Coulomb, C. A. (1788d). Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Où l'on détermine, suivant quelles loix le fluide magnétique, ainsi que le fluide électrique, agissent, soit par répulsion, soit par attraction. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1785*, 88:578–611. Publicado em 1788. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 116-146 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1788e] Coulomb, C. A. (1788e). Troisième mémoire sur l'électricité et le magnétisme. De la quantité d'électricité qu'un corps isolè perd dans un temps donné, soit par le contact de l'air plus ou moins humide, soit le long des soutiens plus ou moins idio-électriques. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1785*, 88:612–638. Publicado em 1788. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 147-172 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1789] Coulomb, C. A. (1789). Cinquième mémoire sur l'électricité. De la manière dont le fluide électrique se partage entre deux corps conducteurs mis en contact, et de la distribution de ce fluide sur les différentes parties de la surface de ces corps. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1787*, 90:421–467. Publicado em 1789. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 183-229 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1791] Coulomb, C. A. (1791). Sixième mémoire sur l'électricité. Suite des recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps: détermination de la densité électrique dans les différents points de la surface de ces corps. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1788*, 91:617–705. Publicado em 1791. Reimpresso parcialmente em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 230-272 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1793] Coulomb, C. A. (1793). Septième mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Du magnétisme. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Année 1789*, 92:455–505. Publicado em 1793. Reimpresso em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 273-318 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1801a] Coulomb, C. A. (1801a). Détermination théorique et expérimentale des forces qui ramènent différentes aiguilles aimantées à saturation à leur méridien magnétique. *Mémoires de l'Institut National des Sciences et Arts — Sciences Mathématiques et Physiques*, 3:176–197. Lu le 26 prairial an VII (lido em 14 de junho de 1799). Reimpresso parcialmente em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 319-329 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1801b] Coulomb, C. A. (1801b). Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents. *Mémoires de l'Institut National des Sciences et Arts — Sciences Mathématiques et Physiques*, 3:246–305. Lu le 6 prairial an VIII (lido em 26 de maio de 1800). Reimpresso parcialmente em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 330-357 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1806] Coulomb, C. A. (1806). Résultat des différentes méthodes employées pour donner aux lames et aux barreaux d'acier le plus grand degré de magnétisme. *Mémoires de l'Institut National des Sciences et Arts — Sciences Mathématiques et Physiques*, 6:399–422. Lu le 13 prairial an X (lido em 2 de junho de 1802). Reimpresso parcialmente em A. Potier (ed.), Collection de Mémoires relatifs a la Physique, Volume 1: *Mémoires de Coulomb*, págs. 360-369 (Gauthiers-Villars, Paris, 1884).

[Coulomb, 1821] Coulomb, C. A. (1821). *Théorie des Machines Simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et a la roideur des cordages*. Bachelier, Paris.

[Coulomb, 1890a] Coulomb, C. A. (1890a). Dritte Abhandlung über die Elektricität und den Magnetismus. In König, W., editor, *Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus von Coulomb*, pages 43–68. Wilhelm Engelmann, Leipzig. Traduzido e editado por W. König.

[Coulomb, 1890b] Coulomb, C. A. (1890b). Erste Abhandlung über die Elektricität und den Magnetismus. In König, W., editor, *Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus von Coulomb*, pages 3–11. Wilhelm Engelmann, Leipzig. Traduzido e editado por W. König.

[Coulomb, 1890c] Coulomb, C. A. (1890c). *Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus von Coulomb*. Wilhelm Engelmann, Leipzig. Traduzido e editado por W. König.

[Coulomb, 1890d] Coulomb, C. A. (1890d). Vierte Abhandlung über die Elektricität und den Magnetismus. In König, W., editor, *Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus von Coulomb*, pages 69–78. Wilhelm Engelmann, Leipzig. Traduzido e editado por W. König.

[Coulomb, 1890e] Coulomb, C. A. (1890e). Zweite Abhandlung über die Elektricität und den Magnetismus. In König, W., editor, *Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus von Coulomb*, pages 12–42. Wilhelm Engelmann, Leipzig. Traduzido e editado por W. König.

[Coulomb, 2012a] Coulomb, C.-A. (2012a). First memoir on electricity and magnetism — Construction and use of an electric balance based on the property that filaments of metal produce a reactive force in torsion proportional to the angle of twist. Traduzido por L. L. Bucciarelli (2000). Revisão e notas acrescentadas por C. Blondel e B. Wolff (2012). Disponível em http://www.ampere.cnrs.fr/i-corpuspic/tab/Sources/coulomb/Coulomb_El_1785.pdf.

[Coulomb, 2012b] Coulomb, C.-A. (2012b). Theoretical & experimental research on the force of torsion, and on the elasticity of metal wires: Application of this theory to the use of metals in the arts and in various physics experiments: Construction of different kinds of torsion balances, for measuring the smallest force levels. Observations on the laws of elasticity and of coherence. First Section. Traduzido por L. L. Bucciarelli. Disponível em http://www.ampere.cnrs.fr/i-corpuspic/tab/Sources/coulomb/Coulomb_1784_1stsection.pdf.

[Coulomb, 2012c] Coulomb, C.-A. (2012c). Theoretical & experimental research on the force of torsion, and on the elasticity of metal wires: Application of this theory to the use of metals in the arts and in various physics experiments: Construction of different kinds of torsion balances, for measuring the smallest force levels. Observations on the laws of elasticity and of coherence. Second Section. Traduzido por L. L. Bucciarelli. Disponível em http://www.ampere.cnrs.fr/i-corpuspic/tab/Sources/coulomb/Coulomb_1784_2ndsection.pdf.

[de Saussure, 1783] de Saussure, H.-B. (1783). *Essais sur l'Hygrométrie*. S. Fauche, Neuchatel.

[de Saussure, 1784] de Saussure, H.-B. (1784). *Versuch über die Hygrometrie*. Johann Friedrich Junius, Leipzig.

[Descartes, 1647] Descartes, R. (1647). *Les Principles de la Philosophie*. Henry le Gras, Paris. Traduzido por C. Picot. Reimpresso em R. Descartes, *Oeuvres*, D. Adam e P. Tannery (editores), Volume IX.

[Descartes, 1997] Descartes, R. (1997). *Princípios da Filosofia*. Edições 70, Lisboa. Traduzido por J. Gama.

[Descartes, 2002] Descartes, R. (2002). *Princípios da Filosofia*. Editora da UFRJ, Rio de Janeiro. Tradução de G. A. d. Almeida (coordenador), R. Landim Filho, E. M. Rocha, M. Gleizer e U. Pinheiro.

[Devons, 1975] Devons, S. (1975). Coulomb's electrical measurements - Experiment No. 14. Barnard-Columbia History of Physics Laboratory. Disponível em https://eric.ed.gov/?id=ED182150.

[Dhogal, 2008] Dhogal, P. S. (2008). *Basic Electrical Engineering*, volume 1. Tata McGraw-Hill, New Delhi.

[Du Fay, 1733] Du Fay, C. F. d. C. (1733). Quatriéme mémoire sur l'électricité. De l'attraction et répulsion des corps électriques. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, pages 457–476.

[Du Fay, 1734] Du Fay, C. F. d. C. (1733-1734). A letter from Mons. Du Fay, F. R. S. and of the Royal Academy of Sciences at Paris, to His Grace Charles Duke of Richmond and Lenox, concerning electricity. Translated from the French by T. S. M D. *Philosophical Transactions*, 38:258–266.

[Du Hamel, 1745] Du Hamel (1745). Façon singulière d'aimanter un barreau d'acier, au moyen duquel on lui a communiqué une force magnétique, quelquefois triple de celle qu'il auroit si on l'eût aimanté à l'ordinaire. *Memoires de l'Academie royale des Sciences*, pages 181–193.

[Du Hamel, 1750] Du Hamel (1750). Differens moyens pour perfectionner la boussole. *Memoires de l'Academie royale des Sciences*, pages 154–165.

[Du Tour, 1752] Du Tour, E. F. (1752). Discours sur l'Aiman. In Académie des Sciences, editor, *Recueil des Pieces Qui ont Remporté les Prix de l'Academie Royale des Sciences, Depuis leur Fondation jusqu'à présent. Avec les Pieces qui y ont concouru*, volume V: Contenant les Pieces depuis 1741 jusqu'en 1744, chapter XI, pages 49–114. Académie des Sciences, Paris. Cette piece est une des trois entre lesquelles le prix triple a été partagé en 1746.

[Euler, 1752] Euler, L. (1752). Dissertatio de Magnete. In Académie des Sciences, editor, *Recueil des Pieces Qui ont Remporté les Prix de l'Academie Royale des Sciences, Depuis leur Fondation jusqu'à présent. Avec les Pieces qui y ont concouru*, volume V: Contenant les Pieces depuis 1741 jusqu'en 1744, chapter X, pages 1–47. Académie des Sciences, Paris. Cette piece est une des trois entre lesquelles le prix triple a été partagé en 1746.

[Falconer, 2004] Falconer, I. (2004). Charles Augustin Coulomb and the fundamental law of electrostatics. *Metrologia*, 41:S107–S114.

[Falconer, 2017] Falconer, I. (2017). No actual measurement ... was required: Maxwell and Cavendish's null method for the inverse square law of electrostatics. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 65-66:74–86.

[Faraday, 1838] Faraday, M. (1838). Experimental researches in electricity. Eleventh series. *Philosophical Transactions*, 128:1–40. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 440-467, §1161-1317.

[Ferreira, s da] Ferreira, N. ([s. d.]a). *Eletrostática*, Vol. 1. Instituto de Física, USP, São Paulo. Projeto RIPE — Rede de Instrumentação para o Ensino. [S. d.].

[Ferreira, s db] Ferreira, N. ([s. d.]b). *Eletrostática*, Vol. 2. Instituto de Física, USP, São Paulo. Projeto RIPE — Rede de Instrumentação para o Ensino. [S. d.].

[Ferreira and Maury, 1991] Ferreira, N. and Maury, J.-P. (1991). *Plus et Moins, les Charges Électriques. Qu'est-ce que c'est?* Ophrys, Paris.

[Ferreira, 1978] Ferreira, N. C. (1978). Proposta de Laboratório para a Escola Brasileira— Um Ensaio sobre a Instrumentalização no Ensino Médio de Física. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[Ferreira and Ramos, 2008] Ferreira, N. C. and Ramos, E. M. d. F. (2008). *Cadernos de Instrumentação para o Ensino de Física: Eletrostática*. Unesp, Rio Claro. Coleção Ludoteca, Volume 1.

[Fontenelle, 1741] Fontenelle, B. L. B. d. (1741). Éloge de M. Du Fay. *Histoire et Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1739:73–83. Disponível em https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Fontenelle/font_pdf/p73_83_vol3536.pdf.

[Franklin, 1769] Franklin, B. (1769). *Experiments and Observations on Electricity, Made at Philadelphia in America*. David Henry, London.

[Franklin, 1904] Franklin, B. (1904). *The Works of Benjamin Franklin*. G. P. Putnam's Sons. 12 Volumes.

[Franklin, 1941] Franklin, B. (1941). *Benjamin Franklin's Experiments* — A new edition of Franklin's *Experiments and Observations on Electricity,* I. B. Cohen (ed.). Harvard University Press, Cambridge.

[Gaspar, 2003] Gaspar, A. (2003). *Experiências de Ciências para o Ensino Fundamental*. Ática, São Paulo.

[Gillmor, 1971a] Gillmor, C. S. (1971a). *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*. Princeton University Press, Princeton.

[Gillmor, 1971b] Gillmor, C. S. (1971b). Coulomb, Charles Augustin. In Gillispie, C. C., editor, *Dictionary of Scientific Biography,* Vol. 3, pages 439–447. Charles Scribner's Sons, New York.

[Gray, 1732] Gray, S. (1731-1732). Several experiments concerning electricity. *Philosophical Transactions*, 37:18–44.

[Grozier, 2013] Grozier, J. (2013). John Michell (1724-93): father of magnetometry?. Ver também https://jimgrozier.wordpress.com.

[Heering, 1992] Heering, P. (1992). On Coulomb's inverse square law. *American Journal of Physics*, 60:988–994.

[Heering, 1994] Heering, P. (1994). The replication of the torsion balance experiment. The inverse square law and its refutation by early 19th-century German physicists. In Blondel, C. and Dörries, M., editors, *Restaging Coulomb: Usages, Controverses et Réplications autour de la Balance de Torsion*, pages 47–66, Firenze. Leo S. Olschki.

[Heering, 2006] Heering, P. (2006). Regular twists: replicating Coulomb's wire-torsion experiments. *Physics in Perspective*, 8:52–63.

[Heering, 2009] Heering, P. (2009). The role of historical experiments in science teacher training: experiences and perspectives. *Actes d'Història de la Ciència i de la Técnica*, 2:389–399. Disponível em https://www.raco.cat/index.php/ActesHistoria/article/view/246461.

[Heering and Chevalier, 1995] Heering, P. and Chevalier, G. (1995). Balances d'hier et d'aujourd'hui. *Les Cahiers de Science & Vie*, 26:66–72.

[Heering and Osewold, 2005] Heering, P. and Osewold, D. (2005). Ein Problem, zwei Wissenschaftler, drei Instrumente. *Centaurus*, 47:115–139.

[Heilbron, 1976] Heilbron, J. (1976). Robert Symmer and the two electricities. *Isis*, 67:7–20.

[Heilbron, 1979] Heilbron, J. L. (1979). *Electricity in the 17th & 18th Centuries*. University of California Press, Berkeley.

[Heilbron, 1981a] Heilbron, J. L. (1981a). Aepinus, Franz Ulrich Theodosius. In Gillispie, C. C., editor, *Dictionary of Scientific Biography,* Vol. 1, pages 66–68. Charles Scribner's Sons, New York.

[Heilbron, 1981b] Heilbron, J. L. (1981b). Dufay (Du Fay), Charles-François de Cisternay. In Gillispie, C. C., editor, *Dictionary of Scientific Biography,* Vol. 4, pages 214–217. Charles Scribner's Sons, New York.

[Heilbron, 1981c] Heilbron, J. L. (1981c). The electrical field before Faraday. In Cantor, G. N. and Hodge, M. J. S., editors, *Conceptions of Ether: Studies in the History of Ether Theories 1740-1900*, pages 187–213. Cambridge University Press, Cambridge.

[Heilbron, 1982] Heilbron, J. L. (1982). *Elements of Early Modern Physics*. University of California Press, Berkeley.

[Heilbron, 1994] Heilbron, J. L. (1994). On Coulomb's electrostatic balance (commentary). In Blondel, C. and Dörries, M., editors, *Restaging Coulomb: Usages, Controverses et Réplications autour de la Balance de Torsion*, pages 151–161, Firenze. Leo S. Olschki.

[Heilbron, 1999] Heilbron, J. L. (1999). *Electricity in the 17th and 18th Centuries — A Study in Early Modern Physics*. Dover, New York.

[Heyman, 1997] Heyman, J. (1997). *Coulomb's Memoir on Statics: An Essay in the History of Civil Engineering*. Imperial College Press, London.

[Home, 1981] Home, R. W. (1981). *The Effluvial Theory of Electricity*. Arno Press, New York.

[Home, 1992] Home, R. W. (1992). *Electricity and Experimental Physics in 18th-Century Europe*. Variorum, Hampshire.

[Joubert, 1885a] Joubert, J. (1885a). *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, volume II: *Mémoires sur l'Électrodynamique — Première Partie*. Gauthiers-Villars, Paris.

[Joubert, 1885b] Joubert, J. (1885b). *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, volume III: *Mémoires sur l'Électrodynamique — Seconde Partie*. Gauthiers-Villars, Paris.

[Knight, 1744a] Knight, G. (1744a). An account of some magnetical experiments, shewed before the Royal Society, by Mr. Gowan Knight, on Thursday the 15th of November, 1744. *Philosophical Transactions*, 43:161–166. Doi: 10.1098/rstl.1744.0038.

[Knight, 1744b] Knight, G. (1744b). A letter from Gowin Knight, M. B. to the President; concerning the poles of magnets being variously placed. *Philosophical Transactions*, 43:361–363. Doi: 10.1098/rstl.1744.0075.

[Knight, 1746] Knight, G. (1746). A collection of the magnetical experiments communicated to the Royal Society by Gowin Knight M. B. & F. R. S. in the years 1746 and 1747. *Philosophical Transactions*, 44:656–664. Doi: 10.1098/rstl.1746.0116.

[Knight, 1754] Knight, G. (1754). *An Attempt to demonstrate, That all the Phaenomena in Nature May be explained by Two simple active Principles, Attraction and Repulsion*. J. Nourse, London, 2nd edition.

[Laburú et al., 2008] Laburú, C. E., Silva, O. H. M. d., and Barros, M. A. (2008). Laboratório caseiro - pára-raios: um experimento simples e de baixo custo para a eletrostática. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 25:168–182.

[Le Monnier, 1778] Le Monnier (1776-1778). *Loix du magnétisme, comparées aux observations & aux expériences, dans les différentes parties du globe terrestre, pour perfectionner la théorie générale de l'aimant, & indiquer par-là les courbes magnétiques qu'on cherche à la mer, sur les cartes réduites*. De l'Imprimerie royale, Paris. 2 parties.

[Lima, 2018] Lima, F. M. S. (2018). What exactly is the electric field at the surface of a charged conducting sphere? *Resonance*, 23:1215–1223.

[Lima, 2020] Lima, F. M. S. (2020). A proper integral for the electric field at the surface of a conducting sphere. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42:e20200182. Doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0182.

[Martinez, 2006] Martinez, A. A. (2006). Replication of Coulomb's torsion balance experiment. *Archive for History of exact Sciences*, 60:517–563.

[Martins, 2017] Martins, R. d. A. (2017). O estudo experimental sobre o magnetismo na Idade Média, com uma tradução da carta sobre o magneto de Petrus Peregrinus. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 39:e1601–1 — e1601–30. Doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0181.

[Mascart, 1876] Mascart, M. E. (1876). *Traité d'Électricité Statique*, volume I. G. Masson, Paris.

[Maxwell, 1954] Maxwell, J. C. (1954). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York. Unabridged republication of the third edition of 1891.

[Michell, 1750] Michell, J. (1750). *A Treatise of Artificial Magnets*. J. Bentham, Cambridge.

[Michell and Canton, 1752] Michell, J. and Canton, J. (1752). *Traités sur les Aimans Artificiels*. H.-L Guérin, Paris. Traduzido por P. Rivoire de la C. de J.

[Mitchell, 1759] Mitchell, J. (1759). A letter to the Reverend Dr. Birch, Secretary to the Royal Society, concerning the force of electrical cohesion. *Philosophical Transactions*, 51:390–393.

[Morse, 2004a] Morse, B. (2004a). Pointy tab blunt tab. Electrostatic Video Series. Wright Center for Innovative Science Education. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6pnXOHjYjO0.

[Morse, 2004b] Morse, R. A. (2004b). Benjamin Franklin and Electrostatics. Homepage criada por R. A. Morse. Disponível em: https://www.compadre.org/student/items/detail.cfm?ID=3383.

[Moura, 2018] Moura, B. A. (2018). As contribuições de Benjamin Franklin para a eletricidade no século XVIII. *Física na Escola*, 16:27–35.

[Moura, 2019] Moura, B. A. (2019). *A Filosofia Natural de Benjamin Franklin: Traduções de Cartas e Ensaios sobre a Eletricidade e a Luz*. Editora UFABC, São Paulo.

[Moura, 2020] Moura, B. A. (2020). Opinion page - Franklin and the kite: what can we learn from this episode? *HPS& ST Newsletter*, September:11–17.

[Moura and Bonfim, 2017] Moura, B. A. and Bonfim, T. (2017). Benjamin Franklin e a formação de temporais com raios e trovões: tradução comentada de uma carta a John Mitchel. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 34:460–478. Doi: 10.5007/2175-7941.2017v34n2p460.

[Müller-Baden (Editor), 1905] Müller-Baden (Editor), E. (1905). *Bibliothek des allgemeinen und praktischen Wissens*, volume III. Deutsches Verlaghaus Bong & Co, Berlin.

[Musschenbroek, 1754] Musschenbroek, P. v. (1754). *Dissertatio Physica Experimentalis de Magnete*. Bibliopolae & Univers. Typographi. Reprint of 1729 edition.

[Newton, 1990] Newton, I. (1990). *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.

[Newton, 1996] Newton, I. (1996). *Óptica*. Edusp, São Paulo. Tradução, introdução e notas de A. K. T. Assis.

[Newton, 2008] Newton, I. (2008). *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Edusp, São Paulo. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis.

[Newton, 2010] Newton, I. (2010). *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Folha de São Paulo, São Paulo. Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. Coleção Folha de São Paulo: Livros que Mudaram o Mundo, Volume 9.

[Plana, 1845] Plana, J. (1845). Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices complètement isolées. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 7:71–401.

[Plana, 1854] Plana, J. (1854). Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface intérieure et sphérique d'une sphère creuse de métal, et à la surface d'une autre sphère conductrice électrisée que l'on tient isolée dans la cavité. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 16:57–95.

[Poisson, 1812a] Poisson (1812a). Extrait d'un mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 75:229–237.

[Poisson, 1812b] Poisson (1812b). Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques*, pages 1–92. Année 1811. Première partie. Lu les 9 mai et 3 août 1812.

[Poisson, 1813] Poisson (1813). Second mémoire sur la distribution de l'électricité a la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 77:380–386. Lu à l'Institut, le 6 septembre 1813.

[Poisson, 1814] Poisson (1814). Second mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques*, pages 163–274. Année 1811. Seconde partie. Lu le 6 septembre 1813.

[Poisson, 1822] Poisson, S. D. (1821-1822). Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 Février 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:247–338. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar desta data, este volume foi publicado apenas em 1826.

[Potier, 1884] Potier, A. (1884). *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, volume 1: *Mémoires de Coulomb*. Gauthiers-Villars, Paris.

[Ricker III, 2011] Ricker III, H. H. (2011). Magnetism in the eighteenth century. *The General Science Journal*, December 5. Disponível em https://www.gsjournal.net/Science-Journals/Research%20Papers-Mechanics%20/%20Electrodynamics/Download/3817.

[Roller and Roller, 1953] Roller, D. and Roller, D. H. D. (1953). The prenatal history of electrical science. *American Journal of Physics*, 21:343–356.

[Roller and Roller, 1957] Roller, D. and Roller, D. H. D. (1957). The Development of the Concept of Electric Charge. In Conant, J. B., editor, *Harvard Case Studies in Experimental Science*, chapter 8, pages 541–639. Harvard University Press, Cambridge.

[Roller, 1959] Roller, D. H. D. (1959). *The De Magnete of William Gilbert*. Menno Hertzberger, Amsterdam.

[Savelyev, 1989] Savelyev, I. V. (1989). *Physics: A General Course*, volume II: Electricity and Magnetism, Waves and Optics. Mir, Moscow. Translated from the Russian by G. Leib.

[Shech and Hatleback, 2014] Shech, E. and Hatleback, E. (2014). The material intricacies of Coulomb's 1785 electric torsion balance experiment. Disponível em http://philsci-archive.pitt.edu/11048/.

[Silva and Pimentel, 2006] Silva, C. C. and Pimentel, A. C. (2006). Benjamin Franklin e a história da eletricidade em livros didáticos. Anais do X Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, Londrina, PR, 15 a 19/08/2006. Disponível em: www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/x/sys/resumos/T0150-1.pdf.

[Silva and Pimentel, 2008] Silva, C. C. and Pimentel, A. C. (2008). Uma análise da história da eletricidade presente em livros didáticos: o caso de Benjamin Franklin. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 25:141–159.

[Silveira, 2010] Silveira, F. L. d. (2010). Resenha - Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 27:411–415. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/315130099.

[Silveira, 2011] Silveira, F. L. d. (2011). Vídeo sobre demonstrações de eletrostática. Disponível em www.if.ufrgs.br/~lang e www.youtube.com/watch?v=GhYKeb99OgA.

[Silveira, 2016] Silveira, F. L. d. (2016). Descarga elétrica através do ar NÃO é consequente do arrancamento de elétrons dos eletrodos! Disponível em www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=1652.

[Silveira, 2018] Silveira, F. L. d. (2018). Bobina de Tesla funciona no vácuo? Disponível em https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=bobina-de-tesla-funciona-no-vacuo.

[Symmer, 1759] Symmer, R. (1759). New experiments and observations concerning electricity. *Philosophical Transactions*, 51:340–389.

[Thomson, 1906] Thomson, J. J. (1906). *Conduction of Electricity Through Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition.

[Thomson, 1845] Thomson, W. (1845). Note sur les lois élementaires de l'électricité statique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:209–221.

[Thomson, 1884] Thomson, W. (1884). *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*. Macmillan, London, 2nd edition.

[Verschuur, 1996] Verschuur, G. L. (1996). *Hidden Attraction: The History and Mystery of Magnetism*. Oxford University Press, New York.

[Weber and Kohlrausch, 2008] Weber, W. and Kohlrausch, R. (2008). Sobre a quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito em correntes galvânicas. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 1:94–102. Traduzido por A. K. T. Assis.

[Wilcke, 1766] Wilcke, J. C. (1766). Abhandlung von Erregung der magnetischen Kraft durch die Elektricität. *Abhandlungen der Königlich schwedischen Akademie der Wissenschaften*, 28:306–327.

[Wolff and Blondel, 2009] Wolff, B. and Blondel, C. (2009). La balance électrique de Coulomb pouvait-elle constituer sa propre cage de Faraday? Disponível em: www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique.

Esse livro contém traduções completas e comentadas das principais obras de Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) sobre eletricidade e magnetismo. Nesses trabalhos ele chegou experimentalmente na lei de torção de fios de seda e de metal, na lei de força entre corpos eletrizados variando com o inverso do quadrado da distância entre eles (conhecida nos livros didáticos como lei de Coulomb), na lei de força entre polos magnéticos também variando com o inverso do quadrado da distância entre eles, na lei de decaimento exponencial com que um corpo eletrizado perde carga para o ambiente ao seu redor, na distribuição da eletricidade sobre a superfície de corpos condutores carregados em diversas configurações de equilíbrio eletrostático, assim como em métodos avançados de magnetização e de produção de ímãs artificiais.

Sobre o Autor: André Koch Torres Assis nasceu em 1962. Concluiu o bacharelado e o doutorado no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP (1983 e 1987, respectivamente). Realizou um pós-doutorado no Laboratório Culham (Oxfordshire, Inglaterra, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e outro no Centro de Pesquisas Eletromagnéticas da Northeastern University (Boston, EUA, 1991-1992). De agosto de 2001 até novembro de 2002, assim como de fevereiro a maio de 2009, trabalhou no Instituto para a História das Ciências Naturais da Hamburg Universität (Hamburgo, Alemanha), com bolsas de pesquisa concedidas pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. De abril a junho de 2014 trabalhou na Technische Universität Dresden, na Alemanha, também com uma bolsa de pesquisa concedida pela Fundação Humboldt. Suas obras "*Eletrodinâmica de Weber*" e "*Eletrodinâmica de Ampère*" receberam os Prêmios Jabuti 1996 e 2012 concedidos pela Câmara Brasileira do Livro como livros do ano na área de Ciências Exatas. É professor do Instituto de Física da UNICAMP desde 1989, onde orienta estudantes de graduação e de pós-graduação, realizando pesquisas sobre os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia. Em particular trabalha sobre a Mecânica Relacional, o princípio de Mach e a origem da inércia. É o autor de diversos livros de física e de várias traduções de trabalhos científicos clássicos (obras de Arquimedes, Newton, Ampère, Weber etc.) disponíveis gratuitamente em sua homepage: https://www.ifi.unicamp.br/~assis

978-1-987980-31-8
9 781987 980318